Final Extra de Métodos Numéricos, grupo F — 14 de julio de 2020

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas y media***

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1))**.** Se quiere calcular el punto de corte, en el primer cuadrante, de las gráficas de $f(x) = 2/x^2$ y $g(x) = x^3$.

- ¿Cómo aplicarías el algoritmo de Newton-Raphson?
- Si la semilla es $x_0 = 1$, ¿Cuántas iteraciones del algoritmo hacen falta para asegurar (sin conocer la solución exacta) que el error sea menor que 10^{-6}? (Para esto quizás haya que calcular una o dos iteraciones)

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Enunciar con precisión el algoritmo de Gauss *sin* pivotaje.

Ejercicio 3 (1.5 puntos (0.5 por pregunta))**.** Se trabaja con imágenes digitales de 1920×1080 píxeles y se lleva a cabo una convolución con núcleo de tamaño 3×3. Contestar a las siguientes preguntas.

- ¿Qué dimensión tiene el *espacio vectorial* en el que se está trabajando?
- ¿Qué tamaño tiene la matriz de la convolución?
- ¿Cuántos elementos hay distintos de cero, como mucho, en cada fila de la matriz anterior?

Ejercicio 4 (1.5 puntos)**.** En un experimento, se sabe que los valores obtenidos deben ajustarse a la fórmula $y = A + B\,\mathrm{sen}(x) + C\cos(x)$. Se hacen 300 experimentos. Contestar:

- ¿Es posible plantear el problema de mínimos cuadrados en ese caso?
- ¿De qué tamaño es el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene?
- ¿Es posible que B y C salgan 0 los dos?

Ejercicio 5 (1 punto)**.** ¿Es posible que existan a, b y c para los que los siguientes polinomios formen un spline cúbico para la nube $(0,0), (2,3), (5,6)$?

$$P(x) = x - ax^2 + bx^3, \;\; Q(x) = 3 + (x-2) + (x-2)^2 + c(x-2)^3$$

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular el valor aproximado de la siguiente integral utilizando las reglas del trapecio y Simpson simples. El valor exacto es $448/3$.

$$\int_0^4 3x^3 - 2x^2\,dx$$

y decir qué error relativo comete cada una.

Ejercicio 7 (2 puntos (1+1))**.** Dos partes:

- Enunciar con precisión el método de Heun para problemas de condición inicial de una variable.
- Aplicar *un paso* de dicho método al problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 2 \end{cases}$$

  con paso $h = 1$.