ALGUNAS NOTAS
PARA LA CLASE DE 17 DE MARZO DE 2020

P. FORTUNY AYUSO

Hay veces en que un problema de condición inicial aproximado viene enunciado con $y(x_0) = y_0$, donde x_0 no es 0: es decir "se empieza" en un lugar distinto de 0 en la variable independiente.

Además, puede ocurrir que, en lugar de darnos el paso h y el número de pasos, nos digan el intervalo $I = [a, b]$ en que se quiere calcular la solución aproximada y el número de pasos n, sin más (habitualmente "equiespaciados").

En ese caso, el paso es fácil de computar:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Y el valor inicial es exactamente y_0, lo que ocurre que la variable independiente comienza en a y no en 0. En estos casos, además, la variable independiente no toma los valores $0, h, 2h, \dots$, sino otros $a, a+h, a+2h$, etc. Estos valores, en lugar de ir con las h, se indican con subíndices en la x: $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \dots$: el subíndice indica el paso al que corresponden.

Veamos un ejemplo.

1. Ejercicio 64, ecuación 4

Tomemos la cuarta ecuación del ejercicio 63 y calculemos la solución aproximada de Euler en dos pasos, como dice el ejercicio 64. Tenemos

$$y' = \frac{y}{t^2},\ t \in [1, 2],\ y(1) = 1$$

y se nos dice que se han de hacer dos pasos equiespaciados. Veamos:

- La variable independiente es t, no x: esto no es problema.
- La función $f(t, y)$ es y/t^2. (Por eso no se puede empezar en $t = 0$, no está definida en 0).
- El intervalo de trabajo es $[1, 2]$, y la condición inicial y_0 está dada, por tanto, en $x_0 = 1$, y resulta que es $y(1) = 1$, tampoco es problema.
- No se nos da h, pero como los nodos (i.e. el lugar en que se calculan las soluciones aproximadas) son equiespaciados, queda

$$h = \frac{2-1}{2} = 0.5.$$

Con esto ya podemos hacer los cálculos de Euler (y Heun, y lo que haga falta).

(1) Paso 1. El valor $\tilde{y}_0$ es $\tilde{y}_0 = y_0 = 1$, la condición inicial. La pendiente ahí es:

$$f(t_0, \tilde{y}_0) = \frac{y_0}{t_0^2} = 1/1^2 = 1.$$

Por tanto, el siguiente valor de Euler es:

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + hf(t_0, \tilde{y}_0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5.$$

Téngase en cuenta que ahora t_1 (la coordenada horizontal correspondiente al siguiente paso) es $t_0 + h = 1.5$.

(2) Paso 2. Sabemos que $t_1 = 1.5$ y que $\tilde{y}_1 = 1.5$. La pendiente ahí es

$$f(t_1, \tilde{y}_1) = \frac{\tilde{y}_1}{t_1^2} = 1.5/(1.5^2) = 0.6667,$$

así que el siguiente valor aproximado es

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + h \cdot f(t_1, \tilde{y}_1) = 1.5 + 0.5 \cdot 0.6667 = 1.8333.$$

Se nos pide calcular el error relativo y absoluto (siempre es al final del proceso, no en cada punto) comparado con la solución exacta, que se nos da arriba: $y(t) = ke^{-1/t}$. Hace falta calcular la k (depende de la condición inicial). En este caso

$$y(1) = 1 = ke^{-1/1} = k/e,$$

por tanto $k = e$ para nuestro problema de condición inicial. Así que la solución exacta es:

$$y(t) = e \cdot e^{-1/t} = e^{1-1/t}.$$

El valor de esta función en $t = 2$ es

$$y(2) = 1.6487.$$

Por tanto, si E_a es el error absoluto y E_r el relativo:

$$E_a = |1.8333 - 1.6487| \simeq 0.1846,\ E_r = \frac{0.1846}{1.6487} \simeq 0.112$$

que es bastante (alrededor de un 10%), normal para Euler.