Parcial 1 de métodos numéricos — 15 de marzo de 2021

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas***

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Un péndulo da 3601 pulsos por hora. Se utiliza para medir los segundos, con la equivalencia 1pulso = 1seg. Calcular el error absoluto que se produce cada minuto, *en segundos*, y el error relativo.

Solución. Es una regla de tres pero hay que tener cuidado con las unidades. Una hora son 3600 segundos. Así pues,

$$\begin{aligned} 3601\text{pulsos} &\text{ —— } 3600\text{s} \\ 1\text{pulso} &\text{ —— } x\,\text{s} \end{aligned}$$

lo que nos da que un pulso son exactamente 3600/3601 segundos. El error, por tanto, es de $1 - 3600/3601$ segundos cada segundo, y por minuto es esa cantidad multiplicada por por 60. El error relativo es independiente de la magnitud, así que es $(1 - 3600/3601)\text{s}/1\text{s}$. □

Ejercicio 2 (3 puntos (1.5+1.5))**.** Dos partes:

(1) Utilícese el algoritmo de Newton-Raphson para calcular aproximadamente la raíz quinta de 2. Selecciónese para ello una semilla adecuada y háganse solamente dos pasos (es decir, calcular x_1 y x_2).

(2) ¿Cuántos pasos necesitas, una vez que ya conoces x_2, para asegurar que el error es menor que 10^{-10}?

Solución. Por partes.

(1) La función que vamos a usar es, obviamente, $f(x) = x^5 - 2$ y vamos a tratar de calcular una raíz. Como la raíz cuadrada de 2 es 1.4..., esta raíz quinta estará aun más cerca de 1. Tomemos $x_0 = 1$, por ejemplo. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 5x^4$ y:

$$x_1 = 1 - (-1)/5 = 1.2$$

El siguiente valor es:

$$x_2 = 1.2 - (1.2^5 - 2)/(5 \times 1.2^4) \simeq 1.1529.$$

(2) Un cálculo rápido nos da que $1.14^5 < 2$ mientras que $x_2^5 > 2$. Por tanto, hay una raíz entre 1.14 y 1.1529, y ambos distan menos que 0.013. La función $f(x)$ es creciente para $x > 0$ y su derivada primera y segunda. Se puede acotar, entonces:

$$|f'(x)| > 5 \times 1.14^4 > 8.4, \;\; |f''(x)| < 20 \times 1.153^3 < 30$$

y de todo esto, obtenemos finalmente que

$$|x_n - r| < \left(\frac{30}{16.8} \times 0.013 \right)^{2^{n-2}}$$

y queremos conseguir que esto sea menor que 10^{-10}. Despejando,

$$2^{n-2} > \frac{\log 10^{-10}}{\log(0.023)} = 6.1...$$

que da $n - 2 \geq 3$, por lo que llegamos en x_5 al error pedido.

□

Ejercicio 3 (2 puntos (1+1))**.** Dos partes:

(1) Enúnciese claramente y con precisión el algoritmo de Bisección.

(2) En el intervalo $[2, 10]$ hay definida una función continua $f(x)$ cuyo signo es positivo en 2 y negativo en 10. Si se usa el algoritmo de Bisección para calcular una raíz aproximada, ¿cuántos pasos son suficientes para que el error sea menor que 10^{-3}?

Solución. La primera parte es memorística.

La segunda parte. Anchura del intervalo: 8, error pedido 10^{-3}. Por tanto, hemos de asegurar que $8/2^n < 10^3$, es decir, $2^{n-3} > 1000$, que se consigue cuando $n-3=10$, $n=13$. □

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Considérese la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & \cdots & n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la matriz U que se obtiene al aplicar el método de Gauss *con pivotaje parcial*?

Solución. No liarse: al hacer pivotaje en la primera columna, la fila primera se cambia con la última y queda una fila con n en el pivote y ceros a su derecha. Por tanto, al hacer ceros debajo del pivote, solo cambia lo que está justo debajo de él (porque a la derecha del pivote hay ceros). Por tanto, la primera columna queda con una n y todo ceros debajo. A la derecha de esta primera columna hay: una fila de ceros y debajo una matriz $(n-1)\times(n-1)$ parecida a la anterior, con la propiedad de que: en la primera columna, el pivote es n y en la fila que corresponde a ese n, todo lo demás son ceros. Esto es lo que hace que todo vaya igual: el pivote es n, hay que llevarlo a la diagonal, se hacen 0 debajo y el resto no cambia... En fin, la matriz final U es una matriz diagonal con n en todos los elementos no nulos. Es decir:

$$U = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Se considera la convolución de las imágenes de 800×600 píxeles cuyo núcleo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respóndase a las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es la dimensión del espacio original de la convolución? [0.25]
(2) ¿Cuál es el tamaño de la matriz de la convolución? [0.5]
(3) ¿Cuántos elementos distintos de cero hay en cada fila de la matriz? [0.25]

Solución. Esto es memorístico. El espacio original tiene dimension $800\times600 = 480000$, la matriz de la convolución tiene tamaño 480000×480000 y el número de elementos no nulos en cada fila es el de elementos no nulos del núcleo: 8, en este caso. □

Ejercicio 6 (2 puntos (1+1))**.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

explíquese:

(1) ¿Qué matriz M hay que utilizar para que al multiplicar $M \times A$ se realice el paso siguiente (el que tocaría hacer) de Gauss *sin pivotaje*? Solo hacer un 0, no toda la columna.

(2) Sin tener en cuenta el apartado anterior: hacer ceros en la segunda columna *utilizando pivotaje parcial*.

Solución. La matriz M es la del multiplicador, en este caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda parte solo la enuncio: hay que intercambiar filas 2 y 3, y luego hacer $F_3 + 1/2F_2$, $F_4 - 1/4F_2$. □