Examen Final de métodos numéricos — 13 de junio de 2022

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: *Dos horas*

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1))**.** Se sabe que $10.3^3 < 1.100$ y que $10.4^3 > 1.100$. Calcular, utilizando *dos pasos* del algoritmo de Newton-Raphson, una aproximación a $\sqrt[3]{1.100}$. ¿Cuántos pasos hacen falta como mínimo para garantizar que se obtienen 8 cifras exactas *después del punto decimal*?

Ejercicio 2 (2 puntos (1+1))**.** Se considera la matriz de tamaño $n \times n$ siguiente (se pone al lado de la tamaño 5 para facilitar la comprensión):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}; \quad \text{para}\, n = 5\, \text{queda}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(1) Calcular la descomposición LU de la matriz M (la de tamaño n).

(2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Plantear el sistema de ecuaciones necesario para calcular el spline cúbico correspondiente a la lista de 3 puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, con las condiciones $P_0''(0) = 0$, $P_1''(2) = 0$, donde $P_0(x)$ y $P_1(x)$ son los polinomios correspondientes al spline. **No resolver el sistema**.

Ejercicio 4 (3 puntos (1.5+1.5))**.** Realizar dos pasos del algoritmo de Euler para el problema de condición inicial:

$$y' = x + 2y - 1, \;\; y(0) = 0$$

con $h = 1$. Hacer lo mismo *pero solo un paso* con el algoritmo de Heun.

Ejercicio 5 (1 punto (0.5+0.5))**.** Calcular un valor aproximado de la integral siguiente

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - (x^2 - 1)^2 \, dx,$$

utilizando el método de Simpson *simple*.

Explicar si el resultado parece razonable o no, *sin calcular la integral*. Si no es rzonable, decir cómo se podría arreglar.

Ejercicio 6 (1 punto (0.5+0.5))**.** Se quiere aproximar una nube de 15 puntos (x_i, y_i) utilizando el método de mínimos cuadrados con una función del tipo $f(x) = a + b\cos(x) + c\,\mathrm{sen}(x)$. Se pide contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:

(1) ¿Cuál es el tamaño del sistema de ecuaciones final que se ha de resolver?

(2) La matriz de coeficientes A del sistema se puede calcular como $A = X \cdot X^T$, para determinada matriz X. ¿Qué tamaño tiene X?

Examen Final de métodos numéricos — 13 de junio de 2022

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas***

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Se quieren calcular las raíces de la función $f(x) = x^4 - 2$ en el intervalo $[0, 2]$. ¿Cómo se utilizaría el método de bisección para este problema?

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Hacer *dos pasos* del método de Newton-Raphson para calcular la solución de la ecuación $e^x = x^3$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Considérese la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide: realizar el algoritmo de Gauss *con pivotaje parcial*, indicando todos los detalles.

Ejercicio 4 (1 punto)**.** La matriz L correspondiente a la aplicación del método de Gauss para una determinada matriz A ha sido

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se ha realizado el método con pivotaje parcial?

Ejercicio 5 (2 puntos (1 + 1))**.** Se considera la nube de puntos

x	1	2	3
y	0	1	2

Se pide:

(1) Escribir las ecuaciones necesarias para que dos polinomios $P_0(x)$ y $P_1(x)$ formen un spline cúbico que pasa por ellos.

(2) ¿Puedes dar un ejemplo de spline cúbico que pase por dichos puntos *sin utilizar dichas ecuaciones*?

Ejercicio 6 (2 puntos (1+1))**.** Dada la integral

$$\int_0^2 2^x \, dx$$

Se pide:

(1) Calcular el valor de dicha integral utilizando los métodos del punto medio y de Simpson *simples*.

(2) Lo mismo pero con los métodos compuestos usando dos intervalos iguales.

Ejercicio 7 (2 puntos (1+1))**.** Dado el problema de condición inicial

$$x''(t) = t + x(t) - x'(t), \; x(0) = 1, \; x'(0) = 0$$

Se pide:

(1) Hacer *dos* pasos del algoritmo de Euler con $h = 1$.

(2) Hacer *un* paso de algoritmo de Heun.