Parcial 1 de métodos numéricos — 9 de marzo de 2022

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas***

Ejercicio 1 (1 punto (0.5 + 0.5))**.** Una balanza comete un error de 1g cada 3kg. Se utiliza para pesar una masa de 10kg. ¿Qué error relativo se comete?

Calcular el error absoluto cometido si se utiliza dicha balanza para pesar 7kg (escribir las *unidades* del error).

Solución. Si es un gramo de error cada 3 kilogramos, expresando todo en gramos, queda:

$$\frac{1\mathrm{g}}{3000\mathrm{g}} = \frac{1}{3000}$$

de error relativo (aprox. $0.0003333\dots$). **Importante:** ni es 0.0003 ni es 0.0003334. Tampoco tiene unidades (se han "ido" los gramos).

El error absoluto al pesar 7kg será entonces

$$\frac{1}{3000} \times 7\mathrm{kg} = \frac{7}{3}\mathrm{g}.$$

□

Ejercicio 2 (4 puntos (1+1+1+1))**.** Dos partes:

(1) Enúnciese *con precisión* el algoritmo de Bisección.
(2) ¿Cómo utilizarías dicho algoritmo para calcular las raíces de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ que están entre 0 y 2? (**Importante:** no se trata de *echar las cuentas* sino de explicar cómo se utililzaría).
(3) Calcular una raíz cuarta de 10 utilizando tres pasos del algoritmo de Newton-Raphson (en este apartado, utilizar solo 3 decimales en cada cuenta).
(4) ¿Cuántas iteraciones hacen falta en el apartado anterior para garantizar que se tienen 12 cifras *decimales* exactas? (Suponiendo que se utilizan 12 decimales en cada cuenta a partir de la tercera iteración).

Solución. Por partes.

(1) El primer punto es memorístico.
(2) Ocurre que $f(0)f(2) > 0$ (ambos valores son positivos) así que no se puede "usar bisección" a lo bruto. Una inspección rápida nos muestra que $f(1) < 0$. Además, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, por lo que tiene que haber otra raíz negativa. Así pues, en $[0,1]$ hay una raíz y en $[1,2]$ hay otra, y no hay más en el intervalo $[0,2]$ (un polinomio de grado 3 tiene solo 3 raíces). Por tanto, se debe aplicar bisección en los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$ para resolver el problema.
(3) Utilizando $g(x) = x^4 - 10$, se ve que $g(1) = 1$ y $g(2) = 16$. Lo lógico es tomar $x_0 = 2$ (ó quizás $x_0 = 1.5$). La derivada de $g(x)$ es $4x^3$. Las iteraciones de Newton-Raphson son evidentes (no las voy a hacer) y la cota del error es sencilla una vez que se llega a $x_3 = 1.779$, pues $g(x_3) > 0$ y $g(1.778) < 0$: se tiene $\epsilon = 10^{-3}$. Ahora

$$|g'(x)| > g'(1.778) > 22 = L, \ \ |g''(x)| < g''(1.779) < 38 = K$$

y $K/(2L) < 1$, por tanto, para alcanzar 12 cifras exactas en la iteración $3 + k$ basta con obtener $(0.001)^{2^k} < 10^{-12}$, que da $2^k > 4$, así que $k = 3$ sirve (en realidad $k = 2$ también, porque $K/(2L) < 1$) y por tanto en la iteración $6 = 3 + 3$ se llega seguro a dicha aproximación.

□

Ejercicio 3 (3 puntos (1 + 2))**.** A partir de una matriz A, se ha realizado *parte* del método de reducción de Gauss y se han obtenido las matrices intermedias:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Contestar razonadamente:

(1) ¿Se ha utilizado pivotaje parcial en dicho método?
(2) Independientemente de la respuesta anterior, realícese el siguiente paso del método de Gauss *con pivotaje parcial* e indíquese qué matriz L se obtendría (tras hacer solamente dicho paso).

Solución. Por partes:

(1) Se puede decir que sí, porque todos los multiplicadores (en L) son de valor absoluto como mucho 1, o bien se puede decir que no se sabe (aunque en realidad, sí se ha hecho), por el mismo motivo.
(2) Las operaciones que hay que hacer son:
   (a) Intercambiar las filas 2 y 4 de U. Esto hace que **en la matriz L se intercambien los elementos 2 y 4 de la primera columna**.
   (b) Hacer el cero que falta en U con la operación $F_4 \leftarrow F_4 - 0.5F_2$.
   (c) La matriz L que se obtiene es, por tanto:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Obsérvese cómo el 0.3 y el 0.5 han cambiado de lugar).

□

Ejercicio 4 (2 puntos (1+1))**.**
Se pide

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}$$

- Si se realizara el método de Gauss con pivotaje parcial, ¿habría algún multiplicador igual a 1? (Explicar si sí ó no y por qué).

Solución. Por partes

(1) El sistema es, en "castellano":

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n &= 1 \\ &\vdots \\ (n-2)x_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 &= n-2 \\ (n-1)x_1 + nx_2 &= n-1 \\ nx_1 &= n \end{aligned}$$

Comenzando desde "abajo": $x_1 = 1$, y todas las demás han de ser 0.

(2) Haciendo pivotaje parcial en la primera columna, queda:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

y al hacer ceros, solo cambia la primera columna. Todos los multiplicadores son estrictamente menores que uno en esta columna. La matriz que queda desde la columna 2 y fila 2 tiene la misma propiedad en la columna 2, y así sucesivamente. Por tanto, **no** van a quedar multiplicadores iguales a 1 en valor absoluto.

$\square$

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Una hora y media***

Ejercicio 1 (5 puntos (1+1+1+1+1))**.** Dos partes:

(1) Enúnciese *con precisión* el algoritmo de Newton-Raphson.

(2) ¿Cómo utilizarías dicho algoritmo para calcular las raíces de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ que están entre 0 y 2? (**Importante:** no se trata de *echar las cuentas* sino de explicar cómo se utilizaría).

(3) Realizar dos iteraciones del método de bisección para intentar encontrar una raíz cuarta de 33.

(4) ¿Cuántas iteraciones hacen falta para garantizar que el error es menor que 10^{-10}?

(5) Se sabe que $\sqrt[4]{33} \simeq 2.3967817269$ (todas esas cifras son exactas). ¿Qué error relativo y absoluto se comete si se utiliza el último valor obtenido en el apartado (3) como aproximación?

Ejercicio 2 (3 puntos (2 + 1))**.** Dos partes:

(1) Realizar la factorización LUP de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Si se hubiera hecho la factorización LU, ¿quedarían los mismos multiplicadores en L?

Ejercicio 3 (2 puntos (1+1))**.**

Se pide

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n \\ 1+2+\cdots+n-1 \\ 1+2+\cdots+n-2 \\ \vdots \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Si se realizara el método de Gauss sin pivotaje parcial, ¿habría algún multiplicador igual a -1? (Explicar si sí ó no y por qué).