Ejercicios y Problemas del Curso de Métodos Numéricos para ¿ingenieros?

Pedro Fortuny Ayuso

Curso 2011/12, EPIG, Gijón. Universidad de Oviedo
Email address: fortunypedro@uniovi.es

CAPÍTULO 1

Aritmética finita y análisis del error

Ejercicio 1. La distancia de la Tierra a la Luna varía en la actualidad (2012) entre $356400km$ y $406700km$. Acótese el error absoluto y el error relativo cometido al utilizar cualquiera de los valores de ese intervalo como "distancia real".

Ejercicio 2 (El calendario Gregoriano)**.** Explíquese el algoritmo del Calendario Gregoriano, teniendo en cuenta que

- La duración de un año "real" es de 365.242374 días.
- Se quiere que el desfase entre el equinoccio de primavera y el día 21 de marzo no llegue en ningún caso a los *dos días*.

Ejercicio 3. Se calcula la integral siguiente

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

utilizando el desarrollo limitado de Taylor de orden 4 del integrando, que es:

$$T(e^{-x^2}, x = 0, 4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Calcúlense aproximadamente los errores absolutos y relativos cometidos sabiendo que el valor exacto de la integral es 0.74682413+. ¿Son notables?

Ejercicio 4. Al calcular $1-\operatorname{sen}(\pi/2+x)$ para x pequeño, se produce un tipo error conocido. ¿Cuál? ¿Cómo se puede arreglar la fórmula para evitarlo?

Ejercicio 5. Calcular la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{7^i} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4}$$

de las siguientes maneras:

- Truncando todos las operaciones a 3 dígitos decimales.
- Redondeando todas las operaciones a 3 dígitos decimales.
- Truncando todas las operaciones a 4 cifras significativas.
- Redondeando todas las operaciones a 4 cifras signficativas.

En cada caso, calcúlense aproximadamente los errores absolutos y relativos, teniendo en cuenta que dicha suma es aprox. 0.16659725.

Ejercicio 6. En la segunda operación de las siguientes, se trunca un número cometiendo un error absoluto de 6.0×10^{-7} y un error relativo de (aprox.) 4.82×10^{-4} (media diezmilésima). Calcular el error absoluto y relativo que se comete al realizar la segunda operación en lugar de la primera:

$$26493 - \frac{33}{0.0012456}$$
$$26493 - \frac{33}{0.001245}$$

y dar alguna explicación.

Ejercicio 7. Se sabe que dos cantidades, a y b son

$$a = 1.742 \times 10^3, \;\; b = 1.741 \times 10^3,$$

con errores absolutos acotados, respectivamente, por 1 y 0.5. Calcular cotas, si se puede, de los errores absolutos y relativos de $a + b, ab, a/b$ y $a - b$. En caso de que no se pueda, explicar por qué.

Ejercicio 8. Un reloj digital de laboratorio comete un error (en binario) de 0.0000101 segundos por cada *pulso*. Dicho reloj da un pulso cada 3 segundos. ¿Cuánto tardará en desfasarse $1s$? ¿Qué error relativo comete?

Ejercicio 9. Se tiene un registro A que almacena valores en coma flotante de 64 bits y otro registro B que almacena valores enteros sin signo y tiene 16 bits. En determinado proceso solo interesa el valor entero de A, no su parte decimal ¿Es razonable simplemente “traspasar” la parte entera de A al registro B? ¿Cuál es el valor máximo que puede almacenar B?

Ejercicio 10. El cambio Euro-peseta es (supongamos) $1Eu = 166.386pts$, pero la ley obliga a que al realizar una transacción se *redondee* a la unidad monetaria más cercana (a pesetas si se cambia a pesetas, a céntimos si se cambia a Euros). Calcular:

- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 Euro por 166 pesetas.
- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 peseta por su “equivalente” en Euros.
- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 céntimo por su “equivalente” en pesetas.

CAPÍTULO 2

Solución de ecuaciones no lineales

Ejercicio 11. Utilizar el algoritmo Babilónico para calcular raíces cuadradas para calcular $\sqrt{600}$ y $\sqrt{1000}$ de manera que el error al elevar al cuadrado sea menor que 0.1.

Ejercicio 12. Relacionar de alguna manera el algoritmo babilónico de la raíz cuadrada con el algoritmo de Newton-Raphson.

Ejercicio 13. ¿Qué ocurre si se ejecuta el algoritmo de Newton-Raphson con la función $f(x) = x^3 - x$ y el valor inicial $x_0 = \sqrt{1/5}$?

Ejercicio 14. Compárese la velocidad de convergencia del algoritmo de bisección en el intervalo $[0, 1]$ y el de Newton-Raphson con semilla 0.9 para la función $f(x) = x^7 - 0.9$.

Ejercicio 15. Explicar qué ocurre si se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson con semilla $x_0 = 3$ para la función $f(x) = \operatorname{atan}(x) - .3$. ¿Se puede remediar?

Ejercicio 16. Hacer dos iteraciones del algoritmo de la secante para la función $f(x) = \tan(x) + .5$ con semillas 0 y 0.1.

Ejercicio 17. Calcular con 5 dígitos de precisión (utilizando el algoritmo de Newton-Raphson) una raíz de $\cos(3x) - x$. ¿Tiene sentido este enunciado si no se saben calcular las funciones trigonométricas con exactitud? ¿Qué puede hacerse?

Ejercicio 18. Calcular aproximadamente las raíces positivas de $f(x) = \cos(3x) - x$ utilizando el algoritmo de Newton-Raphson. Asegurar que se obtienen al menos 4 decimales exactos.

Ejercicio 19. Considérense las funciones que verifican la siguiente propiedad:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 3x.$$

Sin resolver esa ecuación diferencial, explicar qué ocurre con el algoritmo de Newton-Raphson para dichas funciones.

Ejercicio 20. Se consideran las funciones $g(x) = \pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ y $f(x) = g(x) - x$. Se pide:

- Comprobar que f tiene una única raíz real c y que está entre 0 y 2π.
- Calcular un valor aproximado de c utilizando el algoritmo de Newton-Raphson.
- Calcular un valor aproximado de c con al menos 5 cifras exactas, utilizando cualquier algoritmo y explicando por qué tiene esas cifras exactas.

Ejercicio 21. Intentar utilizar el algoritmo del punto fijo para calcular una raíz de $f(x) = \cos(x) - x$ entre $x = 0$ y $x = 1$ (el intervalo $[0, 1]$ no servirá, *cuidado*). Comparar la velocidad de convergencia de este algoritmo con la del algoritmo de bisección y el de Newton-Raphson para un problema equivalente de encontrar una raíz de otra función.

Ejercicio 22. De manera informal, se define el algoritmo de *regula falsi* como aquél que, para buscar una raíz de una función continua f en un intervalo $[a, b]$ en que $f(a)f(b) < 0$ comienza con a y b y en cada paso sustituye uno de los dos por el punto de corte de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje OX. Se pide describirlo con precisión.

Ejercicio 23. En el algoritmo de Newton Raphson, ¿puede ocurrir que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-7}$ pero que $f(x_{n+1}) > 1$? ¿Por qué?

Ejercicio 24. Sea $f : [0, 2] \to [0, 2]$ una función derivable tal que $f(0) = 1.5$, $f(1) = 0$ y $f(2) = 0.5$. ¿Cumple las hipótesis del teorema de convergencia del punto fijo? ¿Tiene algún punto fijo? ¿Por qué?

Ejercicio 25. Explíquese por qué el algoritmo de Newton-Raphson aplicado a la función $f(x) = \operatorname{atan}(x)$ *siempre diverge* si se toma $|x_0| > 10$. *Idea:* se tiene que $\operatorname{atan}(10) > \sqrt{2}$.

CAPÍTULO 3

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 26. Se considera una matriz cuadrada $n \times n$ como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Calcular su determinante.
- Explicar qué matrices intermedias iría dando el algoritmo de Gauss.
- Calcular la descomposición LU de A.
- Resolver el sistema $Ax = b$ de una manera más inteligente que esa, para cualquier b.

Ejercicio 27. Explicar qué ocurre si se aplica el método de Gauss con pivotaje parcial a una matriz $n \times n$ singular (es decir, a un sistema incompatible o compatible indeterminado). ¿Y si se aplica el método de Gauss sin pivotaje?

Ejercicio 28. Se tiene un sistema de ecuaciones $Ax = b$ cuyos datos se han obtenido a partir de mediciones con 4 cifras de precisión. Se sabe que $\kappa_\infty(A) = 400$. Comentar.

Ejercicio 29. Compruébese que el número de condición para la norma infinito de la matriz $n \times n$ siguiente:

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es $\kappa_\infty(B_n) = n2^{n-1}$. ¿Está bien condicionada? Sin embargo, ¿Es difícil resolver cualquier sistema $B_n x = b$?

Ejercicio 30. ¿Tiene alguna relación el determinante de una matriz con su número de condición? Desarrollar.

Ejercicio 31. Comprobar que el producto de matrices puede hacerse *por bloques*. Es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

(por poner un ejemplo sencillo), donde los A_{ij} y B_{ij} son matrices con dimensiones adecuadas, entonces

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32. Comprobar que si P_{ij} es la matriz de permutación (i, j) de tamaño $n \times n$ y A es una matriz $n \times m$, entonces PA consiste en conmutar las *filas* i y j de A. Si B es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces BP consiste en conmutar las *columnas* i y j de B.

Ejercicio 33. Se tiene una matriz "triangular rara", como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cómo resolverías un sistema que la tuviera como matriz de coeficientes? ¿Por qué?

Ejercicio 34. Definamos una matriz *tetratriangular* como una matriz $2n \times 2n$ que puede subdividirse en matrices triangulares superiores $n \times n$ como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

(las A_{ij} son matrices triangulares superiores). ¿Cómo resolverías un sistema cuya matriz de coeficientes fuera tetratriangular? ¿Es difícil?

Ejercicio 35. Calcular el número de condición de la siguiente matriz para la norma infinito:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

(para ello habrá, claro, que calcular la inversa).

Ejercicio 36. Sea I una imagen en escala de grises (digamos con valores en una gama de 0 a 1) de 800×600 píxeles. Se considera la transformación de "desenfoque" que consiste en que el valor de *gris* de cada píxel se cambia por una combinación lineal de los valores de los píxeles adyacentes y él mismo, según la caja

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

donde se supone que a_{22} (la ponderación del propio píxel) es mayor que la suma de todos los demás valores a_{ij} en valor absoluto. Se pide:

- Describir la matriz de dicha transformación si se entiende I como un vector.
- Si se desea realizar la operación inversa (*enfocar*), ¿se puede utilizar el algoritmo de Gauss-Seidel o el de Jacobi? ¿Piensas que es mejor usar uno de estos (si es que se puede) o, por ejemplo, la factorización LU? ¿Por qué?
- ¿Qué condiciones se han de dar para que la matriz de la transformación sea simétrica? ¿Y definida positiva?

Ejercicio 37 (Factorización de Cholesky)**.** Supóganse que se parte de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ que es simétrica y definida positiva (por tanto, es no singular y además se puede hacer el algoritmo de Gauss sin pivotaje). Se realiza su factorización LU. Como se sabe, todos los elementos de la diagonal de U son positivos. Se procede según indica el siguiente algoritmo:

1. Se empieza en la columna $i = 1$ de U. Se llama a_i al elemento (i, i) de U y se calcula $l_i = \sqrt{a_i}$, su raíz cuadrada. Sean $U_0 = U$ y $L_0 = L$.
2. Se tiene que $U_{i-1} = D(l_i)U_i$, donde D es la matriz diagonal que es igual a la identidad salvo que en el elemento (i, i) vale l_i; U_i es la matriz triangular superior que es igual que U_{i-1} salvo que en la fila i tiene todos sus elementos divididos por l_i (compruébese esto).
3. Se calcula $L_i = L_{i-1}D(l_i)$, es decir, el producto por la derecha de L_{i-1} y la misma D del paso anterior. Puesto que es un producto por la izquierda, opera por columnas: la columna i de L_i es la de L_{i-1} multiplicada por l_i, y el resto de columnas son iguales (compruébese todo esto).
4. Nótese (compruébese) que los elementos de la columna i de L_i son los mismos que los de la fila i de U_i. Esto es fácil de verificar por la forma que tienen L y U (y por tanto L_i y U_i).
5. Se incrementa i en uno hasta sobrepasar n y se repite todo el proceso.

Al terminar el proceso se tiene que $A = \tilde{L}\tilde{U}$, donde L y U son triangulares inferior y superior pero con la propiedad de que las columnas de $\tilde{L}$ coinciden con las filas de $\tilde{U}$: es decir, $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$. Esta factorización se denomina *factorización de Cholesky*. Este algoritmo no es el que se utiliza para calcular esta factorización. Véase el ejercicio siguiente, por ejemplo.

Ejercicio 38 (Factorización de Cholesky (2))**.** La factorización de Cholesky *de una matriz A simétrica y definida positiva* puede calcularse también mediante el algoritmo de factorización LU modificado:

- En lugar de utilizar como divisor en el multiplicador el pivote, se utiliza su raíz cuadrada.
- En la matriz U no se obtienen las filas de A, sino que se obtienen las filas de A divididas por la raíz cuadrada del pivote.
- En la matriz L no se obtienen ni unos en la diagonal ni las en las columnas los multiplicadores correspondientes a LU, sino que, en la diagonal están las raíces de los pivotes y en las columnas los multiplicadores.
- Al ser A simétrica y definida positiva, queda $L = U^T$.

Esta es una manera directa de calcular la factorización de Cholesky, que saca partido *por anticipado* de la condición de simétrica y definida positiva de la matriz A.

Ejercicio 39. Se sabe que una matriz $n \times n$ tiene todos sus elementos menores que 1 y que en su inversa todos son menores que 1 salvo un elemento que es n. ¿Se puede acotar su número de condición para la norma infinito?

Ejercicio 40. Se sabe que una matriz M tiene por norma infinito 0.1. Se quiere resolver un problema iterativo $x = Mx + c$. Se toma una semilla $x_0 = (1, \dots, 1)$ y se obtiene un x_1 con todas sus componentes positivas y menores que 1. ¿Cúantas iteraciones hacen falta para obtener una precisión de 10^{-6}? ¿En qué resultado te basas?

Ejercicio 41. Se sabe que una matriz A es estrictamente diagonal dominante por filas y que, de hecho, $|a_{ii}| \geq 2\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ para cada fila i. Se pide:

- Explicar si el algoritmo de Jacobi aplicado al sistema $Ax = b$ (para cualquier b) converge o no.
- Calcular, si se inicia el algoritmo con el vector $(1, 0, \dots, 0)$, un número de iteraciones que garanticen que el error cometido es menor que 10^{-6}.

Ejercicio 42. Estudiar si el método de Jacobi convergerá para el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ -1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tomar una semilla $x_0 = (1, 2, 3)$ y, razonadamente, calcular un número de interaciones que garantice que el error cometido es menor que 10^{-5}.

Ejercicio 43. Estudiar la convergencia del algoritmo de Jacobi para un sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Misma pregunta para el algoritmo de Gauss-Seidel.

CAPÍTULO 4

Interpolación

Ejercicio 44. Se tienen cuatro puntos y se quiere construir un spline de grado dos que los interpole de tal manera que la derivada en los puntos intermedios sea continua. Calcular las ecuaciones que describen este problema y explicar si el sistema que se obtiene es determinado o indeterminado. Si es indeterminado, dar más condiciones para que sea determinado.

Ejercicio 45. ¿Es cierto que, cuantos más puntos se tomen para interpolar más se aproxima el polinomio interpolador de Lagrange a la gráfica de una función? ¿En qué se puede uno apoyar para responder a esto?

Ejercicio 46. ¿Utilizarías el polinomio interpolador de Lagrange para aproximar la función $f(x) = e^x$ si conoces 5 valores? ¿Por qué?

Ejercicio 47. Se tiene una nube de 1000 puntos (coordenadas (x, y)) y se quiere calcular la interpolación por mínimos cuadrados con las funciones $f(x) = 1$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$. ¿Puede hacerse? ¿De que tamaño queda el sistema lineal que se ha de resolver?

Ejercicio 48. Se tiene una nube de 300 puntos (coordenadas (x, y)). Se sabe que existe una función de la forma $f(x) = ae^{bx}$ tal que el error cuadrático total es 0.1. Se considera la nube de puntos $(x, \log(y))$ y se calcula la interpolación por mínimos cuadrados de esta nube para las funciones $1, x$; se obtiene que la mejor interpolación es $2 + 3x$. ¿Es posible que el error cuadrático total de la función e^2e^{3x} respeto de la primera nube de puntos sea mayor que 0.1? ¿Por qué?

Ejercicio 49. Calcular los polinomios de base de Lagrange para los siguiente puntos: $(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 10), (4, 20)$. Utilizarlos para calcular el polinomio interpolador de Lagrange de grado 4 que pasa por ellos.

Ejercicio 50. Escribir el sistema de ecuaciones del problema de interpolación lineal por mínimos cuadrados para la nube de puntos $(0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 4), (5, -1)$ y las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^4$. No se pide resolverlo (hágase si se desea).

Ejercicio 51. Se tiene la siguiente nube de puntos: $(0,1)$, $(1,10)$, $(2,11)$, $(3,12), (12,13)$. ¿Es razonable pensar que siguen una distribución lineal? ¿Qué tipo de función utilizarías para aproximarlos por mínimos cuadrados? (La respuesta no es única). Conviene hacer una gráfica de los puntos.

Ejercicio 52. Considérese la tabla de datos siguiente:

x	y
-2	0.0338
-1.5	0.0397
-1	0.4119
-0.5	1.862
0	3.013
0.5	1.856
1	0.4240
1.5	0.0485
2	0.0249

Se pide (hará falta tiempo o usar un ordenador):

- Calcular la tabla de $(x, \log(y))$ (como siempre, log representa el *logaritmo natural*).
- Interpolar linealmente la tabla que se ha calculado utilizando las funciones 1 y x^2. Llámese $g(x)$ a la función que resulta (de la forma $a + bx^2$).
- Llamar $f(x)$ a la función $e^{g(x)}$, es decir, $e^a e^{bx^2}$, donde a y b son los calculados antes. Calcular el error cuadrático total cometido por $f(x)$ respecto de la nube de puntos original.
- Calcular el error cudarático total cometido por la función $3e^{-2x^2}$ respecto de la nube de puntos original.
- Comentar los dos últimos resultados con tu compañero.

Ejercicio 53. Se sabe que una tabla de datos representa el movimiento browniano unidimensional de una partícula. ¿Usarías un spline cúbico para representarlos? ¿Por qué?

Ejercicio 54. Se sabe que una tabla de datos representa las velocidades instantáneas de un coche (en una conducción normal) a lo largo de un trayecto. ¿Usarías un spline cúbico o una interpolación lineal a trozos para representarlo gráficamente? ¿Por qué?

Ejercicio 55. Una tabla de datos representa las ganancias a la ruleta de un jugador, a lo largo de una tarde. ¿La representarías con un spline o con una interpolación lineal? ¿Por qué?

Ejercicio 56. ¿Tiene sentido representar el spline cúbico de una lista de datos que muestra una estadística (*edad*, *ganancias*)? ¿Por qué? ¿Qué es lo que usarías para dar una idea de la relación? ¿Por qué?

Ejercicio 57. Plantear las ecuaciones necesarias para calcular el spline cúbico "natural" que interpola la nube de datos:

x	y
0	1
1	3
2	0
3	4
4	5

Misma pregunta para el spline "no-un-nudo". Si se tiene un ordenador a mano, resolver el sistema y dibujar los dos splines (si es que se sabe cómo hacerlo).

CAPÍTULO 5

Derivación e Integración numéricas

Ejercicio 58. Se tiene la siguiente lista de datos correspondiente a una función $f(x)$:

1.03	1.04	1.05	1.07	1.09	1.13
2.5	2.8	2.9	3.1	2.95	2.97

Se pide

- Dar un valor aproximado de $f'(1.04)$.
- Dar un valor aproximado de $f'(1.09)$.
- Calcular aproximadamente $f'(1.03)$ y $f'(1.13)$.

Ejercicio 59. Dada la función $f(x) = \cos(x)$, se pide:

1. Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ por el método del punto medio, del trapecio y de Simpson.
2. Calcular el valor "exacto" de dicha integral.
3. Calcular los errores absolutos y relativos cometidos en cada caso. ¿Es mejor el trapecio o el punto medio en este caso?

Ejercicio 60. Considérese la función $f(x) = \tan(x)$ entre $x = -1$ y $x = 1.5$. Se pide:

1. Calcular $\int_{-1}^{1.5} f(x)\,dx$ utilizando los métodos del punto medio, trapecio y Simpson.
2. Calcular el valor exacto de dicha integral.
3. Calcular los errores absolutos y relativos en cada caso.

Ejercicio 61. Se sabe que la densidad de una barra metálica sigue la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$, para x desde 1 hasta 3. Se pide:

1. Aproximar la masa utilizando las reglas del punto medio, del trapecio y de Simpson simples.
2. Hacer el mismo cálculo pero subdividiendo el intervalo en 3 subintervalos y aplicando las reglas compuestas en cada caso.

Ejercicio 62. Considérese $f(x) = x^7 - 15x^3 + 10x$ definida entre $x = -2$ y $x = 2$. Calcúlense aproximaciones a su integral entre dichos extremos utilizando:

- Las reglas del punto medio, del trapecio y de Simpson simples.

- Las mismas reglas compuestas dividiendo el intervalo en 2, y en 3 subintervalos (es decir, hay que hacer dos veces este apartado, una para 2 subintervalos y otra para 3).
- Calcular los errores relativos, absolutos, etc...

CAPÍTULO 6

Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 63. Considérense los problemas de valor inicial siguientes. Verifíquese que la solución propuesta es válida para cualquier valor de la constante y calcúlese esta para la condición inicial propuesta.

- $y' = 0.03y$ para $t \in [0,1]$, con $y(0) = 1000$. Solución: $y(t) = ke^{0.03t}$.
- $y' = t/y$ para $t \in [0,1]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = \sqrt{t^2+k}$.
- $y' = e^{-y}$ para $t \in [1,3]$, con $y(1) = 0$. Solución: $y(t) = \ln(t+k)$.
- $y' = y/t^2$ para $t \in [1,2]$, con $y(1) = 1$. Solución: $y(t) = ke^{-1/t}$.
- $y' = 2t$ para $t \in [0,2]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = t^2 + k$.
- $y' = y^2$ para $t \in [0,1/2]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = 1/(k-t)$.

Ejercicio 64. Para cada uno de los problemas anteriores, hágase lo que sigue:

1. Resolverlo de manera aproximada usando el método de Euler con dos pasos equiespaciados.
2. Calcular el error absoluto y relativo cometido en el instante final (usando, claro, la solución exacta que se da).
3. Resolverlo con cuatro pasos y comparar.

Ejercicio 65. Para cada uno de los problemas del ejercicio 63, se pide

1. Resolverlo de manera aproximada utilizando el método de Euler modificado con dos pasos equiespaciados.
2. Calcular el error relativo y el absoluto.
3. Mismo con cuatro pasos equiespaciados.

Ejercicio 66. Para cada uno de los problemas del ejercicio 63, se pide

1. Resolverlo de manera aproximada utilizando el método de Heun con dos pasos equiespaciados.
2. Calcular el error relativo y el absoluto.
3. Mismo con cuatro pasos equiespaciados.

Ejercicio 67. Considérese la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y^2.$$

¿Se puede decir algo sobre el crecimiento o decrecimiento de las soluciones? Sea $y(x)$ la solución que pasa por la condición inicial $y(0) = 1$. ¿Se puede saber si es cóncava o convexa? ¿Tiene algún punto crítico?

Mismas preguntas para la solución $y(x)$ con $y(0) = -1$.

Ejercicio 68. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = y$$

. y sea $y(x)$ la solución del problema con condición inicial $y(-1) = 2$. ¿Es $y(x)$ creciente? ¿Tiene algún punto crítico? ¿Es cóncava o convexa?

Mismas preguntas para la solución del problema con la condición inicial $y(-1) = -2$.

¿Qué pasa con la condición inicial $y(1) = 0$?

Ejercicio 69. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{sen}(y).$$

¿Es posible saber algo sobre los puntos en que las soluciones tienen un máximo o un mínimo? ¿Y sobre la concavidad/convexidad de las soluciones?

Ejercicio 70. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = (x - 1)y.$$

Se considera la solución $y_1(x)$ del problema con condición inicial $y(0) = -1$. ¿Tiene algún punto crítico? ¿Es máximo, mínimo o un punto de inflexión?

Mismas cuestiones para la solución con condición inicial $y(1) = 2$.