

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: Dos horas

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1)). Se sabe que $10.3^3 < 1.100$ y que $10.4^3 > 1.100$. Calcular, utilizando *dos pasos* del algoritmo de Newton-Raphson, una aproximación a $\sqrt[3]{1.100}$. ¿Cuántos pasos hacen falta como mínimo para garantizar que se obtienen 8 cifras *decimales* exactas?

Ejercicio 2 (2 puntos (1+1)). Se considera la matriz de tamaño $n \times n$ siguiente (se pone al lado de la tamaño 5 para facilitar la comprensión):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}; \quad \text{para } n = 5 \text{ queda: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (1) Calcular la descomposición LU de la matriz M (la de tamaño n).
- (2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 (1 punto). Plantear el sistema de ecuaciones necesario para calcular el spline cúbico correspondiente a la lista de 3 puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, con las condiciones $P_0''(0) = 0$, $P_1''(2) = 0$, donde $P_0(x)$ y $P_1(x)$ son los polinomios correspondientes al spline.

Ejercicio 4 (3 puntos (1.5+1.5)). Realizar dos pasos del algoritmo de Euler para el problema de condición inicial:

$$y' = x + 2y - 1, \quad y(0) = 0$$

con $h = 1$. Hacer lo mismo *pero solo un paso* con el algoritmo de Heun.

Ejercicio 5 (1 punto (0.5+0.5)). Calcular un valor aproximado de la integral siguiente

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - (x^2 - 1)^2 dx,$$

utilizando el método de Simpson *simple*.

Explicar si el resultado parece razonable o no, *sin calcular la integral*. Si no es razonable, decir cómo se podría arreglar.

Ejercicio 6 (1 punto (0.5+0.5)). Se quiere aproximar una nube de 5 puntos (x_i, y_i) utilizando el método de mínimos cuadrados con una función del tipo $f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$. Se pide contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:

- (1) ¿Cuál es el tamaño de la matriz X a partir de la cual se calcula el sistema de ecuaciones necesario?
- (2) ¿Cuál es el tamaño del sistema de ecuaciones final que se ha de resolver?