

Apéndice E

Algunos problemas más de Álgebra Lineal

Ejercicio 1. Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

(que es una matriz *tridiagonal* cada una de cuyas diagonales no nulas contiene un solo elemento). Descríbase la estructura de las matrices L y U de la factorización LU : ¿son todos los elementos de la diagonal principal de U iguales? ¿qué elementos debajo de la diagonal de L son diferentes de 0? ¿Son todos ellos iguales?

Ejercicio 2. Se ha realizado la factorización LU de una matriz A y se han obtenido las siguientes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Resuélvase, utilizando L y U , el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y calcúlese, si es posible, la matriz A .

Ejercicio 3. ¿Es posible que la siguiente matriz aparezca como la L final de un proceso de factorización LUP (i.e. con pivotaje parcial)?

¿por qué?

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0.3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué consecuencia se obtiene, en general?