EJERCICIO 66, UN APARTADO

P. FORTUNY AYUSO

Tomemos el caso 5 del Ejercicio 63 y hagamos 2 pasos de Heun equiespaciados.
El problema de condición inicial es

$$y' = 2t, y(0) = 1$$

con intervalo $t \in [0,2]$. De ahí sale que $f(t,y) = 2t$ y que $y_0 = \tilde{y}_0 = 1$. Se pide hacer dos pasos equiespaciados. Esto nos dice que $h = (2-0)/2 = 1$.

(1) Primer paso: $t_0 = 0$, $\tilde{y}_0 = y(0) = 1$. Por etapas, como siempre:
  (a) $m_e = f(t_0, y_0) = 2t_0 = 0$; por lo tanto
  $$y_e = y_0 + h \cdot m_e = 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$
  (b) $m_f = f(t_0 + h, y_e) = 2 \cdot 1 = 2$.
  (c) Por tanto,
  $$m = \frac{m_e + m_f}{2} = \frac{0+2}{2} = 1.$$
  (d) Conclusión:
  $$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + h \cdot m = 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

(2) Segundo paso: $t_1 = 1$, $\tilde{y}_1 = 2$. Por etapas:
  (a) $m_e = f(t_1, \tilde{y}_1) = 2 \cdot 1 = 2$; Por ello
  $$y_e = \tilde{y}_1 + h \cdot m_e = 2 + 1 \cdot 2 = 4.$$
  (b) $m_f = f(t_1 + h, y_e) = 2 \cdot 2 = 4$.
  (c) Por tanto,
  $$m = \frac{m_e + m_f}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$$
  (d) Conclusión:
  $$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + h \cdot m = 2 + 1 \cdot 3 = 5.$$

Por otro lado, la solución exacta es $y(t) = t^2 + k$. Necesitamos conocer el valor de la constante, que sale de la condición inicial $y(0) = 1$. Queda:

$$y(0) = 1 = 0^2 + k$$

por tanto, $k = 1$ y la solución exacta es $y(t) = t^2 + 1$.

El valor de $\tilde{y}_2$ es una aproximación al valor $y(t)$ con $t = 2$ (porque hemos calculado la solución aproximada para $t \in [1,2]$). El error absoluto E_a y el error relativo E_r en $t = 2$ son:

$$E_a = |\tilde{y}_2 - y(2)| = 5 - 5 = 0. \, E_r = 0$$

(si el error absoluto es 0, el error relativo es 0).

No es sorprendente que la aproximación sea el valor exacto: la ecuación diferencial es realmente una integral de una función lineal y esto, el algoritmo de Heun lo resuelve de manera exacta.