2. Modelos de epidemias (SIR)

Ejercicio 8: El modelo epidémico SIR describe la evolución de una enfermedad infecciosa mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -\alpha S(t)I(t)\\ \dot{I}(t) &= -\beta I(t) + \alpha S(t)I(t)\\ \dot{R}(t) &= \beta I(t)\end{aligned}$$

donde α y β son dos constantes. Las variables S, I y R indican, respectivamente, el número de individuos susceptibles S de contraer la enfermedad, el de infectados I y el de recuperados R (de "recovered", eliminados bien por inmunidad o bien por curación y subsiguiente inmunidad). Úsese la función de Matlab `heunvector` definida en el Ejercicio 6 para dibujar diversos modelos de esta ecuación, tomando valores diferentes de los parámetros α y β y/o valores diferentes de las condiciones iniciales. Un ejemplo interesante se da con $S(0) = 1$, $I(0) = 0.001$, $R(0) = 0$ y $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.05$, para un intervalo de tiempo de 0 a 1500 usando 2000 puntos, por ejemplo. Compárese la evolución de este sistema con uno que tenga $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.01$. ¿Se comportan de manera distinta si $\alpha > \beta$ o si $\beta > \alpha$? ¿Cómo cambian?

Cómparense los resultados que se obtienen usando `heunvector` y `eulervector`. ¿Cuál parece más preciso?

Ejercicio 9: Modifíquese el modelo del Ejercicio 8 para permitir que algunos de los infectados puedan convertirse en susceptibles (i.e. individuos que se curan pero pueden volver a contagiarse), mediante un coeficiente γ. Compárese la evolución de este sistema con la del anterior, utilizando `heunvector` en ambos casos.

Ejercicio 10: En el modelo del Ejercicio 9, considérese un posible crecimiento de la población susceptible (digamos, por nacimiento), que siga una ley proporcional (es decir, $S(t)$ crece proporcionalmente a la suma de $S(t), I(t)$ y $R(t)$ con un pequeño coeficiente δ). Compárese este modelo con los de los Ejercicios 9 y 8. Explíquense las gráficas que se obtienen y la (notable) diferencia que se ve en $R(t)$ entre los dos ejercicios previos y en este.

Ejercicio 11: Además del nacimiento, considérese la posibilidad de muerte en el Ejercicio 10: cada uno de los grupos $S(t), R(t)$ e $I(t)$ decrecen con diferentes probabilidades ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3, suponiendo que $\epsilon_1 = \epsilon_3$ y que $\epsilon_2 > \epsilon_1$. ¿Cambia mucho el modelo? Compárese con los anteriores.