Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.
Tiempo: ***Dos horas y media***

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Una cinta métrica de plástico se ha estirado con el uso y ahora cada metro mide realmente 1.0003m. ¿Cuándo se cometerá un error relativo mayor que el 0.1% al utilizarla para medir en unidades de metros?

SOLUCIÓN. El error relativo no depende del número de veces que se repita una medición, así que será siempre el mismo, que es

$$\frac{1.0003 - 1}{1} = .0003 = 0.03\% < 0.1\%$$

y nunca se cometerá un error relativo mayor que 0.1%.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Dos partes:

(1) Enunciar con precisión el algoritmo de Newton-Raphson (1 punto).
(2) Si se utiliza dicho algoritmo para calcular $\sqrt[3]{2}$ comenzando con la semilla 1.25, ¿en cuántos pasos puedes garantizar que el error es menor que 10^{-10}? Se sabe que $1.26^3 > 2$. (1 punto).

SOLUCIÓN. La primera parte es memorística.

Para la segunda parte necesitamos una función cuya raíz sea $\sqrt[3]{2}$, por ejemplo, $f(x) = x^3 - 2$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2$, y su derivada segunda $f''(x) = 6x$. Ambas son crecientes en $x > 0$. Se nos dice que $f(1.26) > 0$, y se sabe que $f(1.25) < 0$ (esta cuenta es sencilla). Por tanto, sabemos que la solución está a una distancia menor que 0.01 de 1.26. En el entorno $[1.25, 1.26]$, la derivada primera es mayor en valor absoluto que $f'(1.25) = 4.6875 = L$ y la derivada segunda es menor (en v.a.) que $f''(1.26) = 7.56 = K$. Por tanto, si se comienza en 1.25, se sabe que

$$|x_n - r| \leq \left(\sqrt{\frac{7.56}{9.375}} \times 0.01\right)^{2^n} < 0.01^{2^n}$$

y para que esto sea menor que 10^{-10}, basta con que

$$10^{-10} < \left(10^{-2}\right)^{2^n}$$

es decir, $10^{-10} < 10^{-(2^{n+1})}$, que significa que $2^{n+1} > 10$. Es decir, $n + 1 > 4$, basta con que $n = 3$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Considérese la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Se pide: realizar el algoritmo de reducción de Gauss *con pivotaje parcial* para obtener una matriz triangular superior.
IMPORTANTE: indicar en cada momento qué acción se realiza.

SOLUCIÓN. Solo indico los pasos, sin mostrar las matrices intermedias. La primera columna está terminada. Empezamos en la segunda.

(1) Como es con pivotaje parcial y $4 > 2$, hay que cambiar la cuarta fila (que tiene un 4) por la segunda (que tiene un 2).
(2) Una vez hecho eso, hay que restar a la cuarta fila la mitad de la segunda. La segunda columna queda terminada.
(3) Con esas operaciones, la tercera columna queda con un 0 en la diagonal y un número distinto de cero debajo. El pivotaje parcial obliga a intercambiar la tercera y la cuarta fila.
(4) Ya está terminado pues ya se ha obtenido una matriz triangular superior.

Ejercicio 4 (1 punto)**.** ¿Es posible que los polinomios $P_0(x) = ax + bx^2$ y $P_1(x) = x^3 - 2x$ formen un spline cúbico para la nube de puntos siguiente ($P_0(x)$ para el intervalo $[0, 1]$ y $P_2(x)$ para el $[1, 2]$)? Obviamente, la respuesta depende de a y b. Si es posible, dar un ejemplo (explicando como sé ha llegado a él); si no es posible, explicar por qué.

x	y
0	0
1	-1
2	4

Solución. Se han de plantear las condiciones necesarias y ver qué ocurre.

(1) $P_0(0) = 0$, esto ocurre siempre porque $P_0(x)$ no tiene término independiente.
(2) $P_0(1) = -1$: por tanto $-a + b = -1$, que da una ecuación lineal.
(3) $P_1(1) = -1$: al sustituir $P_1(1)$ da exactamente -1, ocurre siempre.
(4) $P_1(2) = 4$: al sustituir se obtiene $P_1(2) = 8 - 4 = 4$, también ocurre.
(5) $P_0'(1) = P_1'(1)$, esto da:
$$a + 2b = 3 - 2 = 1,$$
que es otra condición para a y b.
(6) $P_0''(1) = P_1''(1)$, que es:
$$2b = 6.$$
Ya no hay más condiciones. En total, el sistema es:
$$\begin{aligned} &-a + b = -1 \\ &a + 2b = 1 \\ &2b = 6 \end{aligned}$$
que es claramente incompatible. No pueden formar dicho spline cúbico.

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Se tiene la siguiente tabla de distancias recorridas por un vehículo que se sabe sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: Se pide: expre-

t	d
3	51
4	81
5	120
10	435
20	1664

sar (explicando por qué se hace así) el sistema de ecuaciones necesario para calcular, utilizando mínimos cuadrados lineales, los valores que mejor aproximen la distancia inicial, la velocidad inicial y la aceleración.

Nota. Si aparece un producto de matrices **no hay que hacerlo**, dejarlo planteado.

Solución. Este ejercicio es puramente mecánico, una vez que se conoce el tipo de función que se quiere interpolar: como es un movimiento uniformemente acelerado, será $f(t) = d_0 + v_0 t + a/2t^2$, donde d_0, v_0 y a son, respectivamente, la distancia inicial, la velocidad inicial y la aceleración. Esta $f(t)$ es una combinación lineal de las funciones $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2/2$. Por tanto, definiendo
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 9/2 & 8 & 25/2 & 50 & 200 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 51 \\ 81 \\ 120 \\ 435 \\ 1664 \end{pmatrix},$$
el sistema que se ha de resolver es 3×3:
$$X \cdot X^T \begin{pmatrix} d_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = X \cdot Y$$

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular de manera aproximada la siguiente integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos iguales:
$$\int_0^4 2^x \, dx.$$

Solución. Como la integral es entre 0 y 4 y son dos subintervalos, hemos de utilizar $I_0 = [0, 2]$, $I_1 = [2, 4]$. Los puntos en que necesitamos conocer el valor del integrando $f(x) = 2^x$, son los extremos y los puntos medios respectivos:

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 16.$$

La integral aproximada I que se nos pide es, puesto que $b - a = 2$ en los dos intervalos:

$$I = \frac{2}{6}(1 + 4 \times 2 + 4) + \frac{2}{6}(4 + 4 \times 8 + 16) = \frac{65}{6}.$$

Ejercicio 7 (2 puntos)**.** Utilizar el método de Heun para calcular la solución aproximada del siguiente problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x - t & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - y + t & y(0) = 0 \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$, con *un solo paso*.

Solución. Como siempre, solo hay que ir con cuidado. El paso es $h = 1$.

(1) Los valores de las derivadas en la condición inicial son $\dot{x}(0) = 0 + 1 - 0 = 1$, $\dot{y}(0) = 1 - 0 + 0 = 1$.

(2) Por tanto, el punto que daría Euler es:

$$x_e = 1 + h \times 1 = 2,\ y_e = 0 + h \times 1 = 1.$$

(3) En el punto $(t = 1, x_e, y_e)$ los valores "finales" de las derivadas son:

$$m_{f,x} = 1 + 2 - 1 = 2,\ m_{f,y} = 2 - 1 + 1 = 2.$$

(4) Así que los valores medios de las derivadas son:

$$m_{m,x} = (1 + 2)/2 = 3/2,\ m_{m,y} = (1 + 2)/2 = 3/2.$$

(5) Y ya podemos calcular el punto siguiente:

$$t_1 = 1,\ x_1 = 1 + 3/2 \times h = 5/2,\ y_1 = 0 + 3/2 \times h = 3/2.$$

Es decir, el punto de Heun es $(1, 5/2, 3/2)$.

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.
Tiempo: ***Dos horas***

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1)). Dos partes:

(1) ¿Es posible que los polinomios $P_0(x) = ax + bx^2$ y $P_1(x) = x^3 - 2x$ formen un spline cúbico para la nube de puntos siguiente ($P_0(x)$ para el intervalo $[0, 1]$ y $P_2(x)$ para el $[1, 2]$)? Obviamente, la respuesta depende de a y b. Si es posible,

x	y
0	0
1	-1
2	4

dar un ejemplo (explicando como sé ha llegado a él); si no es posible, explicar por qué.

(2) Calcular el valor en $x = 3$ de la interpolación lineal a trozos de la nube de puntos: $(-1, 2), (0, 1), (1, -1), (2, 4)$.

Ejercicio 2 (2 puntos). Se tiene la siguiente tabla de distancias recorridas por un vehículo que se sabe sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: Se pide:

t	d
3	51
4	81
5	120
10	435
20	1664

expresar (explicando por qué se hace así) el sistema de ecuaciones necesario para calcular, utilizando mínimos cuadrados lineales, los valores que mejor aproximen la distancia inicial, la velocidad inicial y la aceleración.
Nota. Si aparece un producto de matrices **no hay que hacerlo**, dejarlo planteado.

Ejercicio 3 (2 puntos (1+1)). Dos partes:

(1) ¿Puede ocurrir que la fórmula del trapecio dé un resultado mejor que la fórmula de Simpson al calcular una integral de manera aproximada?

(2) Calcular de manera aproximada la siguiente integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos iguales:

$$\int_0^4 2^x \, dx.$$

Ejercicio 4 (4 puntos (2+2)). Dos partes:

(1) Utilizar el método de Heun para calcular la solución aproximada del siguiente problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x - t & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - y + t & y(0) = 0 \end{cases}$$

para $t \in [0, 1]$, con *un solo paso*.

(2) Utilizar el método de Euler con dos pasos para calcular de manera aproximada el valor en $t = 2$ de la solución del problema de condición inicial siguiente:

$$\ddot{y} = t + y, \; y(0) = 1, \; \dot{y}(0) = 2.$$