Examen Final de métodos numéricos — 14 de mayo de 2019

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas***

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1))**.** Se sabe que $10.2^4 < 11.000$ y que $10.3^4 > 11.000$. Calcular, utilizando *dos pasos* del algoritmo de Newton-Raphson, una aproximación a $\sqrt[4]{11.000}$. ¿Cuántos pasos hacen falta para obtener 8 cifas *decimales* exactas?

Ejercicio 2 (2 puntos (1+1))**.** Se considera la matriz de tamaño $n \times n$ siguiente (se pone al lado de la tamaño 5 para facilitar la comprensión):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} ; \quad \text{para}\, n = 5 \,\text{queda} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(1) Calcular la descomposición LU de la matriz M (la de tamaño n).

(2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Se quiere construir un spline cúbico para una lista de 3 puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Escribir (explicando de dónde salen) las ecuaciones que se obtienen al considerar *solo las condiciones en* (x_2, y_2).

Ejercicio 4 (3 puntos (1.5+1.5))**.** Realizar dos pasos del algoritmo de Euler para el problema de condición inicial:

$$y' = x + y, \;\; y(0) = 0$$

con $h = 1$. Hacer lo mismo *pero solo un paso* con el algoritmo de Heun.

Ejercicio 5 (1 punto (0.5+0.5))**.** Calcular un valor aproximado de la integral siguiente

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - (x^2 - 1)^2 \, dx,$$

utilizando el método de Simpson *simple*.

Explicar si el resultado parece razonable o no, *sin calcular la integral*. Si no es rzonable, decir cómo se podría arreglar.

Ejercicio 6 (1 punto (0.5+0.5))**.** Se quiere aproximar una nube de 5 puntos (x_i, y_i) utilizando el método de mínimos cuadrados con una función del tipo $f(x) = a + b\cos(x) + c\,\mathrm{sen}(x)$. Se pide contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es el tamaño de la matriz X a partir de la cual se calcula el sistema de ecuaciones necesario?

(2) ¿Cuál es el tamaño del sistema de ecuaciones final que se ha de resolver?

SEGUNDO PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS — 14 DE MAYO DE 2019

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: una hora y media

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1)). Se quiere construir un spline cúbico para una lista de 3 puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) que aproxime una función periódica (por lo tanto, se supone que $y_3 = y_1$). Para ello, se pide que la derivada del spline en x_1 sea la misma que en x_3 y que lo mismo pase con la derivada segunda (este spline se llama *periódico*). Se pide:

(1) Escribir (explicando de dónde salen) las ecuaciones que se obtienen al considerar las condiciones en (x_2, y_2).

(2) Lo mismo para las condiciones sobre la derivada y derivada segunda en los puntos (x_1, y_1) y (x_3, y_3).

Ejercicio 2 (1 punto (0.5+0.5)). Se quiere aproximar una nube de 5 puntos (x_i, y_i) utilizando el método de mínimos cuadrados con una función del tipo $f(x) = a + b\cos(x) + c\,\mathrm{sen}(x)$. Se pide contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es el tamaño de la matriz X a partir de la cual se calcula el sistema de ecuaciones necesario?

(2) ¿Cuál es el tamaño del sistema de ecuaciones final que se ha de resolver?

Ejercicio 3 (4 puntos (2+2)). Realizar dos pasos del algoritmo de Euler para el problema de condición inicial:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

con $h = 1$. Hacer lo mismo *pero solo un paso* con el algoritmo de Heun.

Ejercicio 4 (2 puntos (1+1)). Calcular un valor aproximado de la integral siguiente

$$\int 1 - (x^2 - 1)^2\, dx,$$

utilizando el método de Simpson *simple*.

Explicar si te parece razonable o no, *sin calcular la integral*. Si no es rzonable, decir cómo se podría arreglar.

Ejercicio 5 (1 punto). ¿Puede ocurrir que la fórmula del punto medio simple dé una aproximación mejor a la integral de una función $f(x)$ que la fórmula del trapecio simple? Explicar cuándo o por qué.