Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.

Tiempo: ***Dos horas y media***

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Un mercader tiene 3 pesas de 333 gramos cada una y las utiliza para pesar kilogramos (usando 3 pesas por kilogramo). Vende fabes a 10 euros el kg. Si vende 7 kilos, ¿qué error absoluto y relativo está cometiendo al cobrarlas?

Solución. Comete un error de 1 gramo por kilogramo. Como el precio es proporcional al peso, también el error es de 0.001 euros por cada euro (regla de tres, lo que estoy diciendo es que el error relativo es de 1 milésima). Si vende 7 kilos, cobra $7 \times 10 = 70$ euros pero en realidad debería cobrar $7 \times 9.99 = 69.93$. El error absoluto es (obviamente) 7 céntimos y el relativo no depende de factores, así que siempre es de 1 milésima. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Dos partes:

(1) Enunciar con precisión el algoritmo de Bisección. (1 punto).
(2) ¿Cómo utilizarías dicho algoritmo para calcular $\sqrt[3]{3}$? Según tu elección, ¿en cuántos pasos puedes garantizar que el error el menor que 10^{-5}? (1 punto).

Solución. La primera parte es de memoria.

La segunda parte: lo más sencillo es ver que $1^3 < 3$ y $2^3 > 3$, así que el intervalo $[1, 2]$ me sirve si utilizo la función $f(x) = x^3 - 3$. Si tomo una tolerancia de 10^{-5}, los pasos necesarios se calculan resolviendo

$$\frac{2-1}{2^n} < 10^{-5},$$

así que $2^n > 10^5$, lo que exige que n se al menos 15 ($2^{14} = 8192$, mientras que $2^{15} = 16384$). □

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Considérese la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Se pide: realizar el algoritmo de reducción de Gauss *con pivotaje parcial* para obtener una matriz triangular superior **indicando qué operación se realiza en cada paso**.

Solución. Lo indico:

(1) Intercambiar filas 2 y 4 porque el pivote ha de ser 4.
(2) Sustituir $F_4 \leftarrow F_4 - \frac{1}{2}F_2$.
(3) Ahora no hay que intercambiar nada y se sutituye $F_4 \leftarrow F_4 - \frac{1}{5}F_3$ (el 10 ha quedado como pivote en la fila 3 y debajo ha quedado un 2) y se termina.

□

Ejercicio 4 (2 puntos (1 + 1))**.** Responder razonadamente: ¿Es posible que los polinomios $P_0(x) = ax^3$ y $P_1(x) = x^3 - 2x + b$ formen un spline cúbico para la nube de puntos siguiente ($P_0(x)$ para el intervalo $[0, 1]$ y $P_1(x)$ para el $[1, 2]$)? La respuesta puede depender de a y b (1 punto).

x	0	1	2
y	0	-1	4

Solución. Se trata de ver si se pueden cumplir las condiciones de Spline. Veamos: $P_0(0) = 0$ siempre, así que no sirve de nada. $P_0(1) = a = -1$, así que $a = -1$. Por otro lado, $P_1(1) = -1 + b = 1$, así que $b = 2$.

Pero ahora $P_0'(1) = 3a$ ha de ser igual a $P_1'(1) = 3 - 2 = 1$, por lo que $a = 1/3$, lo que contradice que $a = -1$. Es imposible que formen un spline. □

Ejercicio 5 (1 punto = 0.5+0.5)**.** El movimiento armónico simple de frecuencia 1 puede describirse como $x(t) = a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t)$, donde a y b son constantes.

t	x
0	3
0.1	1.34
0.3	-2.75
0.4	-3.51

- Expresar el sistema de ecuaciones necesario para calcular, utilizando mínimos cuadrados lineales, los valores que mejor aproximen las constantes a y b (0.5 puntos).
- Si hubiera 200 datos en la tabla, ¿de qué tamaño sería el sistema de ecuaciones que se obtiene? (0.5 puntos).

Nota. Si aparece un producto de matrices **no hay que hacerlo**, dejarlo planteado.

Solución. Para la primera parte, ha de construirse la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0.2\pi) & \cos(0.6\pi) & \cos(0.8\pi) \\ \sin(0) & \sin(0.2\pi) & \sin(0.6\pi) & sin(0.8\pi) \end{pmatrix}$$

y el vector columna

$$\overline{Y} = X \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1.34 \\ -2.75 \\ -3.51 \end{pmatrix}$$

y el sistema que se ha de resolver es:

$$X \cdot X^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \overline{Y}.$$

La segunda parte: da igual el tamaño de la nube. Solo hay que calcular dos coeficientes, así que el sistema será 2×2. □

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular de manera aproximada la siguiente integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos iguales:

$$\int_0^4 3^x \, dx.$$

Solución. Dos subintervalos nos dan: $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$, ambos de anchura 2. Hay que evaluar $f(x) = 3^x$ en los siguientes puntos:

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27, f(4) = 81$$

y la fórmula compuesta nos da que la integral, llamémosla I, es aproximadamente

$$I \simeq \frac{2}{6}(1 + 4 \cdot 3 + 9) + \frac{2}{6}(9 + 4 \cdot 27 + 81)$$

que será lo que sea (alrededor de 70, creo). □

Ejercicio 7 (2 puntos)**.** Utilizar el método de Heun para calcular la solución aproximada del siguiente problema de condición inicial:

$$x''(t) = t + x(t) + x'(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$$

para $t \in [0, 1]$, con *un solo paso.*

Solución. Como siempre, hay que ir con cuidado. Lo primero es escribir el problema con dos variables:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = t + x + u \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $u(0) = -1$. Como solo hay un paso, $h = 1 - 0 = 1$. Hacemos una tabla para no liarnos.

i	t_i	x_i	u_i	$p_{e,x}$	$p_{e,u}$	x_e	u_e	$p_{f,x}$	$p_{f,u}$	$p_{m,x}$	$p_{m,u}$
0	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0

De manera que $x_1 = 1 + 1 \cdot -1 = 0$, $u_1 = -1 + 1 \cdot 0 = -1$. El único problema es darse cuenta de que para calcular $p_{f,x}$ y $p_{f,u}$ *hay que poner* $t = 1$. $\square$

Importante: el método de resolución y las explicaciones influyen en la nota.
Tiempo: ***Una hora y media***

Ejercicio 1 (2 puntos (1+1))**.** Dos partes:

(1) Responder razonadamente. ¿Es posible que los polinomios $P_0(x) = ax + bx^2$ y $P_1(x) = x^3 - 2x$ formen un spline cúbico para la nube de puntos siguiente ($P_0(x)$ para el intervalo $[0, 1]$ y $P_1(x)$ para el $[1, 2]$)? Obviamente, la respuesta depende de a y b. (1 punto).

x	y
0	0
1	-1
2	4

(2) Calcular el valor en $x = 3$ de la interpolación lineal a trozos de la nube de puntos: $(-1, 2), (0, 1), (1, -1), (2, 4)$ (1 punto).

Solución. Hay que ir escribiendo las condiciones y ver el sistema que resulta.

(1) $P_0(0) = 0$, es decir: $0 = 0$ (nada).
(2) $P_0(1) = -1$, es decir: $-a + b = -1$.
(3) $P_1(1) = -1$, es decir: $-1 = -1$ (nada).
(4) $P_1(2) = 4$, es decir: $4 = 4$ (nada).
(5) $P_0'(1) = P_1'(1)$, es decir: $a + 2b = 1$.
(6) $P_0''(1) = P_1''(1)$, es decir: $2b = 6$, por lo que $b = 1/3$.

De donde $-a + 1/3 = -1$ y $a + 2/3 = 1$, así que $a = 2/3$ y $a = 1/3$, imposible. No pueden formarlo.

La respuesta a la segunda: no se puede hacer porque 3 está fuera del intervalo de interpolación. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Se tiene la siguiente tabla de distancias recorridas por un vehículo que se sabe sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

t	d
3	51
4	81
5	120
10	435
20	1664

- Si se sabe que la velocidad inicial es 0, ¿de qué tamaño queda el sistema de ecuaciones necesario para calcular la posición inicial y la aceleración utilizando mínimos cuadrados lineales? (1 punto).
- Si, por el contrario, se sabe que la posición inicial es $d = 20$, ¿cómo se calcularían la velocidad inicial y la aceleración por mínimos cuadrados? (Explicar lo que se haría, no hace falta "echar cuentas") (1 punto).

Solución. Como nos dicen que $v_0 = 0$, la fórmula es $d = d_0 + \frac{a}{2}t^2$ y solo hay dos funciones $f_1(t) = 1$ y $f_2(t) = t^2$, así que el sistema es 2×2.

Para resolver ese problema, hay que encontrar los parámetros que ajusten la fórmula $20 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ pero para convertir esto en un problema de mínimos cuadrados lo que se necesita es *restar 20 a los valores de d de la tabla y hacer el ajuste de la nueva tabla con la expresión* $v_0 t + \frac{a}{2}t^2$. □

Ejercicio 3 (2 puntos (1+1))**.** Dos partes:

(1) ¿Puede ocurrir que la fórmula del punto medio dé un resultado mejor que la fórmula de Simpson al calcular una integral de manera aproximada? Explicar la respuesta (1 punto).

(2) (1 punto) Calcular de manera aproximada la siguiente integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos iguales:

$$\int_0^4 3^x\,dx.$$

Solución. Sí puede pasar pero la función tiene que parecerse mucho a un rectángulo. Como nadie ha dicho que tenga que ser continua, la siguiente función tiene integral exacta mediante el punto medio pero no mediante Simpson:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

De todos modos, cualquier función que "se parezca mucho más a un rectángulo que a una parábola" tendrá dicha propiedad.

Dos subintervalos nos dan: $I_1 = [0,2]$, $I_2 = [2,4]$, ambos de anchura 2. Hay que evaluar $f(x) = 3^x$ en los siguientes puntos:

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 27, f(4) = 81$$

y la fórmula compuesta nos da que la integral, llamémosla I, es aproximadamente

$$I \simeq \frac{2}{6}(1 + 4\cdot 3 + 9) + \frac{2}{6}(9 + 4\cdot 27 + 81)$$

que será lo que sea (alrededor de 70, creo). □

Ejercicio 4 (4 puntos (2+2)). Dos partes:

(1) Utilizar el método de Heun para calcular la solución aproximada del siguiente problema de condición inicial:

$$x''(t) = t + x(t) + x'(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$$

para $t \in [0,1]$, con *un solo paso.*

(2) Utilizar el método de Euler con dos pasos para calcular de manera aproximada el valor en $t = 2$ de la solución del problema de condición inicial siguiente:

$$y'(x) = x^2 + y,\ y(0) = 2.$$

Solución. Para la primera parte, como siempre, hay que ir con cuidado. Lo primero es escribir el problema con dos variables:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = t + x + u \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $u(0) = -1$. Como solo hay un paso, $h = 1 - 0 = 1$. Hacemos una tabla para no liarnos.

i	t_i	x_i	u_i	$p_{e,x}$	$p_{e,u}$	x_e	u_e	$p_{f,x}$	$p_{f,u}$	$p_{m,x}$	$p_{m,u}$
0	0	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0

De manera que $x_1 = 1 + 1\cdot -1 = 0$, $u_1 = -1 + 1\cdot 0 = -1$. El único problema es darse cuenta de que para calcular $p_{f,x}$ y $p_{f,u}$ *hay que poner* $t = 1$.

La segunda parte es mucho más sencilla. El paso es 1 porque el intervalo es $[0,2]$ y nos dicen que hay dos pasos. La función de la pendiente es $f(x,y) = x^2 + y$, claro. Cada $y_{i+1} = y_i + h \cdot p_i$, que se marcan con un cuadro.

i	x_i	y_i	p_i
0	0	2	2
1	1	$\boxed{4}$	5
2	2	$\boxed{9}$	.

□