Final Extra de Métodos Numéricos, grupo F — 6 de julio de 2020

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas y media***

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1))**.** Calcular, utilizando dos pasos del algoritmo de Newton-Raphson, el radio de una esfera cuyo volumen sea π (centímetros cúbicos). ¿Cuántos pasos hacen falta para asegurar que el error absoluto sea menor que 10^{-10}?

Ejercicio 2 (1 punto (0.5+0.5))**.** Se parte de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se intenta realizar el algoritmo de Gauss *con pivotaje parcial* y resulta que aparece un 0 en la diagonal. Responder razonadamente:

(1) ¿Quiere esto decir que el sistema es incompatible?
(2) ¿Qué se puede decir de la columna en que aparece dicho 0?

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** La descomposición LU de una matriz A ha dado como U la siguiente matriz:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Se sabe que la primera columna de L está llena de 1. ¿Qué valores de A se pueden conocer con certeza?

Ejercicio 4 (1 punto)**.** La siguiente nube de puntos proviene de un experimento en que se deja caer *a velocidad inicial* 0 un objeto desde una altura H (desconocida), para intentar conocer la aceleración de la gravedad g. Los datos son: tiempo que ha pasado desde el lanzamiento (t), altura a la que está el objeto (h). Plantear (*no resolver*) el sistema de ecuaciones que trata de ajustar esos datos a la fórmula adecuada.
Nota: si aparece una multiplicación de matrices, *no hace falta calcularla* (no liarse).

t	1	2	3	4	5
h	198.80	195.99	190.21	183.66	172.68

Ejercicio 5 (1 punto)**.** ¿Es posible que existan a y b para los que los siguientes polinomios formen un spline cúbico para la nube $(0,0), (2,3), (5,6)$?

$$P(x) = x - 2x^2 + ax^3, \;\; Q(x) = 3 + (x-2) + (x-2)^2 + b(x-2)^3$$

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular el valor aproximado de la siguiente integral utilizando la regla de Simpson compuesta con dos subintervalos:

$$\int_0^4 x^3 - x^2 \, dx$$

Ejercicio 7 (2 puntos (1+1))**.** Dos partes:

- Enunciar con precisión el método de Heun para problemas de condición inicial de una variable.
- Aplicar *un paso* de dicho método al problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 2 \end{cases}$$

con paso $h = 1$.