

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: Dos horas

Ejercicio 1 (2 puntos (1.5+0.5)). Enunciar con precisión el algoritmo de Newton-Raphson.

Se han realizado 10 pasos de dicho algoritmo para una función $f(x)$. Se ha obtenido que $x_9 = 1.01234$ y $x_{10} = 1.012345$. ¿Se puede asegurar que hay una raíz exacta de $f(x)$ con valor aproximado 1.0123? ¿Hay alguna condición sobre $f(x)$ que lo pueda garantizar?

Ejercicio 2 (2 puntos (1+1)). Después de varios pasos del algoritmo de Gauss (con pivotaje parcial) se ha llegado a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- (1) Continuar con el algoritmo de Gauss con pivotaje parcial hasta terminar la tercera columna.
- (2) La matriz L de la descomposición $A = LU$ es, obviamente, de la siguiente forma (donde las * indican un valor desconocido). ¿Cuánto vale x necesariamente?

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & x & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (1 punto). ¿Puede ocurrir que el polinomio interpolador de Lagrange de una nube de 5 puntos tenga grado 1? Poner un ejemplo si es posible o explicar por qué, si no.

Ejercicio 4 (3 puntos (1.5+1.5)). Enunciar con precisión el algoritmo de Heun para problemas de condición inicial de ecuaciones diferenciales.

Aplicar dos pasos ($h = 1$) del algoritmo de Euler al problema de condición inicial:

$$y' = x + y, \quad y(1) = 2.$$

Ejercicio 5 (1 punto (0.5+0.5)). Calcúlese, utilizando la regla de Simpson y la fórmula del punto medio:

$$\int_{-1.3}^{1.3} (x^2(x^2 - 1) + 1) dx.$$

Se sabe que la integral es aproximadamente 2.62. Explíquese lo que pasa.

Ejercicio 6 (1 punto). Plantear (**no resolver**) el sistema de ecuaciones necesario para solucionar el siguiente problema. La tabla que sigue muestra los valores experimentales de la altura $h(t)$ tomados en diferentes instantes t para un cuerpo que cae *sin rozamiento*. ¿Cómo se calcularían los valores aproximados de la altura inicial, la velocidad inicial y la aceleración de la gravedad?

t	1	2	3	4
$h(t)$	98.0	86.4	64.9	33.5