Parcial 1 de métodos numéricos — 11 de marzo de 2020

**Importante:** el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

**Tiempo:** ***Dos horas***

---

**Ejercicio 1** (1 punto)**.** El cuentakilómetros de una bicicleta calcula la distancia recorrida computando el número de vueltas de la rueda, usando como aproximación $\pi \simeq 3.1$. Un amigo nos dice que es importante utilizar $\pi \simeq 3.14$ al menos. Se sabe que el diámetro de la rueda (por la presión, desgaste, etc.) es 0.8m$\pm$0.02m. ¿Tiene razón nuestro amigo?

**Solución.** Por extraño que parezca, este era el ejercicio más difícil. Lo importante es darse cuenta de que *no se pueden comparar cantidades que no corresponden al mismo concepto* (en román paladino, no se pueden mezclar peras y manzanas).

Lo único que se puede comparar aquí es el error relativo cometido (que mide "cuánto se equivoca cada uno"). Nosotros nos equivocamos, al usar 3.1 en lugar de 3.141592 en

$$E_\pi \simeq \frac{0.041592}{3.141592} \simeq 0.013 = 1.3\%$$

mientras que el error que se puede cometer (y sobre el que no se tiene ninguna información) al medir el radio de la bicicleta es, por lo general:

$$E_r = \frac{0.02}{0.8} = 0.025 = 2.5\%$$

así que, hagamos lo que hagamos, mejorar la precisión de $\pi$ no sirve para nada mientras no tengamos una medida más precisa de la longitud de la rueda.

**Ejercicio 2** (4 puntos (2+2))**.** Se quiere calcular el punto de corte de las gráficas de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, utilizando el algoritmo de Newton-Raphson. Sea $r$ la coordenada $x$ de dicho punto de corte. Utilizando la semilla $x_0 = 1/2$:

(1) Calcular $x_1$,

(2) Sin calcular $x_2$, ¿puede asegurarse de alguna manera que $|x_2 - r| < 0.001$?

**Solución.** Lo primero necesario es plantear el problema de manera razonable (con una función sencilla). Se trata de resolver

$$\frac{1}{1+x^2} = 2x,$$

lo cual es más fácil poner como

$$2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Tomemos $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$, cuya derivada es $f'(x) = 6x^2 + 2$. El algoritmo de Newton es

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Como nos dicen que $x_0 = \frac{1}{2}$, queda

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1/4 + 1 - 1}{6/4 + 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \simeq 0.42857.$$

Con esto queda contestada la primera pregunta.

Para la segunda, necesitamos $f''(x) = 12x$. Tanto $f'(x)$ como $f''(x)$ son crecientes en el intervalo 0.4285. Calculemos $f(0.42) = -0.01 < 0$, mientras que $f(0.42857) > 0$. Por un lado, $f''(x)$ es menor que $f''(0.42875) = 5.1428$; por otro, $f'(x)$ es mayor que $f'(0.42) = 3.0584$. Así pues, dado que la anchura de $[0.42, 0.42857]$ es 0.00857, nos queda que

$$|x_2 - r| \leq \frac{5.1428}{3.0584}|x_1 - r|^2 \leq 1.69 \cdot 0.0085^2 < 0.0001,$$

por lo que sí se puede asegurar.

La segunda parte de este ejercicio es el segundo ejercicio más difícil del examen. La primera debería ser bien conocida, pero hay que plantearla lo más fácilmente posible.

**Ejercicio 3** (1 punto (0.5+0.5))**.** ¿De qué dimensión es el espacio vectorial que representa las imágenes de tamaño $800 \times 600$ en escala de grises? Se considera, en dicho espacio, la convolución con núcleo:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿Cuántos elementos distintos de 0 hay en cada fila de la matriz correspondiente a dicha convolución?

**Solución.** El espacio vectorial es el de las imágenes de $800 \times 600$ píxeles, que tiene dimensión $800 \times 600 = 480000$.

El número de elementos distintos de cero es el de elementos del núcleo distintos de cero. Como nos lo dan explícitamente, podemos decir el valor exacto: 4.

**Ejercicio 4** (2 puntos)**.** Enunciar con precisión el algoritmo de Gauss *sin pivotaje.*

**Solución.** Está en los apuntes.

**Ejercicio 5** (1 punto)**.** Se quiere calcular la factorización $LU$ de una matriz usando el algoritmo de Gauss. En un momento dado, hay que realizar la operación siguiente: sustituir la fila 7 por la fila 7 menos 0.5 veces la fila 2. ¿Qué puedes decir sobre algún elemento de $L$?

**Solución.** El elemento $l_{72}$ (el de la fila 7, columna 2 es 0.5).

**Ejercicio 6** (1 punto)**.** Se ha calculado la descomposición $LU$ de una matriz $A$ y ha quedado:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde los $*$ son números cualesquiera. Dar un ejemplo de matriz $A$ para la que dicha factorización sea posible.

**Solución.** Cuando se tiene la posibilidad de elegir, elíjase lo más sencillo siempre. En este caso, se sabe que $A = L \cdot U$ y se nos da $U$. Nada impide que $L$ sea la matriz identidad, así que sirve, por ejemplo $A = U$.