Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.
Tiempo: ***Dos horas y media***

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Dos partes:

(1) Enunciar con precisión el algoritmo de **Newton-Raphson** (1 punto).

(2) Si se usara el algoritmo de $\boxed{\textbf{bisección}}$ (**NO HACERLO!!!**) para calcular $\sqrt[3]{2}$ comenzando en el intervalo $[0,5]$, ¿en cuántos pasos puedes garantizar que el error es menor que 10^{-6}? Ten en cuenta que $2^{19} < 10^6 < 2^{20}$ (1 punto).

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide: Calcular las matrices L y U de la factorización LU de A.
IMPORTANTE: indicar en cada momento qué acción se realiza y por qué salen dichas matrices.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Calcular los valores de a, b y c para que los siguientes polinomios formen un spline cúbico con $P(x)$ definido en $[0,1]$ y $Q(x)$ en $[1,2]$:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1, \;\; Q(x) = cx^3 - x^2 + x - 1$$

Ejercicio 4 (1 punto)**.** La siguiente tabla muestra los valores $v(t)$ de un experimento en unos tiempos determinados. Se sabe que la ley física que describe dicho proceso es $v(t) = A\sin(\pi t) + B\cos(\pi t) + Ct$.

t	$v(t)$
1	1.01
1.5	4.48
2	14.02
7	31.01
8	43.98

Se pide: expresar (explicando por qué se hace así) el sistema de ecuaciones necesario para calcular, utilizando mínimos cuadrados lineales, los valores A, B, C que mejor aproximen dicha tabla.
Nota. Si aparece un producto de matrices **no hay que hacerlo**, dejarlo planteado.

Ejercicio 5 (1 punto (0.5 + 0.5))**.** Dos partes.
Parte 1: Calcular de manera aproximada la siguiente integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos iguales:

$$\int_0^{4\pi} \sin^2(x)\, dx.$$

Parte 2: Explicar si es una buena aproximación (y por qué).

Ejercicio 6 (2 puntos)**.** Utilizar el método de Heun para calcular la solución aproximada del siguiente problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x + y + t & y(0) = 0 \end{cases}$$

para $t \in [0,1]$, con *un solo paso.*