En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** Una semiesfera sólida de densidad constante (la semiesfera "norte") quiere cortarse por un plano horizontal de manera que el centro de masas de la parte inferior quede a un tercio de su altura. Se pide:

- Calcular a qué altura ha de realizarse el corte.
- Calcular el momento de inercia de la parte inferior respecto del eje de simetría (el que va de Norte a Sur).

Solución. Este problema es más sencillo en cilíndricas que en esféricas. Las coordenadas cilíndricas son

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad |J(\Phi)| = r.$$

El conjunto es de revolución, así que $\theta \in [0, 2\pi]$, la altura es justamente lo que ha de calcularse, así que, si llamamos h a la tal altura, $z \in [0, h]$. Finalmente, una esfera (que suponemos de radio R) es el conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leq R$, que en cilíndricas se traduce a $r^2 + z^2 \leq R$, así que $r \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$. Necesitamos calcular la masa de este conjunto S (digamos que la densidad es ρ):

$$M = \int_S \rho\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho r\, drdzd\theta = \frac{h(3R^2 - h^2)\pi\rho}{3}.$$

El centro de masas (en la z) es

$$C_z = \frac{1}{M} \int_S z\rho\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z\rho r\, drdzd\theta = \cdots = h\frac{6R^2 - 3h^2}{12R^2 - 4h^2}.$$

Simplemente hay que resolver $C_z = \frac{1}{3}h$, que da $h = \pm\frac{\sqrt{6}R}{\sqrt{5}}$ ó $h = 0$. La única solución *real* posible es $h = 0$ (las no nulas tienen valor absoluto mayor que R, lo cual es absurdo). El ejercicio termina aquí si *si se especifica que* $h = 0$..

En caso de que se deje la h *como una variable*, el momento de inercia no hay más que calcularlo utilizando su definición:

$$I = \int_S \rho d^2(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho r^2 r\, drdzd\theta =$$
$$= \pi\rho\frac{3h^5 - 10h^3R^2 + 15hR^4}{30}.$$

□

Ejercicio 2 (1.5 puntos por apartado)**.** Una **superficie** metálica se puede describir por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ para } 1 \leq z \leq 2.$$

La densidad es proporcional a la distancia al eje OZ. Se pide:

- Calcular su masa.
- Calcular su densidad media.

Solución. Parametrizamos la superficie, que puede escribirse:

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ para } z \in [1, 2].$$

Si escribimos $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, queda

$$r^2 = z^2$$

que, puesto que $r \geq 0$ y $z > 0$, quiere decir $r = z$. Por tanto, la superficie puede escribirse

$$S \equiv \begin{cases} x = z\cos\theta \\ y = z\sin\theta \qquad z \in [1,2],\ \rho \in [0,2\pi] \\ z = z \end{cases}$$

(puesto que no hay condición alguna sobre θ). El vector normal es

$$d\vec{S} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-z\cos\theta, -z\sin\theta, z)\,,$$

cuyo módulo es (fácilmente) $|d\vec{S}| = \sqrt{2}z$.

La masa (si la densidad es $\rho = kr$, proporcional a la distancia al eje OZ) ahora no es más que

$$M = \int_S \rho(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 kz\sqrt{2}z\,dzd\theta = \frac{7}{3}2\sqrt{2}\pi k.$$

La densidad media es la masa dividida entre el área. El área se calcula de modo análogo:

$$A = \int_S dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 1\sqrt{2}z\,dzd\theta = 3\sqrt{2}\pi.$$

Por tanto, la densidad media es: $14k/9$. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** La curva de ecuación

$$\gamma(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 3\cos t + 3\sin t \\ y(t) = 3\sin t + 3\cos t \qquad \text{para}\, t \in [0,6\pi] \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

describe el movimiento de una partícula. Calcular el trabajo que el campo

$$\vec{X} = \left(x^2, y^2+1, z^2\right)$$

realiza en esa trayectoria.

Solución. Antes de nada, es elemental comprobar que el campo $\vec{X}$ es un gradiente, pues está definido en todo $\mathbb{R}^3$ y sus parciales cruzadas son iguales (de hecho, son nulas todas ellas). Por tanto, parece lógico tratar de calcular su potencial más que el trabajo en esa curva tan rara (que dará lugar a unas cuentas muy raras). Sea $V(x,y,z)$ el potencial de $\vec{X}$. Definimos $V(0,0,0) = 0$ y ahora

$$V(x,y,z) = \int_\gamma \vec{X}d\vec{\gamma}$$

para cualquier curva γ de $(0,0,0)$ a (x,y,z). Tomando γ_1 la que va de $(0,0,0)$ a $(x,0,0)$, γ_2 de $(x,0,0)$ a $(x,y,0)$ y γ_3 de $(x,y,0)$ a (x,y,z), es sencillo calcular

$$V(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + y + \frac{z^3}{3}.$$

La curva cumple que $\gamma(0) = (3,3,0)$, $\gamma(6\pi) = (3,3,12\pi)$. Por tanto:

$$\int_\gamma \vec{X}d\vec{\gamma} = 9 + 9 + 3 + 12^3\pi^3/3 - (9+9).$$

□

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Calcúlese el flujo del campo $\vec{X} = (x, -y, z)$ sobre la superficie curva de un cilindro centrado en el eje OZ, de radio R con $z \in [0, 2]$.

Solución. El cilindro se puede parametrizar como $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = z$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, 2]$. El vector normal es muy sencillo de calcular y da $d\vec{S} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$. El flujo es

$$\int_S \vec{X} d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (R\cos\theta, -R\sin\theta, z)\,(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\; dz d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 R^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\; dz d\theta = 0.$$

Otra manera de resolverlo, sin echar cuentas, es percatarse de que para cada punto en altura z, se anula el flujo en el punto (x, y, z) con el del punto (y, x, z), así que el flujo global ha de ser 0. Pero esto es más difícil de razonar. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Utilizando solo razonamientos geométricos, explicar si el flujo del campo

$$\vec{X} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

sobre la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ es positivo, cero o negativo.

Solución. El campo en cuestión (esto se sabe de clase y no hay más que mirarlo) es tangente a las circunferencias centradas en el origen y no es nulo en ningún punto, así que debe ser siempre tangente en el mismo sentido. Visto que en el punto $(1, 0)$ el campo es $(0, 1)$ ("hacia arriba"), ha de tener la misma dirección que las circunferencias antihorarias, como la del enunciado. Por tanto, el trabajo en esa curva debe ser estrictamente positivo. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** El volumen limitado por el plano $z = 0$ y la ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ quiere cortarse por un plano horizontal de manera que el volumen de la parte inferior sea igual al de la parte superior.

- Calcúlese a qué altura ha de realizarse el corte.
- Calcúlese el centro de masas de la parte inferior suponiendo que la densidad es constante.

Solución. Este paraboloide se parametriza muy fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J(\Phi)| = r.$$

La variable z comienza en 0 y termina en el vértice del paraboloide, que es $z = 1$. Como se tiene que $x^2 + y^2 \leq 1 - z$, resulta que $r \in [0, \sqrt{1-z}]$. Finalmente, como la ecuación del paraboloide cambiada de variables es $r^2 + z = 1$, en la que θ no aparece, es $\theta \in [0, 2\pi]$.

Se pide calcular la altura de un corte, que será h, de manera que el volumen de ambas partes sea igual. Es decir, que el volumen de la parte inferior sea la mitad del volumen del casquete de paraboloide $z \in [0, 1]$. Calculemos primero este volumen (llamamos P al este casquete):

$$V(P) = \int_P 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z}} 1\cdot r\,drdzd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Así que si h es la altura de corte, ha de ser (llamando S a la parte inferior):

$$V(S) = \int_S 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\sqrt{1-z}} 1\cdot r\,drdzd\theta = \frac{\pi}{4}.$$

La integral queda

$$V(S) = \frac{\pi h(2-h)}{2}.$$

Así que hay que resolver la ecuación

$$\frac{\pi h(2-h)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

que da, como única solución posible, $h = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

El centro de masas, puesto que el conjunto es de revolución alrededor del eje OZ *y la densidad es constante*, está en el eje OZ (es decir, $C_x = 0 = C_y$). La masa del sólido, al ser la densidad constante (digamos ρ, es) $\rho\pi/4$. La coordenada C_z es:

$$C_z = \frac{1}{M}\int_S \rho z\,dxdydz = \frac{4}{\rho\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\sqrt{2}/2}\int_0^{\sqrt{1-z}} \rho z r\,drdzd\rho = \frac{(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}}.$$

que es positivo y menor que h (de hecho, menor que la mitad de h), lo cual es bastante razonable dada la forma del conjunto. □

Ejercicio 2 (1.5 puntos por apartado)**.** Un cable de acero de densidad constante sigue la ecuación dada (en ciertas unidades) por

$$\rho = \sin 4\theta \text{ para } \theta \in [0, \pi/4].$$

Se pide

- Calcular la masa del cable.
- Calcular el trabajo del campo $\vec{X} = (1, -y)$ en la curva descrita por el cable.

Nota: Antes de hacer cuentas a lo loco: si $A = a\cos x - b\sin x$ y $B = a\sin x + b\cos x$, entonces $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$. Si sale una integral trigonométrica en el primer apartado, déjese indicada.

Solución. Para calcular la masa, hace falta el vector tangente y su módulo. En cartesianas,

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = \sin 4\theta \cos\theta \\ y = \sin 4\theta \sin\theta \end{cases}$$

así que el vector tangente es

$$\dot{\gamma} \equiv \begin{cases} \dot{x} = 4\cos 4\theta \cos\theta - \sin 4\theta \sin\theta \\ \dot{y} = 4\cos 4\theta \sin\theta + \sin 4\theta \cos\theta \end{cases}$$

cuyo módulo, *utilizando la indicación*, es $|\dot{\gamma}| = \sqrt{16\cos^2\theta + \sin^2\theta}$. La masa es, por tanto, si la densidad es μ,

$$M = \int_\gamma \mu\, d\gamma = \mu \int_0^{\pi/4} \sqrt{16\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta,$$

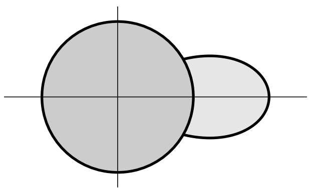
que se deja indicada como dice el enunciado.

El campo es evidentemente irrotacional y, al estar definido en todo $\mathbb{R}^2$, es un gradiente. Como la curva es un lazo (comienza y termina en el origen de coordenadas), el trabajo es 0. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Una plancha metálica plana está compuesta por un disco centrado en el origen, de radio R, de densidad d_1g/cm^2 y la parte exterior al disco del recinto delimitado por la curva

$$\rho = 2R\cos 2\theta,$$

cuya densidad es d_2g/cm^2 (ver la figura inferior). Calcúlese el momento de inercia del objeto respecto del centro del disco. *Nota:* $\int \cos^4 2t\, dt = \frac{1}{64}(\sin 8t - 8\sin 4t + 24t)$.



Solución. Necesitamos calcular los límites para la θ en la parte exterior. Los puntos de corte corresponden a $\rho = R$, así que

$$R = 2R\cos 2\theta,$$

de donde sale que $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$. Con este dato, el momento de inercia es la suma de los momentos de inercia del disco y de la pieza externa (téngase en cuenta que utilizamos coordenadas polares, cuyo jacobiano es r):

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R d_1 r^2 \cdot r\, dr d\theta + \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_R^{2R\cos 2\theta} d_2 r^2 \cdot r\, dr d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2}R^4 d_1 + \frac{7\sqrt{3}^3 + 20\pi}{48}R^4 d_2,$$

la última integral se calcula fácilmente utilizando la indicación. □

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Se sabe que el volumen del tetraedro delimitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$ es $1/6$. Utilizar esta información y el Teorema del Cambio de Variables para calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y con vértices en $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

Solución. Si se realiza el cambio *lineal* de coordenadas

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = a\overline{x} \\ y = b\overline{y} \\ z = c\overline{z} \end{cases}$$

cuyo jacobiano es $|J(\Phi)| = abc$, el plano $x+y+z = 1$ se convierte en el que pasa por los puntos $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ (y los planos coordenados quedan intactos). Así que el volumen del tetraedro T que pasa por esos puntos es

$$V = \int_T 1\, dxdydz = \int_S abc\, d\overline{x}d\overline{y}d\overline{z},$$

donde S es el tetraedro del plano $x + y + z = 1$. Como a, b y c son constantes, el volumen pedido es $abc/6$. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcúlese el flujo del campo $\vec{X} = (-x, -y, -z)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (para $z \in [0, 1]$) utilizando solo razonamientos geométricos.

Solución. La superficie es un cono con vértice en el origen. Esta superficie contiene las rectas que unen cada punto con el origen y el campo de vectores $(-x, -y, -z)$ apunta, para cada punto, en dicha dirección. Así pues, el campo es tangente a la superficie y el flujo es 0. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** Se considera una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden 2 cuyos coeficientes son números reales. Se pide responder a cada pregunta razonadamente:

(1) ¿Puede tener una solución particular de la forma t^3?
(2) ¿Puede tener una solución particular de la forma te^{2t}?

Solución. La ecuación es homogénea. Sus soluciones son combinaciones de las correspondientes al polinomio asociado. Si es de orden 2, la multiplicidad de las raíces es como mucho 2, así que:

(1) No puede tener esa solución porque el polinomio debería tener la raíz 0 con multiplicidad 4.
(2) Sí puede tener esa solución, si el polinomio asociado es $P(T) = (T-2)^2 = T^2 - 4T + 4$, es decir, si la ecuación es $y'' - 4y' + 4y = 0$.

□

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Un campo de vectores en el plano, $\vec{X} = (F, G)$ cumple las siguientes condiciones:

- Está definido en todo el plano menos en $(0,0)$ y en $(1,0)$.
- Se tienen las siguientes igualdades:

$$\int_{\gamma_1} \vec{X}\, d\vec{\gamma} = 1, \quad \int_{\gamma_2} \vec{X}\, d\vec{\gamma} = 2$$

  donde γ_1 es una circunferencia antihoraria centrada en $(0,0)$ y de radio $1/4$ y γ_2 es una circunferencia horaria centrada en $(1,0)$ y de radio $1/4$.

Además, el campo es irrotacional en todos los puntos en que está definido. ¿Cuál es el valor de

$$\int_{\gamma} \vec{X}\, d\vec{\gamma}$$

si γ es una circunferencia antihoraria de centro 0 y radio 100?

Solución. Las dos circunferencias descritas no se cortan ni están una dentro de otra, así que si se considera el conjunto U delimitado por γ en sentido antihorario, $-\gamma_1$ en *sentido horario* y γ_2 en sentido horario, se tiene, por el Teorema de Green (al ser el campo irrotacional), que

$$\int_{\gamma} \vec{X}\, d\gamma + \int_{-\gamma_1} \vec{X}\, d\gamma + \int_{\gamma_2} \vec{X}\, d\gamma_2 = 0.$$

Como cambiar el sentido a una curva cambia el signo de la integral, despejando queda

$$\int_{\gamma} \vec{X}\, d\gamma = -1.$$

□

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** (Para este ejercicio se *exige* explicar de dónde sale la ecuación diferencial que ha de resolverse).

¿Cuánto tiempo tardará en pagarse un préstamo de 10000€ al 5% de interés anual (compuesto en tiempo continuo) si las cuotas son de 500€ mensuales?

(Como se hizo en clase, se supone que las cuotas también se pagan "en tiempo continuo", no mes a mes).

Solución. Si $C(t)$ es el capital que se debe en tiempo t y dt es un instante de tiempo, entonces, por la ley del interés compuesto y descontando las cuotas (que son 6000€ al año), queda

$$C(t+dt) = C(t) + 0.05C(t)dt - 6000dt.$$

De aquí sale

$$C'(t) = 0.05C(t) - 6000.$$

Esta ecuación se resuelve, por ejemplo, haciendo el cambio $u(t) = 0.05C(t) - 6000$, que la transforma en

$$u'(t) = 0.05u(t),$$

cuya solución general es $u(t) = Ce^{0.05t}$. Deshaciendo el cambio, queda

$$C(t) = \frac{Ce^{0.05t} + 6000}{0.05},$$

y como $C(0) = 10000$, sale

$$500 = C + 6000,$$

es decir, $C = -5500$. Por lo tanto:

$$C(t) = \frac{6000 - 5500e^{0.05t}}{0.05}.$$

Para saber en qué momento termina de pagarse, hay que calcular t para que $C(t) = 0$. Es decir,

$$0 = 6000 - 5500e^{0.05t},$$

que da $t = 20\log(12/11)$, más o menos un año y 9 meses. □

Ejercicio 4 (1.5 puntos por apartado)**.** Se lanza un objeto de 0.1kg *hacia arriba* con una velocidad de 1m/s. La aceleración de la gravedad es (en valor absoluto) de 10m/s^2. El rozamiento del aire es proporcional a la velocidad, con constante 0.1kg/s. Se pide:

- *Explicar* cuál es la ecuación diferencial que rige ese movimiento.
- Calcular a qué altura (relativa al punto desde el que se lanza) estará el objeto después de 0.5s.

Solución. Poniendo el origen de coordenadas en el punto desde el que se lanza el objeto y la dirección positiva *hacia arriba*, si $x(t)$ es la posición en el instante t, la fuerza de la gravedad es $F_g = -10 \cdot 0.1$ y la fuerza de rozamiento es $-0.1\dot{x}(t)$. No hay más fuerzas acutando. Por la Segunda Ley de Newton,

$$-1 - 0.1\dot{x}(t) = 0.1\ddot{x}(t),$$

que, pasando todas las $x(t)$ al mismo miembro y dividiendo por la masa se puede escribir como

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -10.$$

Esta ecuación es de orden 2 pero puede pensarse que es de orden 1 para la velocidad, si $v(t) = \dot{x}(t)$:

$$\dot{v}(t) + v(t) = -10,$$

es decir,

$$\dot{v}(t) = -v(t) - 10.$$

Haciendo (como en el ejercicio anterior) el cambio $u(t) = -v(t) - 10$, la ecuación se transforma en

$$\dot{u}(t) = -u(t)$$

cuya solución es $u(t) = Ce^{-t}$. Deshaciendo el cambio,

$$v(t) = -10 - u(t) = -10 - Ce^{-t}.$$

Como la velocidad inicial es positiva e igual a 1,

$$1 = -10 - C,$$

así que $C = -11$. En fin,

$$v(t) = 11e^{-t} - 10.$$

La posición será la integral de esta función teniendo en cuenta que la posición inicial es $x(0) = 0$:

$$x(t) = -11e^{-t} - 10t + K$$

con $x(0) = 0$ queda $K = 11$. Es decir,

$$x(t) = -11e^{-t} - 10t + 11.$$

□

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcular los residuos de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 - z}$$

en los puntos $0, 1, i$.

Solución. La función e^z no se anula nunca, así que no influye en que un punto sea o no polo. Los ceros del denominador son $z = 0$, $z = 1$. Así que en $z = i$ no hay polo y el residuo en ese punto es 0.

El residuo de un polo de orden 1 se calcula simplemente eliminando el factor correspondiente del denominador y calculando el valor de la función. Para $z = 0$,

$$\mathrm{Res}_0(f(z)) = \left[\frac{e^z}{z-1}\right](0) = -1.$$

Mientras que para $z = 1$,

$$\mathrm{Res}_1(f(z)) = \left[\frac{e^z}{z}\right](1) = e.$$

□

Fecha: 15 de diciembre de 2016.

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** Se considera una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que son números reales. Se pide responder a cada pregunta razonadamente:

(1) ¿Qué orden mínimo ha de tener para que posea una solución de la forma t^3e^{3t}?
(2) ¿Qué orden mínimo ha de tener para que posea una solución de la forma $te^t(\cos t - i\sin t)$?

Solución. Todo depende del polinomio asociado.

(1) En este caso, el polinomio asociado debe tener la raíz 3 múltiple para que las funciones e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t} y t^3e^{3t} sean soluciones. Para ello, la raíz debe tener multiplicidad 4 por lo menos, así que el orden de la ecuación ha de ser al menos 4.
(2) En este caso, la raíz $1-i$ (que hace que aparezca el factor $e^t(\cos t - i\sin t)$) debe tener multiplicidad al menos 2 (para que pueda aparecer la t). Como el polinomio asoiado *tiene coeficientes reales*, la única manera de que tenga una raíz compleja es que su conjugada también sea raíz, así que el orden mínimo es el doble de la multiplicidad, es decir, 4.

□

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Se consideran los siguientes campos de vectores planos:

$$X_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),\ \ X_2 = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right).$$

(Son esencialmente el mismo campo, solo que X_2 está “centrado” en $(1,0)$ en lugar de en $(0,0)$, que es donde lo está X_1). Ambos son irrotacionales (no hay que verificarlo).

Se considera el campo $Y = X_1 + X_2$. Calcúlese

$$\int_\gamma Y\, d\gamma$$

si γ es una circunferencia antihoraria de centro $(0,0)$ y radio 10.

Solución. Se tiene que

$$\int_\gamma Y\, d\gamma = \int_\gamma X_1\, d\gamma + \int_\gamma X_2\, d\gamma$$

así que la integral total es la suma de la de cada campo.

Se sabe (esto se ha hecho muchas veces en clase) que

$$\int_{\gamma_\epsilon} X_1\, d\gamma_\epsilon = 2\pi$$

donde γ_ϵ es una circunferencia de radio pequeño centrada en $(0,0)$, antihoraria. El campo X_2 es exactamente igual que X_1 pero centrado en $(1,0)$ así que

$$\int_{\gamma_\delta} X_2\, d\gamma_\delta = 2\pi$$

para γ_δ una circunferencia de radio pequeño antihoraria centrada en $(1,0)$.

Por el Teorema de Green, si U es el dominio limitado por la circunferencia γ_c de centro $(0,0)$ y radio 10 antihoraria y las dos circunferencias γ_ϵ y γ_δ *en sentido horario*, como X_1 y X_2 son irrotacionales,

$$\int_{\gamma_c} Y\, d\gamma_c - \int_{\gamma_\epsilon} Y\, d\gamma_\epsilon - \int_{\gamma_\delta} Y\, d\gamma_\delta = 0,$$

así que la integral pedida es la suma de 2π y 2π, es decir, 4π. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** (Para este ejercicio se *exige* explicar de dónde sale la ecuación diferencial que ha de resolverse).

Calcular la constante de enfriamiento (es decir, la constante que aparece en la ecuación del enfriamiento de Newton) de un objeto si, dejado a 100° en un ambiente que está a 5°, tarda 2s en pasar a 90°.

Solución. La manera de explicar de dónde sale la ecuación diferencial se hizo en clase y debería estar en los apuntes. Si $T(t)$ es la temperatura en un instante t, entonces

$$T(t+dt) = T(t) - k(T(t)-5)dt$$

pues la ley de enfriamiento dice que la temperatura disminuye de manera proporcional al gradiente (en este caso $T(t)-5$). De esa fórmula se deduce que

$$T'(t) = -k(T(t)-5).$$

Para calcular k, se ha de resolver la ecuación. Si se hace

$$u(t) = -k(T(t)-5),$$

entonces la ecuación se transforma en

$$u'(t) = -ku(t),$$

que (esto se sabe) tiene como solución general

$$u(t) = Ce^{-kt}.$$

De aquí, deshaciendo el cambio, queda

$$Ce^{-kt} = -k(T(t)-5),$$

es decir

$$T(t) = 5 - \frac{C}{k}e^{-kt}.$$

La condición inicial es $T(0) = 100$, así que

$$100 = 5 - \frac{C}{k},$$

por lo que $C = -95k$. En fin,

$$T(t) = 5 + 95e^{-kt},$$

y para calcular k no hay más que sustituir la condición $T(2) = 90$,

$$90 = 5 + 95e^{-2k}$$

y resolver. □

Ejercicio 4 (1.5 puntos por apartado)**.** Un muelle (horizontal) que está fijado por un extremo, tiene enganchado en el otro extremo un objeto de 0.1kg. En reposo, el muelle mide 30cm. En la posición de reposo, se imprime al objeto una velocidad de 1m/s de manera que el muelle *se estira*. Hay un rozamiento proporcional a la velocidad, con constante 0.01/s. Se pide:

- *Explicar* cuál es la ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema.

- Calcular la velocidad a la que pasa el objeto por el punto de reposo por primera vez (obviamente, para $t > 0$).

(La constante de Hooke es 0.1kg/s^2).

Solución. El diagrama y la explicación de la ecuación están en los apuntes. Es una sencilla aplicación de la Segunda Ley de Newton, teniendo cuidado de poner que la fuerza de rozamiento *tiene sentido opuesto a la velocidad.* Si se coloca el origen de coordenadas en el punto de reposo del muelle y $x(t)$ es la posición del objeto en el instante t

$$F_H = -0.1x(t)\ F_r = -0.01\dot{x}(t),$$

y no hay más fuerzas. Por tanto, como

$$F_H + F_r = m\ddot{x}(t),$$

la ecuación que queda es

$$-0.1x(t) - 0.01\dot{x}(t) = 0.1\ddot{x}(t)$$

que, llevando todo al mismo miembro y dividiendo por la masa, queda

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Ecuación homogénea. Las raíces del polinomio asociado son

$$\lambda_1 = \frac{-0.1 + \sqrt{0.01 - 4}}{2}, \lambda_2 = \frac{-0.1 - \sqrt{0.01 - 4}}{2},$$

(la parte real es negativa, lo cual indica que la energía del sistema disminuye con el tiempo, algo necesario en este sistema). Llamemos a las soluciones $a + bi$ y $a - bi$. Así que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = C_1e^{at}(\cos bt + i\sin bt) + C_2e^{at}(\cos bt - i\sin bt) = \\ e^{at}\left(C_1(\cos bt + i\sin bt) + C_2(\cos bt - i\sin bt)\right).$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$, así que

$$C_1 + C_2 = 0,\ \ C_1(a + bi) + C_2(a - bi) = 1.$$

De donde

$$C_1 = -\frac{i}{2b},\ \ C_2 = \frac{i}{2b}.$$

Así pues,

$$x(t) = \frac{e^{at}\sin bt}{b}.$$

Para calcular el instante en que vuelve a pasar por la posición de reposo, se plantea $x(0) = 0$ y queda

$$0 = \frac{e^{at}\sin bt}{b}$$

por lo que ha de ser $\sin bt = 0$, así que $t = \frac{\pi}{b}$. La velocidad ahora no es más que sustituir en la derivada de $x(t)$ ese valor de t. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcular los residos de la función

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 + z}$$

en los puntos $0, i, -i$.

Solución. La función es, factorizando,
$$f(z) = \frac{(z+1)(z-1)}{z(z+i)(z-i)},$$
por lo que tiene polos en 0, i y $-i$ y todos son de orden 1. El residuo en 0 es
$$\left[\frac{(z+1)(z-1)}{(z-i)(z+i)}\right](0) = \frac{-1}{1} = -1.$$
El residuo en i es
$$\left[\frac{(z+1)(z-1)}{z(z+i)}\right](i) = \frac{-2}{-2} = 1.$$
El residuo en $-i$ es
$$\left[\frac{(z+1)(z-1)}{z(z-i)}\right](-i) = \frac{-2}{-2} = 1.$$
□

Fecha: 15 de diciembre de 2016.

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Calcular el momento de inercia respecto del eje OZ de la parte de la esfera sólida de radio R y centro el origen que está dentro del conjunto $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}$. Se supone que la densidad es constante, μ.

Solución. Este ejercicio es preferible hacerlo en cilíndricas (o bien utilizando el "Teorema del Jamón de York": Fubini). Despejando en la ecuación de la esfera, queda:

$$|z| \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

que quiere decir que para cada distancia ρ al eje OZ, la variable z está entre $-\sqrt{R^2 - \rho^2}$ y $\sqrt{R^2 - \rho^2}$. Utilizando el cambio a cilíndricas,

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad J(\Phi) = \rho$$

y la fórmula del momento de inercia (la integral del cuadrado de la distancia al eje por la densidad), queda que dicho momento es

$$I = \int_V (x^2 + y^2) \mu \, dxdydz = \int_0^{R/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho^2 \mu \rho \, dzd\theta d\rho$$

que da

$$I = \pi \mu R^5 \frac{2^{7/2} - 7}{15\sqrt{2}}.$$

□

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas del conjunto plano de densidad constante μ, dado por $x \geq 0$, $-1 \leq y \leq 1$ y $x^2 - y^2 \leq 1$. (La integral $\int \sqrt{1 + u^2} \, du$ se puede dejar indicada).

Solución. Por simetrías y por ser la densidad constante, el centro de masas debe estar en el eje OX, así que si $C = (C_x, C_y)$ es dicho centro de masas, $C_y = 0$. La masa del conjunto es

$$M = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1+y^2}} \mu \, dxdy = \mu \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y^2} \, dy$$

que dejamos indicada como se dice. La coordenada C_x es

$$C_x = \frac{1}{M} \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1+y^2}} x\mu \, dxdy = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^{1} \frac{1 + y^2}{2} \, dy = \frac{\mu}{M} \frac{4}{3}.$$

Con esto basta. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Cada punto del cable de ecuación $\rho = e^\theta$ está sometido a una temperatura proporcional al valor de la coordenada x. Calcular la temperatura media del cable, para $\theta \in [0, \pi]$. Se sabe que $\int e^{nt} \cos t \, dt = \frac{e^{nt}(n \cos t + \sin t)}{n^2+1}$.

Solución. Escribiendo la ecuación paramétrica en cartesianas de la curva,

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$$

se obtiene el vector tangente $(\dot{x}, \dot{y}) = (e^\theta(-\sin\theta + \cos\theta), e^\theta(\cos\theta + \sin\theta))$ cuyo módulo es $\sqrt{2}e^\theta$. Por tanto, la "temperatura total" es:

$$T = \int_0^\pi kx\, d\gamma = \int_0^\pi \sqrt{2}ke^\theta \cos\theta e^\theta d\theta = \sqrt{2}k\frac{e^{2t}(2\cos t + \sin t)}{3}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = -\sqrt{2}\frac{2e^{2\pi} + 2e^2}{3}.$$

La longitud de la curva es:

$$L = \int_0^\pi \sqrt{2}e^\theta\, d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$$

y por tanto, la temperatura media es el cociente

$$\frac{T}{L} = -\frac{2k(e^{2\pi} + e^2)}{3(e^\pi - 1)}.$$

□

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la pieza compuesta por un lado, por un arco de amplitud π de la espiral (en el espacio) de radio R y paso a; por otro lado, el segmento que une los extremos de dicho arco de espiral. La espiral tiene densidad constante μ_1 y el segmento μ_2.

Solución. Antes de calcular un centro de masas siempre hay que tener en cuenta las simetrías, etc... Además, la pieza en cuestión está formada por dos partes bien distintas: una la espiral y otra el segmento. Tomemos la espiral, que llamaremos E

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, at), \quad \dot{\gamma}(t) = (-R\sin t, R\cos t, a).$$

Este conjunto E, claramente:

- Al tener densidad constante, tiene el centro de masas en los centros de simetría y de equilibrio de las masas.
- Si se *gira* π radianes respecto del eje $x = 0, z = a\pi/2$, se superpone, así que el centro de masas ha de estar en dicho eje.

Por tanto, solo hay que calcular la coordenada y del centro de masas de E (pues ha de ser $x = 0$ y $z = a\pi/2$), llamémosla C_y^E. Por una lado, la masa de E es

$$M_E = \int_\gamma \mu_1\, d\gamma = \int_0^\pi \mu_1\sqrt{R^2 + a^2}\, dt = \pi\mu_1\sqrt{R^2 + a^2}$$

Así que la coordenada y es

$$C_y^E = \frac{1}{\pi\mu_1\sqrt{R^2 + a^2}}\int_0^\pi R\sin t\sqrt{R^2 + a^2}\, dt = \frac{2\mu_1\sqrt{R^2 + a^2}}{\pi\mu_1\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Por tanto, $C_E = (0, \frac{2}{\pi}, \frac{a\pi}{2})$.

Por otro lado, el segmento claramente tiene su centro de masas en el punto medio. Como los puntos inicial y final del arco de espiral son $(R, 0, 0)$ y $(-R, 0, a\pi)$, este punto medio es $(0, 0, \frac{a\pi}{2})$. La masa del segmento es μ_2 multiplicada por la longitud l, que es

$$l = \sqrt{4R^2 + a^2\pi^2}$$

así que la masa del segmento es $M_s = \mu_2\sqrt{4R^2 + a^2\pi^2}$.

El centro de masas de la pieza está necesariamenten en $x = 0$, $z = a\pi/2$. La coordenada y queda, por fin

$$C_y = \frac{0 \cdot M_s + M_E 2/\pi}{M_E + M_s}.$$

□

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Sin realizar ninguna integral, explicar por qué el área A del conjunto plano dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

es exactamente $A = \pi ab$.

Solución. El cambio de variables $u = ax, v = by$ lleva dicho área en un círculo de radio 1. Este cambio de variables tiene por jacobiano ab, que es constante (esto es evidente). Por tanto el área de la figura es ab multiplicada por el área del círculo de radio 1, que es π, es decir, $A = \pi ab$. $\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Calcular el momento de inercia respecto del eje OZ de la parte del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 \leq 4 - z$ que está incluida en el cilindro de radio 1 con generatriz paralela al eje OZ. Se supone que la densidad es constante, μ. **Nota:** falta añadir al enunciado que $z > 0$.

Solución. Este ejercicio es muy sencillo utilizando el cambio a cilíndricas (o bien el Teorema de Fubini o del "Jamón de York"). Despejando z en el paraboloide, queda

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

mientras que estar dentro del cilindro exige que $x^2 + y^2 \leq 1$. Así pues, el cambio a cilíndricas

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} , \quad J(\Phi) = \rho$$

produce la parametrización $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, 1]$, $z \in [0, 4 - \rho^2]$. Con esta parametrización, el momento de inercia es

$$I = \int_V (x^2 + y^2)\mu \, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-\rho^2} \rho^2 \mu \rho \, dz d\rho d\theta$$

que da

$$I = \frac{5\pi\mu}{3}.$$

□

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas del conjunto plano dado por $x \geq 0$ y $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$, si la densidad es constante. (La integral $\int \sqrt{1 - u^2} du$ puede dejarse indicada).

Solución. Por ser la densidad constante (llamémosla μ), el centro de masas estará donde estén las simetrías del conjunto. En este caso, el conjunto es simétrico respecto del eje OX (es la mitad derecha de una elipse de centro $(0, 0)$). Por tanto, si $C = (C_x, C_y)$, se tiene que $C_y = 0$. Llamando X al conjunto, la masa M es

$$M = \int_X \mu \, dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-x^2/2}}^{\sqrt{1-x^2/2}} \mu \, dydx$$

donde los límites de integración se calculan fácilmente con la inecuación del conjunto. Queda

$$M = \mu \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{1 - x^2/2} \, dx$$

que se deja indicada como se especifica. La coordenada C_x es, por tanto,

$$C_x = \frac{1}{M} \int_X x\mu \, dxdy = \frac{\mu}{M} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-x^2/2}}^{\sqrt{1-x^2/2}} x \, dydx = \frac{\mu}{M} \int_0^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{1 - x^2/2} \, dx$$

y esta integral (que es casi inmediata) queda

$$C_x = \frac{4\mu}{3M}.$$

□

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** El coste de fabricación de cada elemento de una pieza curva "in situ" es directamente proporcional a la altura de dicho elemento (así que cada punto sale más caro según la altura). La curva puede describirse con las ecuaciones $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t$. Calcular el precio final hasta altura h y el precio medio (precio por unidad de longitud) para la misma altura h.

Solución. La descripción se traduce en que, si el coste es $C(x, y, z)$ entonces

$$C(x, y, z) = kz.$$

Como $z = t$ es la altura, se tiene que $t \in [0, h]$. La curva que se da es una espiral de radio 2 y paso 1, así que $|\dot{\gamma}| = \sqrt{5}$. El precio total es

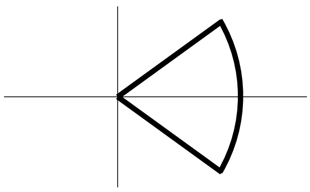
$$T = \int_0^h kt\sqrt{5}\,dt = \frac{\sqrt{5}k}{2}h^2.$$

La longitud es bien conocida y sencilla de calcular: $L = \sqrt{5}h$. Así pues, el precio medio por unidad es

$$P = \frac{kh}{2}.$$

□

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la figura: son tres cables, dos de ellos rectos de densidad constante μ_1 y el otro un arco de circunferencia de radio R y amplitud α, de densidad μ_2.



Solución. Por simetrías y por ser la densidad constante μ_1, el centro de masas del sistema formado por los dos cables rectos está en $(R\cos\frac{\alpha}{2}, 0)$ La masa conjunta de los dos cables es, claramente, $2R\mu_1$. El centro de masas del arco está en el eje OX (por simetrías y ser μ_2 constante). La masa del arco es $R\mu_2\alpha$. La coordenada x de este objeto es

$$\frac{1}{R\mu_2\alpha}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R\mu_2 \cos t R\,dt = \frac{2R\sin(\alpha/2)}{\alpha}.$$

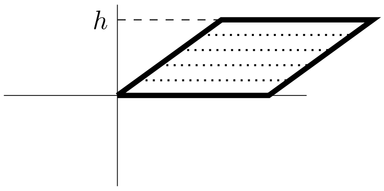
La coordenada x del centro de masas de todo el compuesto es

$$C_x = \frac{2R\mu_1 \times R\cos(\alpha/2) + R\mu_2\alpha \times 2R\sin(\alpha/2)/\alpha}{2R\mu_1 + R\mu_2\alpha} = 2R\frac{\mu_1\cos(\alpha/2) + \mu_2\sin(\alpha/2)}{2\mu_1 + \mu_2\alpha}$$

□

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Explicar, sin hacer ninguna cuenta, solo mediante razonamientos de cálculo integral, por qué el área de un paralelogramo plano es "base×altura".

Solución. Podemos colocar el paralelogramo, tras un giro y una traslación, con un lado en el eje OX (a ese lado lo llamamos "base"). Los lados adyacentes son paralelos (pero no son necesariamente perpendiculares a la base) y abarcan, en sentido perpendicular, desde 0 hasta h (la "altura"). El área es la integral en el paralelogramo de 1. Cortando el paralelogramo en segmentos horizontales, por el Teorema de Fubini (jamón de York), se obtiene que el área es la integral de 0 a h



de la longitud de cada corte. Como es un paralelogramo y está puesto con la “base” en horizontal, esta longitud es constante e igual a la base. Por tanto, el área es base×altura. $\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Realizar las siguientes tareas:

(1) (0.5 puntos) Verificar si el campo $\overline{X} = (x, y, z + 1)$ es conservativo.
(2) (2 puntos) Calcular
$$\int_\gamma \overline{X} d\overline{\gamma}$$
para la curva γ dada por
$$\gamma(t) = \left(\cos e^t, \left(t - \frac{1}{2}\right)^2, e^{(t-1/2)^2}\right),\ t \in [0, 1].$$

Solución. La primera parte solo requiere comprobar que las parciales cruzadas son todas iguales (i.e. que el rotacional es $(0, 0, 0)$), lo cual es casi evidente. Para la segunda parte, puede: calcularse el potencial de $\overline{X}$ o, más sencillo aun, razonar como sigue.

La curva γ tiene por origen $\gamma(0) = (\cos 1, 1/4, e^{1/4})$ y como fin $\gamma(1) = (\cos e, 1/4, e^{1/4})$. Como $\overline{X}$ es conservativo, el trabajo será el mismo que el de ir desde el origen hasta el final por el segmento $\eta(t) = (\cos 1 + t(\cos e - \cos 1), 1/4, e^{1/4})$, para $t \in [0, 1]$. El vector tangente a esta curva es $(1, 0, 0)$ así que el trabajo pedido T es
$$T = \int_0^1 (\cos 1 + t(\cos e - \cos 1), 1/4, e^{1/4}) \cdot (1, 0, 0)\, dt = \cos 1 + \frac{\cos e - \cos 1}{2}.$$
□

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Se considera el campo $\overline{X} = (-y, x, z)$. Se pide:

(1) (0.5 puntos) Calcular su rotacional.
(2) (2 puntos) Verificar el Teorema de Stokes para el cono $x^2 + y^2 = z^2$, con $z \in [0, 1]$.

Solución. El rotacional es claramente $(0, 0, 2)$ (basta hacer la cuenta).

Se requiere parametrizar el cono y su borde de manera que este esté positivamente orientado en el origen. Tomemos
$$S \equiv \begin{cases} x = z\cos\theta \\ y = z\sin\theta \\ z = z \end{cases},\quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1].$$
La curva del borde (la circunferencia superior del cilindro) puede tomarse como $z = 1$ y si tomamos θ como primera coordenada y z como segunda, la curva $\theta = t, z = 0$ en el plano (θ, z) deja la superficie a la derecha. Así pues, el borde del cono es $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, cuyo vector tangente es $(-\sin t, \cos t, 0)$. Pero el teorema de Stokes exige que el borde quede a la izquierda en la parametrización. Solo hará falta cambiar el signo del trabajo.

El vector normal a S es $d\overline{S} = (z\cos t, z\sin t, -z)$. El vector tantente a γ es $d\overline{\gamma} = (-\sin t, \cos t, 0)$. El flujo del rotacional $\overline{\nabla} \times \overline{X}$ en la superficie es
$$F = \int_S \overline{X} d\overline{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, 0, 2) \times (z\cos t, z\sin t, -z)\, dz\, dt = -2\pi.$$
Mientras que el trabajo del campo en la curva es
$$T = \int_\gamma \overline{X} \cdot d\overline{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 1)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt = 2\pi.$$

Teniendo en cuenta la orientación de la curva, se comprueba que $F = -T$, el Teorema de Stokes. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** ¿Cuántas cuotas hay que pagar para devolver un préstamo de 10.000€ al 5% anual con cuotas de 1.000€ al mes? (Todo se considera en tiempo continuo).

Solución. Poniendo todo en unidades de años, se pagan 12.000€ al año. El flujo del capital instantáneo es como sigue, llamando $D(t)$ a la deuda en tiempo t:

$$\begin{array}{l|l} t & t+dt \\ D(t) & D(t+dt) = D(t) + 5\% D(t)dt - 12000dt \end{array}$$

que, en forma de ecuación diferencial es:

$$D'(t) = 0.05D(t) - 12000 = 0.05(D(t) - 240000).$$

La manera sencilla de resolver esta ecuación es haciendo $u(t) = D(t) - 240000$ y queda

$$u'(t) = 0.05u(t)$$

de donde $u(t) = Ce^{0.05t}$. A partir de aquí sale que $D(0) = C + 240000 = 10000$, por lo que $C = -230000$. Es decir, $D(t) = 240000 - 230000e^{0.05t}$. El resultado final se obtiene resolviendo la ecuación

$$240000 - 230000e^{0.05t} = 0,$$

es decir, $t = 20\log(2.4/2.3)$ (que de hecho, es aproximadamente, 0.8 años). Esto hay que multiplicarlo por 12 para saber el número de cuotas. □

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Se considera una caída libre con rozamiento proporcional a la velocidad. Un objeto se lanza *hacia arriba* desde cierta altura h a una velocidad inicial de 1m/s. ¿Cuánto tiempo tarda en estar a una altura $h - 1$?

Solución. Puestas las constantes y supuesto que el sistema de coordenadas apunta *hacia arriba*, la segunda Ley de Newton con el rozamiento y la gravedad nos da, llamando $y(t)$ a la altura en tiempo t:

$$-mg - k\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t),$$

que, poniendo $r = k/m$ y llevando las y al miembro izquierdo, queda

$$\ddot{y}(t) + r\dot{y}(t) = -g.$$

En realidad, esta es una ecuación en $\dot{y}$. Poniendo $v(t) = \dot{y}(t)$:

$$\dot{v}(t) = -rv(t) - g,$$

sacando factor común

$$\dot{v}(t) = -r(v(t) + \frac{g}{r})$$

y, llamando $u(t) = v(t) + g/r$, la solución es $u(t) = Ce^{-rt}$. La velocidad es, por tanto, $v(t) = Ce^{-rt} - g/r$. Como $v(0) = 1$, queda $C = 1 + g/r$. En fin:

$$v(t) = (1 + fracgr)\, e^{-rt} - \frac{g}{r}.$$

La posición es la integral de esta expresión con respecto al tiempo:

$$y(t) = -\frac{1}{r}\,(1 + fracgr)\, e^{-rt} - \frac{g}{r}t + D.$$

donde D se obtiene a partir de la posición inicial $y(0) = h$, es decir

$$D = h + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{g}{r}\right).$$

El problema termina solucionando

$$y(t) = h - 1,$$

que, obviamente, se deja indicado. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Un conjunto U del plano delimitado por una curva cerrada γ (que está orientada positivamente respecto de U) tiene área R^2. Se pide calcular

$$\oint_\gamma (-y, x) d\overline{\gamma}.$$

Solución. Este ejercicio es una aplicación clásica de la fórmula de Green. Aplicándola, queda

$$\oint_\gamma (-y, x) d\overline{\gamma} = \int_u 1 + 1 \, dx \, dy = 2 \cdot \text{área}(U).$$

Como nos dicen que el área es R^2, la integral pedida es $2R^2$. □

---

4 de diciembre de 2017

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Se considera el campo

$$\overline{X} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

y se pide:

(1) (0.5 puntos) Explicar si es o no conservativo *en el conjunto*

$$U \equiv \left\{ x^2 + (y-1)^2 \leq 1/2 \right\}.$$

(2) (2 puntos) Calcular

$$\int_\gamma \overline{X} d\overline{\gamma}$$

donde γ es el arco superior de la elipse de centro $(0,1)$ y radio horizontal $\sqrt{2}/2$ y radio vertical $1/4$ que comienza en el vértice derecho y termina en el vértice izquierdo (de la elipse).

Solución. El campo solo tiene una singularidad en $(0,0)$, que es un punto que no pertenece a U, así que basta verificar si las parciales cruzadas son iguales, cosa que es verdad.

Dicho campo, como se sabe, "mide" (al integrarlo en una curva) el ángulo POQ, donde Q es el final de la curva, P el origen y O el centro de coordenadas. En este caso, $P = (\sqrt{2}/2, 1)$ y $Q = (-\sqrt{2}/2, 1)$. El ángulo que POQ es por tanto $2\,\mathrm{atan}(\sqrt{2}/2)$, y ese es el trabajo pedido. □

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Se considera el campo $\overline{X} = (x, y, z)$. Se pide:

(1) (0.5 puntos) Calcular su divergencia.

(2) (2 puntos) Comprobar el Teorema de Gauss para el cilindro con eje OZ de radio 1 y que va desde altura 0 hasta altura 1. Téngase en cuenta que el cilindro es "cerrado" (incluye las tapas).

Solución. La divergencia de este campo es claramente constante e igual a 3.

El cilindro en cuestión está delimitado por las superficies siguientes:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0,1], \ S_2 \equiv (x,y,0), S_3 \equiv (x,y,1), \text{ para } x^2+y^2 \leq 1. \\ z = z \end{cases}$$

El vector normal de la primera superficie es $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ (que apunta hacia afuera); el de la segunda es $(0,0,1)$ (que apunta hacia adentro) y el de la tercera es $(0,0,1)$ que apunta hacia afuera. Estas orientaciones habrán de tenerse en cuenta al calcular el flujo. Con todos estos datos, la fórmula de Gauss será:

$$\int_C \nabla \cdot \overline{X}\, dxdydz = \int_{S_1} X\, d\overline{S}_1 - \int_{S_2} X\, d\overline{S}_2 + \int_{S_3} X\, d\overline{S}_3,$$

(repito, los signos se deben a la orientación). En todo caso, el cilindro tiene obviamente volumen π, así que la integral triple es 3π. La primera integral de superficie queda

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2\theta + \sin^2\theta\, dz\, d\theta = 2\pi.$$

El campo $\overline{X}$ en S_2 es $(x, y, 0)$, que multiplicado escalarmente por $(0,0,1)$ da 0, así que la segunda integral es 0. El campo $\overline{X}$ en S_3 es $(x, y, 1)$, que multipicado escalarmente por $(0,0,1)$ es 1. La tercera integral es el área de $x^2+y^2 \leq 1$ por 1, es decir, π. En fin, la suma de las integrales de superficie es 3π, que corrobora la fórmula de Gauss. $\square$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Se invierten 20.000€ inicialmente, al 3% anual. Se quiere que la inversión dure exactamente 10 años (i.e. que al cabo de 10 años no quede dinero en el banco) realizando gastos fijos mensuales. ¿Cuánto dinero se puede gastar mensualmente? (Todos los flujos se suponen realizados en tiempo continuo).

Solución. Poniendo todo en unidades de años, si al mes se gastan k€, se gastan $12k$€ al año. El flujo del capital instantáneo es como sigue, llamando $C(t)$ al capital en tiempo t:

$$\begin{array}{l|l} t & t+dt \\ C(t) & C(t+dt) = C(t) + 3\%C(t)dt - 12kdt \end{array}$$

que, en términos diferenciales es

$$C'(t) = 0.03C(t) - 12k.$$

Sacando factor común,

$$C'(t) = 0.03(C(t) - 400k).$$

Llamando $u(t) = C(t) - 400k$, queda $u(t) = Ce^{0.03t}$. La constante sale de la condición inicial $C(0) = 20000$, así que $C = 20000 - 400k$. Por tanto,

$$C(t) = (20000 - 400k)e^{0.03t} + 400k.$$

La pregunta es cuánto vale k para que $C(10) = 0$, es decir

$$10 = (20000 - 400k)e^{0.3} + 400k,$$

que da $k = (2000e^{0.3} - 1)/(40e^{0.3} + 40)$, aproximadamente 193€. $\square$

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Se considera un muelle horizontal sujeto por un borde, al que está acoplada una masa m por el borde libre. Se extiende una longitud l respecto de la posición de reposo y se suelta. Calcular el intervalo temporal entre dos pasos consecutivos por el punto de reposo. Se supone que el rozamiento es proporcional a la velocidad y que la constante del rozamiento es menor que la constante de Hooke del muelle.

Solución. Como se sabe, la ecuación diferencial que rige este proceso es

$$m\ddot{y} = -ky(t) - r\dot{y}(t),$$

poniendo el origen de coordenadas en el punto de reposo del muelle. Pasando todo al mismo miembro y dividiendo por m, queda

$$\ddot{y}(t) + \frac{r}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$$

Esta ecuación corresponde a un movimiento armónico simple amortiguado exponencialmente (puede verse claramente porque es homogénea). El polinomio asociado es

$$T^2 + \frac{r}{m}T + \frac{k}{m}.$$

Sus soluciones son

$$T = \frac{-r/m \pm \sqrt{r^2/m^2 - 4k/m}}{2}.$$

Con la hipótesis sobre r del enunciado, se sabe que $r^2/m^2 - 4k/m < 0$, así que las raíces quedan

$$T = \frac{-r}{2m} \pm bi, \quad b = \frac{\sqrt{4k/m - r^2/m^2}}{2}.$$

Sean cuales sean las condiciones iniciales, la parte armónica tiene periodo $2\pi/b$, así que el semiperiodo (lo que se pregunta) es $\pi/(b)$. $\square$

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Se considera el campo $\overline{X} = (-y, x)$ y un conjunto U cuyo borde es una curva cerrada γ (orientada positivamente respecto de U). Calcular el área de U si se sabe que

$$\int_\gamma \overline{X} d\overline{\gamma} = 3.$$

Solución. Por la fórmula de Green,

$$\int_\gamma \overline{X} d\overline{\gamma} = \int_U 2\, dxdy = 2\text{área}(U).$$

Así pues, el área de U es $3/2$. $\square$

---

4 de diciembre de 2017

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Calcular la energía potencial almacenada en una semiesfera sólida de radio 20m (con el polo hacia arriba) de densidad constante μg/cm^3 si la base está situada a 10m del suelo. Utilizar como constante gravitatoria $g = 10\text{m/s}^2$.

Solución. Se coloca el sistema de coordenadas de manera que el círculo máximo de la semiesfera quede en el plano XY, así que la variable Z mide la altura. Dado un punto (x, y, z), la energía potencial acumulada en él es:

$$E(x, y, z) = ghm = 10z\mu\, dx\, dy\, dz.$$

Por tanto, la energía potencial total es:

$$E = \int_S 10z\mu \; dx\, dy\, dz.$$

La semiesfera del ejercicio (el hemisferio norte) se parametriza, en esféricas, como

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad \rho \in [0, 20],\ \varphi \in [0, \pi/2]\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

(donde θ va de 0 a 2π porque es todo el hemisferio y φ va de 0 a $\pi/2$ porque va de "latitud 0 a latitud 90". El jacobiano de la transformación a esféricas es $|J| = \rho^2 \sin\varphi$, por tanto:

$$E = \int_S 10\mu\rho \cos\varphi \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = 400000\pi\mu$$

en las unidades adecuadas. □

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la figura plana que consiste en el trapecio sólido de vértices $(-2a, 0)$, $(-a, a)$, (a, a), $(2a, 0)$ al que se le han perforado tres círculos de radio r con centros en $(-b, b)$, $(0, b)$ y (b, b). Se supone que $b + r < a$ y que $r < b/2$ (para que quepan los círculos). La densidad es constante.

Solución. Llamemos $C = (C_x, C_y)$ a dicho centro de masas. La figura (no hace falta dibujarla, pues la descripción es suficiente) es simétrica respecto del eje OY y la densidad es constante, así que el centro de masas debe estar en dicho eje, por lo que $C_x = 0$. Solo hay que calcular la otra coordenada. El centro de masas del sistema S formado por los tres círculos está (puesto que S es simétrico respecto de OY y del eje $y = b$) en $P = (0, b)$. Si conocemos el centro de masas del trapecio entero, podemos conocer el de la figura. Por la simetría de la densidad y del trapecio, su centro de masas está en el eje OY, es decir $x = 0$. Solo queda determinar la coordenada y del centro de masas del trapecio, llamémosla T_y. Parametricemos el trapecio en cartesianas de abajo arriba:

$$T \equiv \begin{cases} y \in [0, a] \\ x \in [-2a + y, 2a - y] \end{cases}$$

(el trapecio tiene ángulos de $\pi/4$ en las esquinas inferiores). Así pues:

$$T_y = \int_0^a \int_{-2a+y}^{2a-y} y\rho\, dx\, dy = \frac{4}{3}a^3\rho.$$

si la densidad es ρ. La masa del trapecio es su área por la densidad: la altura es a, las bases son $4a$ y $2a$, así que la masa es: $3a^2$. Por tanto, el trapecio tiene su centro de masas en $(0, \frac{4}{9}a)$. La figura, por tanto, cumple que:

$$\frac{4}{9}a\rho = \frac{M_S b + M_F C_y}{M_S + M_F},$$

donde M_S y M_F son las masas respectivas del sistema de círculos y la figura. Despejando, se obtiene C_y. □

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Calcular el momento de inercia del cable dado por la ecuación

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at),\ t \in [0, 2\pi]$$

respecto del eje $x = 1, y = 0$. Se supone que la densidad es constante μ.

Solución. El momento de inercia es

$$I = \int_\gamma d_E(x, y, z)^2 \mu \, d\gamma$$

donde $d_E(x, y, z)$ es la distancia del punto (x, y, z) de la curva al eje. La distancia al eje $E = (x = 1, y = 0)$ cumple que:

$$d_E(x, y, z)^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

Además, el vector tangente a γ es:

$$\dot{\gamma} = (-r\sin t, r\cos t, a),$$

por lo que:

$$I = \int_0^{2\pi} \left((r\cos t - 1)^2 + r^2 \sin^2 t\right)\sqrt{r^2 + a^2}\, dt$$

que da:

$$I = \int_0^{2\pi} r^2\sqrt{r^2 + a^2} - 2r\cos t\sqrt{r^2 + a^2} + \sqrt{r^2 + a^2}\, dt$$

que es:

$$2\pi(r^2 + 1)\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Que también podía haberse hecho mediante el Teorema de Steiner, considerando el eje OZ, que pasa por el centro de masas (puesto que la hélice lo tiene por eje de giro). En todo caso, la integral que sale es elemental (todo es constante salvo la variable t). □

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Calcular la masa del corte de dos esferas sólidas de radio R si el centro de una está sobre el borde de la otra y la densidad es constante.

Solución. Este es el ejercicio 30 de mi colección de ejercicios. □

Ejercicio 5 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la *superficie* dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1, \text{ para } z \in [0, 1].$$

Solución. Parametrizamos la superficie (que es de revolución):

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \sqrt{\rho^2 - 1} \end{array} \right., d\vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-1}} \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{-\rho^2\cos\theta}{\sqrt{\rho^2 - 1}}, \frac{-\rho^2\sin\theta}{\sqrt{\rho^2 - 1}}, -\rho \right), \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

así que el elemento de superficie es:

$$dS = \frac{\rho^4 + \rho^2}{\rho^2 - 1}.$$

La figura es simétrica respecto de los planos $X = 0$, $Y = 0$, y la densidad es constante, así que el centro de masas ha de tener coordenadas x e y iguales a 0. Para la C_z necesitamos la masa:

$$\int_S \mu dS = \mu \int_S \frac{\rho^4 + \rho^2}{\rho^2 - 1}\, d\theta\, d\rho = \mu \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho^4 + \rho^2}{\rho^2 - 1}\, d\rho\, d\theta.$$

Que llamamos M. Se tiene que

$$C_z = \frac{1}{M} \int_S z\mu dS = \mu \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\rho^2 - 1}\frac{\rho^4 + \rho^2}{\rho^2 - 1} d\rho d\theta.$$

(Lo que salga). Estas integrales pueden dejarse planteadas, no tiene sentido ninguno calcular su valor explícito. □

Ejercicio 6 (2.5 puntos)**.** Se sabe que $X = \overline{\nabla} \times Y$, con $Y = (-y, x, z^2)$. Calcular el flujo de X en la superficie

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2, \text{ para } z \in [0, 1]$$

sin utilizar integrales de superficie.

Solución. El campo es un rotacional. Por el teorema de Stokes, el flujo de un rotacional es el trabajo del campo inicial (en este caso Y) en el borde de la superficie. En este caso, el borde es la circunferencia de radio 1 y centro 0 del plano $z = 0$. Parametrizando:

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]; \dot{\gamma} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0). \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo que el flujo es igual a

$$\int_\gamma Y\, d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = 2\pi.$$

□

Ejercicio 7 (2 puntos)**.** Calcular la cuota mensual necesaria para pagar un préstamo de 1000€ al 5% de interés anual en 10 años. Todo se supone en tiempo continuo.

Solución. La ecuación diferencial de la deuda $D(t)$ por un préstamo de capital C a interés r con cuotas *mensuales* m viene dada por la ley:

$$D(t + dt) = D(t) + rD(t)dt - 12mdt,$$

es decir:

$$D'(t) = rD(t) - 12m.$$

Para resolver esta ecuación es mejor hacer las cuentas sin números y luego insertarlos. Llamando $y(t) = D(t) - 12m/r$, queda

$$y'(t) = ry(t),$$

así que $y(t) = y(0)e^{rt}$. Como $D(0) = 1000$, sale que $y(0) = 1000 - 240m$. Deshaciendo el cambio:

$$D(t) = (1000 - 240m)e^{rt} + 12m/r,$$

y como se quiere calcular m, sabiendo que $D(10) = 0$ y que $r = 5\%$, queda:

$$0 = (1000 - 240m)e^{0.5} + 240m,$$

por lo que

$$m = 1000e^{0.5}/(240(e^{0.5} - 1)) \simeq 10.59e,$$

que es razonable porque en 10 años suma más o menos 1270 euros, mientras que si no se pagara nada, al cabo de diez años se deberían: $1000e^{0.5} \simeq 1650e$ (por eso conviene pagar cuotas y no dejar pasar el tiempo).

□

Ejercicio 8 (2 puntos)**.** Calcular hasta qué altura llega un objeto lanzado hacia arriba si la velocidad inicial es v_0, la altura inicial es 0 y la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad con coeficiente 0.1 (en las unidades adecuadas). Utilizar $g = 10$ (en las unidades adecuadas).

Solución. Como hay rozamiento, no puede utilizarse un razonamiento por "energías", pues habría que calcular la que se pierde en la fricción. Por tanto, hay que utilizar una ecuación diferencial. En este problema hay dos fuerzas: la gravitatoria, que es constante y apunta "hacia abajo", y la de rozamiento, que es siempre de sentido contrario al movimiento (i.e. a la velocidad).

Colocamos el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, con la variable y apuntando hacia arriba en sentido positivo, así que v_0 es positiva. La Segunda Ley de Newton dice, en este caso:

$$-m \times g - 0.1 \times y'(t) = my''(t)$$

(suma de fuerzas igual a masa por aceleración). Esta ecuación es, realmente, una en $v(t) = y'(t)$, que reescribimos:

$$mv'(t) = -0.1v(t) - 10m.$$

Con el mismo razonamiento (exactamente) que en el problema anterior, se obtiene que

$$v(t) = ke^{-0.1t/m} - 100$$

y como $v(0) = v_0$, queda

$$v_0 = k - 100,$$

, así que $k = v_0 + 100$. Por tanto,

$$v(t) = (v_0 + 100)e^{-0.1t/m} - 100.$$

La posición es, por tanto:

$$y(t) = \int_0^t v(s)\, ds = (10v_0 + 1000)(e^{0.1t/m} - 1) - 100t.$$

(que puede dejarse indicada aunque sea inmediata). El momento en el que la velocidad es 0 (que es cuando está en el punto superior) se calcula poniendo $v(t) = 0$:

$$0 = (v_0 + 100)e^{-0.1t/m} - 100$$

de donde

$$t = -10m \log\left(\frac{100}{v_0 + 100}\right).$$

Y con este valor se obtiene la altura. □

Ejercicio 9 (1 punto)**.** Calcular los polos, con su multiplicidad, y los residuos en ellos de:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + i)(z - 1)}, \quad g(z) = \frac{1}{z} + z^2.$$

Solución. Para $f(z)$ los posibles polos son $z = -i$, $z = 1$ pero el numerador es $(z-i)(z+i)$, así que realmente

$$f(z) = \frac{z-i}{z-1},$$

que solo tiene un polo simple en $z = 1$. El residuo ahí es:

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = (z-i)\big|_{z-1} = 1 - i.$$

Para $g(z)$, hay que reescribirla como:

$$g(z) = \frac{1+z^3}{z},$$

que tiene un polo simple en $z = 0$. Por tanto,

$$\mathrm{Res}_{z=0} g(z) = (1+z^3)\big|_{z=0} = 1.$$

□

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 10 (2.5 puntos)**.** Se tiene un sólido que consiste en un cilindro de radio R perforado cilíndricamente por su eje en un radio $r < R$, de altura h. La densidad es constante. Se desea realizar cuatro perforaciones cilíndricas de manera que:

- El centro de las perforaciones esté en la circunferencia de radio $(r + R)/2$.
- El momento de inercia de la pieza respecto de su eje baje en un 10%.

Calcúlese el radio de las perforaciones (basta dejar planteada la ecuación polinómica que da la solución).

Ejercicio 11 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la figura plana que consiste en el triángulo (relleno) de vértices $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(a, 0)$ al que se le ha quitado el círculo de centro $(0, b/2)$ y radio r, si la densidad es constante. Se supone que r es lo suficientemente pequeño.

Ejercicio 12 (2.5 puntos)**.** Calcular la distancia media de los puntos de la curva

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, at), \quad t \in [0, \alpha]$$

(a es un número positivo) a los siguientes elementos:

- Al centro de coordenadas. (1.5 puntos)
- Al eje OZ. (1 punto).

Ejercicio 13 (2.5 puntos)**.** Calcular la masa del corte de una esfera de radio R y densidad constante con un cilindro de radio R cuya generatriz es un diámetro de la esfera.

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 14 (2.5 puntos)**.** Calcular el centro de masas de *la superficie* de un casquete esférico de radio R que cubre una latitud φ_0 (medida desde el "polo norte") si la densidad es constante.

Ejercicio 15 (2.5 puntos)**.** Dado el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, verificar el Teorema de Stokes para el campo $\overline{X} = (-y, x, z^2)$.

Ejercicio 16 (2 puntos)**.** ¿A qué temperatura está el ambiente si una taza a 90°C tarda 30s en pasar a estar a 70°C, teniendo en cuenta que la tasa de enfriamiento (la constante en la ecuación diferencial correspondiente) es 0.5/s?

Ejercicio 17 (2 puntos)**.** Se considera un muelle de longitud (en reposo) l_0, cuya constante de Hooke es h, en un entorno con rozamiento proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad r. Se estira una longitud l y se suelta con una velocidad inicial v_0. ¿De cuáles de todos estos valores depende la frecuencia con la que pasa por el origen?

Ejercicio 18 (1 punto, la mitad por cada uno)**.** Calcular los residuos de las siguientes funciones:

$$f(z) = \frac{1}{z} + z^2, \;\; g(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z-1)^2}.$$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Calcular la energía cinética de un cono con radio de la base R, altura h y densidad constante ρ que gira alrededor de su eje a una velocidad angular ω (en radianes/segundo).

Solución. La energía cinética de un punto de masa con densidad $\rho(x, y, z)$ que se desplaza a velocidad *lineal* $v(x, y, z)$ es:

$$E_c(x, y, z) = \frac{1}{2}\rho(x, y, z)v(x, y, z)^2 dxdydz.$$

Sabemos que ρ es constante. Si se coloca el sistema de coordenadas de modo que el eje del cono sea OZ, la velocidad lineal es $v(x, y, z) = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, se debe calcular la integral

$$I = \int_C \frac{1}{2}\rho\omega\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

para C el cono pedido. Este cono, que tiene el vértice en $(0, 0, h)$ y la base de radio R puede parametrizarse en cilíndricas como

$$C \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, h], r \in [0, r(z)], \quad J = r \\ z = z \end{cases}$$

donde $r(z)$ es el radio del disco que aparece al cortar el cono con el plano $Z = z$. Este $r(z)$ vale (se ha hecho mucas veces, utilizando Thales):

$$r(z) = R\frac{h - z}{h}.$$

Por tanto, por el teorema del cambio de variables,

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{r(z)} r\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\, drdzd\theta$$

que se calcula muy fácilmente. □

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Calcular la temperatura media de un octante de esfera de radio R si la temperatura de cada punto es proporcional a la distancia al centro de la esfera. (Se sabe que el volumen de la esfera completa es $4/3\pi R^3$).

Solución. La temperatura media en un conjunto C es

$$T_m = \frac{\int_C T(x, y, z)\, dxdydz}{\int_C dxdydz}$$

(el denominador es el volumen, que nos dan: $\pi R^3/6$). La temperatura es proporcional a la distancia al centro. Si se coloca la esfera con centro en el centro de coordenadas:

$$T(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si se utilizan coordenadas esféricas, cuyo jacobiano es $J = r^2\sin\phi$, el conjunto C es:

$$C \equiv r \in [0, R], \theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, \pi/2].$$

Por tanto,

$$T_m = \frac{6}{\pi R^3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R krr^2\sin\phi\, drd\phi d\theta$$

que se calcula muy fácilmente. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Calcular el trabajo del campo

$$\vec{X} = \left(xe^{x+y}, ye^{x+y}, z\right)$$

sobre la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Solución. Este campo no es conservativo. En cualquier caso, el trabajo es bastante sencillo de calcular directamente. El vector tangente a la curva es:

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 2)\,,$$

y el trabajo es, por tanto

$$W = \int_0^{2\pi} \left(\cos t e^{\cos t + \sin t}, \sin t e^{\cos t + \sin t}, 2t\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 2)\ dt = \int_0^{2\pi} 4t\, dt = 8\pi^2.$$

□

Ejercicio 4 (1 punto: 0.5 por pregunta)**.** El campo

$$\vec{X} = \left(\frac{-y}{x}, -\log(x)\right)$$

¿es un gradiente en el círculo de centro $(0, 2)$ y radio 1? ¿Y en el círculo de centro $(2, 0)$ y radio 1?

Solución. El campo *no está definido* para $x \leq 0$, así que no puede ser un gradiente en una zona que incluye alguno de esos puntos. Por tanto, no es un gradiente en el primer círculo.

En el segundo sí lo es porque las parciales cruzadas son iguales (ambas son $-1/x$) y el campo está definido en todo el cícrculo y *el círculo es un conjunto simplemente conexo.* □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** ¿Es correcto el siguiente razonamiento? ¿por qué? Para calcular el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje E puede hacerse lo siguiente: se calcula la masa m de cuerpo, el centro de masas P y la distancia d entre P y E. Ahora el momento de inercia pedido es md^2.

Solución. No, no es correcto: si fuera así, el momento de inercia de cualquier conjunto respecto de un eje que pasara por el centro de masas sería 0 y esto es imposible. □

9 de enero de 2019

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Calcular la masa de la *superficie* de la parte de la esfera de radio R con centro el origen que está más arriba que el plano $z = R/2$, si la densidad es constante.

Solución. La zona con $z \geq R/2$ corresponde a los ángulos ϕ (latitudes) entre 0 (polo "Norte") y $\pi/3$. Así que se puede parametrizar esa parte de la esfera como

$$S \equiv \begin{cases} x = R\cos\theta\sin\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \qquad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi/3]. \\ z = R\cos\phi \end{cases}$$

El vector normal es bien conocido y, en cualquier caso, queda

$$dS = R^2 \sin\phi.$$

La densidad es constante ρ, así que la masa pedida es

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \rho R^2 \sin\phi \, d\phi d\theta,$$

que se calcula sin mayor problema. □

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Se sabe que el flujo del campo

$$\vec{X} = \left(2x + y^3, 3y + z^2, 4z + e^{x+y}\right)$$

sobre la esfera de radio 1 y centro el origen es F. Calcular el flujo del mismo campo sobre la esfera de radio R y centro el origen, para $R > 1$.

Solución. El campo está definido en todo $\mathbb{R}^3$, así que puede aplicarse la fórmula de Gauss directamente a la esfera de radio R. La divergencia de $\vec{X}$ es $\nabla \cdot \vec{X} = 9$. Por tanto, el flujo pedido Φ es

$$\Phi = \int_C 9 \, dxdydz = 9 \operatorname{vol}(C).$$

donde C es la esfera sólida de radio R. Si no se sabe el volumen de la esfera, sí se sabe que es proporcional al cubo de la distancia. Como el flujo en la esfera de radio 1 es F, tiene que ser

$$9 \operatorname{vol}(C) = 9R^3 \operatorname{vol}(C_1) = R^3 9 \operatorname{vol}(C_1) = R^3 F,$$

aplicando la fórmula de Gauss a la esfera de radio 1. □

Ejercicio 3 (2 puntos, uno por apartado)**.** Se tiene un muelle horizontal, fijo en un extremo, con una masa m adosada al otro extremo. Se *estira* una longitud l y *se suelta*. La constante de Hooke es $k = 0.1$ en las unidades adecuadas.

(1) Calcular la velocidad a la que pasa por el punto de reposo *si no hay rozamiento*.
(2) Calcular la velocidad a la que pasa *por primera vez* por el punto de reposo si el rozamiento es proporcional a la velocidad y la constante de rozamiento es 0.01.

Solución. Lo más sencillo es colocar el origen de coordenadas en el punto de reposo del extremo del muelle con la masa. Así puesto, si $x > 0$ es el sentido de "estirar", se tiene que

$$F_h = -kx, \;\; F_r = -r\dot{x}$$

donde F_h es la fuerza de Hooke y F_r la de rozamiento. Las constantes vienen dadas como 0.1 y 0.01, respectivamente.

(1) Sin rozamiento, la segunda Ley de Newton es:

$$m\ddot{x} = -kx$$

que, escrita como habitualmente, es

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Su polinomio asociado es $T^2 + k/m$ que tiene por raíces

$$T = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i.$$

Por tanto, las soluciones de la homogénea (que es la propia ecuación) son de la forma

$$x(t) = A\cos(\sqrt{k/m}t) + B\sin(\sqrt{k/m}t).$$

Ahora hay que utilizar las condiciones iniciales $x(0) = l$, $\dot{x}(0) = 0$ para calcular A y B. Fácilmente se obtiene que

$$A = l, B = 0.$$

Cuando pasa por el punto de reposo es cuando $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/k}$ y la velocidad es $-l\sqrt{m/k}$.

(2) En este caso, la ecuación es

$$y'' + \frac{r}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0,$$

también homogénea. Las soluciones del polinomio asociado son

$$T = \frac{-r/m \pm \sqrt{r^2/m^2 - 4k/m}}{2},$$

que son de la forma $a \pm ib$, con $a > 0$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x(t) = e^{at}\left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)$$

e, igual que antes, se utilizan las condiciones iniciales para calcular A y B. Igual que antes, pasa por el punto de reposo por primera vez cuando $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/k}$ y se computa la velocidad.

□

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Calcular los residuos no nulos de

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2},\;\; g(z) = \frac{e^z}{z+1} + \frac{z}{z-i}.$$

Solución. No se hace por ser una cuenta elemental. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcular el trabajo del campo

$$\vec{X} = (x^2 - y, y^2 + x)$$

sobre una curva cerrada γ si se sabe que el área delimitada por γ es 73.

Solución. Puesto que se pide el trabajo de un campo relacionado con un área, ha de usarse la fórmula de Green de algún modo. Si se esribe $\vec{X} = (P, Q)$, se tiene:

$$P = x^2 - y, Q = y^2 + x$$

y, por tanto:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

La fórmula de Green dice que

$$W = \int_\gamma \vec{X} \cdot d\vec{\gamma} = \int_U \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

donde U es el conjunto delimitado por γ. En este caso

$$W = \int_U 2\, dxdy = 2\text{área}(U) = 146.$$

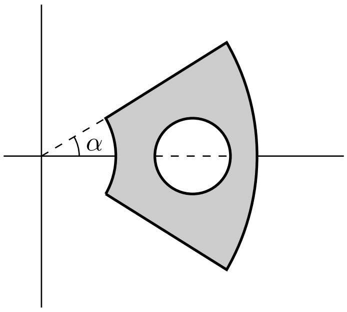
$\square$

9 de enero de 2019

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Se considera una pieza plana como la de la figura, de densidad constante. El agujero del centro es un círculo de radio 1/4 centrado en $(2,0)$. Se pide: calcular su centro de masas. El ángulo α es $\pi/6$. El radio mayor de la pieza es 3 y el radio menor, 1.



Solución. La figura es simétrica respecto del eje OX y la densidad es constante: la coordenada y del centro de masas es 0. Pongamos que el centro de masas es $(C_x, 0)$. Hemos de calcular solo C_x. Como la pieza es una grande (el sector circular desde $r = 1$ hasta $r = 3$, llamémoslo S) a la que se quita una pequeña (el disco sólido D), se puede utilizar la fórmula:

$$C_x^S = \frac{m(P)C_x + m(D)C_x^D}{m(P) + m(D)}$$

donde $m(P)$ y $m(D)$ son las masas respectivas de la pieza y el disco y C_x^S y C_x^D son el centro de masas del sector y del disco, respectivamente.

El disco tiene su centro de masas en su centro geométrico porque la densidad es constante: $C_x^D = 2$. Su masa es $m(D) = \pi/16\mu$, si μ es la densidad.

El sector puede parametrizarse en polares así:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \ \rho \in [1,3],\ \theta \in [-\alpha, \alpha]$$

por tanto

$$C_x^S = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_1^3 \mu\rho\cos\theta\rho\,d\rho\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_1^3 \mu\rho\,d\rho\,d\theta} = \frac{9 - (1/3)(2\sin\alpha)}{8\alpha}.$$

Despejando en la fórmula de arriba:

$$C_x = \frac{m(S)C_x^S - m(D)C_x^D}{m(S) - m(D)}$$

y sustituyendo los valores calculados se termina. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Calcular la temperatura media de una esfera de radio 1000km si la temperatura del centro es 1000°C y esta es proporcional al cuadrado de la distancia a la superficie.

Solución. Si centramos las coordenadas en el centro de la esfera, la temperatura es $T(x,y,z) = k(1000 - \sqrt{x^2 - y^2 - z^2})^2$ y vale 1000 en 0, así que $k = 1$. En esféricas,

$T(x,y,z) = (1000-\rho)^2$. El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. La temperatura media es:

$$\overline{T} = \frac{\int_S T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{V}.$$

Donde S denota la esfera sólida. En esféricas, teniendo en cuenta que el jacobiano es $\rho^2 \sin\phi$:

$$\int_S T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{1000}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1000-\rho)^2\rho^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho = \frac{4\cdot 10^{14}\pi}{3}.$$

La temperatura media es la división de esto por V. □

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Se consideran el campo de vectores $\overline{X} = (x^2+y^3, 3y^2+z, y+z^3)$ y la curva $\gamma = ((t^2-t)e^t, t^2-t, t\sin(\pi t))$, para $t \in [0,1]$. Se pide calcular

$$\int_\gamma \overline{X}\,d\overline{\gamma}$$

Solución. El rotacional del campo es:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+y^3 & 3y^2+z & y+z^3 \end{vmatrix} = (0,0,-3y^2)$$

que *no es* $(0,0,0)$, así que $\overline{X}$ no es un gradiente. Por tanto, habría que hacer la cuenta entera:

$$\int_\gamma \overline{X}\,d\overline{\gamma} = \int_0^1 ((t^2-t)^2e^t + (t^2-t)^3, 3(t^2-t)^2 + t\sin(\pi t), (t^2-t) + t^3\sin\pi t)\cdot$$
$$((2t-1)e^t + (t^2-t)e^t, 2t-1, \sin\pi t + t\cos\pi t)\,dt = \cdots$$

que basta dejar indicada. □

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Se consideran el campo $\overline{X} = (-y, x, z)$ y la superficie S que es la semiesfera de radio 1, centro $(0,0,0)$ con coordenada $z > 0$. Se pide calcular

$$\int_S \overline{X}\,d\overline{S}$$

Solución. La parametrización de dicha semiesfera puede ser:

$$x = \cos\theta\sin\phi, y = \sin\theta\sin\phi, z = \cos\phi,\ \ \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi/2].$$

El vector normal es

$$d\overline{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi).$$

que cumple $d\overline{S} = -sen\phi(x,y,z)$ en la superficie. Por tanto, el producto escalar

$$\overline{X}\cdot d\overline{S} = -sen\phi\cos^2\phi.$$

Así pues, el flujo pedido es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\sin\phi\cos^2\phi\,d\phi\,d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

□

Ejercicio 5 (2 puntos (1+1))**.** Un muelle horizontal está fijo por un extremo y tiene una masa de 1kg unida a su otro extremo; el rozamiento es proporcional a la velocidad. La constante de Hooke es κ y la constante de rozamiento es ρ. El muelle mide, en reposo, l. Se *estira* una longitud d y *se suelta*. Se pide:

(1) Plantear (explicándola con un gráfico) la ecuación diferencial que rige el movimiento del muelle. No se pide *resolverla*.
(2) ¿Puedes asegurar que la frecuencia de paso por el punto de reposo es constante?

Solución. Colocamos el origen de coordenadas en el punto de reposo del muelle (la longitud l es, por tanto, irrelevante). La fuerza de Hooke en estas coordenadas es $F_H = -\kappa x(t)$ y la fuerza de rozamiento es $F_r = -\rho \dot{x}(t)$, al ser contraria al movimiento. La segunda ley de Newton nos dice que:

$$ma = F_H + F_r = -\kappa x(t) - \rho \dot{x}(t)$$

y como $m = 1$ y $a = \ddot{x}(t)$, queda

$$\ddot{x}(t) = -\kappa x(t) - \rho \dot{x}(t).$$

Para la segunda parte, como la ecuación es homogénea, las soluciones de la homogénea son ya las de la ecuación. La ecuación diferencial es, escrita como habitualmente:

$$Y'' + \rho Y' + \kappa Y = 0.$$

El polinomio asociado es $T^2 + \rho T + \kappa$, cuyas raíces son

$$T = \frac{-\rho \pm sqrt \rho^2 - 4\kappa}{2}.$$

Si el rozamiento es suficientemente pequeño, las raíces son complejas conjugadas: $T = a \pm bi$ y el movimiento viene dado por:

$$x(t) = e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$$

para ciertas A y B que dependen de las condiciones iniciales. Por tanto, la frecuencia de paso por el origen *no depende de A y B* sino solo de b y, sí, es constante, pues $b = \sqrt{\rho^2 - 4\kappa}/2$, que es constante. □

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular todos los residuos de

$$f(z) = \frac{1}{3z} - \frac{1}{2z+3}$$

en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Solución. Escribamos la función como un cociente:

$$f(z) = \frac{2z + 3 - 3z}{3z(2z+3)} = \frac{3-z}{3z(2z+3)}.$$

El numerador solo tiene un cero: $z = 3$. El denominador tiene dos ceros simples $z = 0, z = -3/2$. Por tanto solo hay residuos no nulos en $z = 0$ y $z = -3/2$. En $z = 0$ da:

$$\mathrm{Res}_{z=0}(f(z)) = \left(\frac{3-z}{3(2z+3)}\right)(z=0) = \frac{1}{3}.$$

Mientras que en $z = -3/2$, queda

$$\mathrm{Res}_{z=3/2}(f(z)) = \left(\frac{3-z}{6z}\right)(z=-3/2) = -\frac{1}{2}.$$

□

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Un cubo de lado 1 (unidades en m) de un material de densidad constante se ha perforado con una fresa de radio 0.1 por el centro de una cara, hasta la opuesta, en dirección perpendicular a dicha cara. Calcúlese el momento de inercia *respecto de una de las aristas paralelas al eje de la fresa.*

Solución. Para calcular el momento de inercia I_f de la figura se puede usar la siguiente igualdad:

$$I_f = I_c - I_a$$

donde I_c es el momento de inercia del cubo e I_a el del "agujero" (es decir, el un cilindro sólido). El momento de inercia del cubo, si la densidad es μ, vale:

$$I_c = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mu(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

si se toma la arista del cubo en el eje OZ y el cubo es $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Esta integral da

$$I_c = \frac{2\mu}{3}.$$

Para calcular el momento de inercia del cilindro sólido, como el eje del problema no es el eje de simetría del cilindro, utilizamos el Teorema de Steiner:

$$I_a = I_a' + md^2$$

donde I_a' es el momento de inercia del cilindro respecto de su eje de simetría (que pasa por el centro de masas ya que la densidad es constante), m es la masa del cilindro ($m = 0.01\pi\mu$, pues el radio es 0.1) y d es la distancia de la arista OZ al eje de simetría (que está en $x = y = 1/2$). Por tanto: $d = \sqrt{2}/2$. Se tiene, igual que para el cubo:

$$I_a' = \int_A \mu((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2)\, dx\, dy\, dz$$

donde A denota el volumen del agujero. Cambiando a cilíndricas (centradas en el eje del cilindro):

$$\begin{cases} x = 1/2 + \rho\cos\theta \\ y = 1/2 + \rho\sin\theta \qquad J = \rho \\ z = z \end{cases}$$

se tiene:

$$I_a' = \int_0^{0.1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu\rho^3\, dz\, d\theta\, d\rho = \frac{\pi\mu}{20000}.$$

Por tanto,

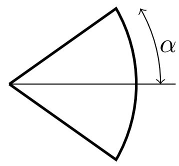
$$I_a = \frac{\pi\mu}{2000} + \frac{\pi\mu}{200} = \frac{11\mu\pi}{2000}.$$

Así pues:

$$I_f = \frac{2\mu}{3} - \frac{11\mu\pi}{2000}.$$

□

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Calcular la densidad media de un volumen sólido esférico cónico (es decir, el resultado de cortar una esfera sólida con un cono que tiene vértice en el centro de la esfera) si: la esfera tiene radio R y el casquete tiene abertura α. Se muestra un corte de la figura para aclarar (la pieza sería una "rotación" de dicha figura alrededor del eje que se marca). La densidad es proporcional a la distancia al origen.



Solución. Dicho volumen puede parametrizarse en coordenadas esféricas como sigue (poniendo el eje del dibujo como OZ, como es habitual):

$$\rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \alpha].$$

La densidad media es la masa total dividida entre el volumen. El volumen, teniendo en cuenta que las coordenadas esféricas dan un jacobiano de $\rho^2 \sin\phi$, sale:

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \frac{2\pi R^3(1-\cos\alpha)}{3}.$$

La masa total es la integral de la densidad, que según el enunciado es

$$\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

que en esféricas es $\mu(\rho, \theta, \phi) = k\rho$. Por tanto, si C es el conjunto de integración:

$$\int_C \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} k\rho^3 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \frac{\pi R^4(1-\cos(\alpha)k}{2}.$$

Por tanto, la densidad media es:

$$D = \frac{3Rk}{4}.$$

$\square$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Calcular la longitud de la curva dada por la ecuación

$$\rho(\theta) = \cos\theta, \; \theta \in [0, \pi].$$

Solución. En cartesianas, la ecuación es:

$$x(\theta) = \cos^2\theta, \; y(\theta) = \cos\theta \sin\theta$$

El vector tangente es:

$$\dot{x}(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta, \; \dot{y}(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

por tanto,

$$\sqrt{\dot{x}(\theta)^2 + \dot{y}(\theta)^2} = \sqrt{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta} = 1,$$

así que la longitud de la curva es:

$$\int_0^{\pi} 1 \, d\theta = \pi.$$

Esto es claro si se tiene en cuenta que la curva es una semicircunferencia de radio 1. $\square$

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Se considera un campo de vectores gradiente $\vec{X} = \nabla f$, para cierto potencial f definido en todo el espacio. Si S es la superficie *semiesférica* de radio 1, centro $(0,0,0)$ contenida en el semiespacio $z > 0$, calcular

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{X} \, d\vec{S}.$$

Solución. El rotacional de un gradiente es 0, así que $\nabla \times \vec{X} = 0$ es cero y su flujo es también cero en cualquier superficie. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcular el flujo del campo $\vec{X} = (x, y, z)$ sobre la superficie del cilindro $z^2 + y^2 = 1$ contenida en $z > 0$ y para $x \in [-1, 1]$.

Solución. Parametricemos la superficie en variables más adaptadas:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \cos\theta \\ z = \sin\theta \end{cases}, \quad x \in [-1,1], \theta \in [0,\pi]$$

(θ está entre 0 y π porque $z > 0$). El vector normal da:

$$d\vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (0, -\cos\theta, -\sin\theta),$$

por lo que el flujo es:

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{\pi} (x, \cos\theta, \sin\theta) \cdot (0, -\cos\theta, -\sin\theta) \, d\theta \, dx = \int_{-1}^{1} \int_0^{\pi} -1 \, d\theta \, dx = -2\pi.$$

□

Ejercicio 6 (2 puntos (1+1))**.** Un objeto de masa 1 (kg) se *lanza* hacia arriba con velocidad 1 (m/s). Se pide:

(1) Plantear la ecuación diferencial del movimiento del objeto si el rozamiento es proporcional a la velocidad y la gravedad es g.
(2) Calcular en qué momento vuelve a pasar por el punto desde el que se lanzó.

Solución. En este problema solo hay dos fuerzas: la gravedad y el rozamiento. Poniendo el origen de coordenadas a la altura del lanzamiento y el sentido positivo hacia *arriba*, la gravedad es $F_g = -1g$. Si la posición en un instante es $x(t)$, la velocidad es $\dot{x}(t)$ y la fuerza de rozamiento es, por el enunciado, $F_r = -k\dot{x}(t)$ (pues es contraria a la velocidad). Aplicando la segunda ley de Newton:

$$ma = F_g + F_r$$

se obtiene, sabiendo que $a = \ddot{x}(t)$ y que $m = 1$:

$$\ddot{x}(t) = -g - k\dot{x}(t),$$

que es la ecuación pedida. Es de segundo orden en $x(t)$ pero si llamamos $v(t) = \dot{x}(t)$, queda

$$\dot{v}(t) = -g - kv(t)$$

una ecuación de primer orden en la velocidad. Como se pide en qué momento vuelve a pasar por el origen de coordenadas, se puede utilizar el hecho de que pasará cuando la velocidad sea la inicial cambiada de signo: $v(t) = -1$. Para solucionar esto, hace falta resolver la ecuación diferencial de la velocidad. Realizando el cambio

$$y(t) = g/k + v(t) \quad (\dot{y}(t) = \dot{v}(t))$$

obtenemos la ecuación

$$\dot{y}(t) = -ky(t),$$

cuya solución es

$$y(t) = Ce^{-kt}$$

para cierta C. La condición inicial es $v(0) = 1$, con lo que $y(0) = g/k + 1$, así que

$$g/k + 1 = C.$$

Deshaciendo el cambio:

$$v(t) = y(t) - g/k = (g/k + 1)e^{-kt} - g/k.$$

Y se ha de calcular t para que

$$-1 = v(t) = (g/k + 1)e^{-kt} - g/k,$$

es decir,

$$e^{-kt} = \frac{-1 + g/k}{1 + g/k},$$

lo que quiere decir que:

$$-kt = \log(-1 + g/k) - \log(1 + g/k),$$

por lo que

$$t = \frac{\log(1 + g/k) - \log(-1 + g/k)}{k}.$$

□

Ejercicio 7 (1 punto)**.** Un capital de 1000 (€) se invierte a un tipo de interés (en tiempo continuo) r. Además, se va invirtiendo más dinero (en tiempo continuo) a razón de 100 €/año. Si al cabo de 10 años se tienen 15000 €, ¿cuánto vale r?

Solución. Solo vamos a plantear la ecuación, pues la resolución es exactamente igual que en el problema anterior. Como el interés es continuo y la inversión también, se tiene que el capital en tiempo $t + dt$ es:

$$C(t + dt) = rC(t)dt + Idt = rC(t)dt + 100dt$$

con unidades temporales de años. De aquí se deduce que la ecuación diferencial es

$$\dot{C}(t) = rC(t) + 100$$

y todo el problema es igual que el segundo punto del anterior, a partir de aquí. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Explicar usando el Teorema de Fubini, por qué el volumen de una pirámide cuadrada de área de la base A y altura h el igual que el volumen de un cono de la misma área de la base y la misma altura.

Proof. Llamemos P a la pirámide y C al cono y pongámoslos con el vértice en el origen y mirando hacia arriba (la base está a altura h). Por el Teorema de Thales, el radio de cada círculo de corte de C con el plano $Z = z$ es proporcional al radio de la base con razón r. El lado de cada cuadrado de corte de P con el mismo plano son proporcionales, *con la misma razón de proporcionalidad* r. Por tanto, sus áreas son también proporcionales. Como las áreas para $Z = h$ son iguales, también tienen que ser iguales para cada $Z = z$. El Jamón de York nos asegura ahora que

$$\int_P dx\,dy\,dz = \int_0^h A(z)\,dz = \int_C dx\,dy\,dz$$

y ya está. Con un dibujo es aun más sencillo. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Calcular la temperatura media de la semiesfera **sólida** con centro $(0, 0, 0)$ que está encima del plano XY, de radio R, si la temperatura de cada punto es proporcional a: el producto de la distancia al centro por el seno de la "latitud". La latitud es el ángulo φ de las coordenadas polares, para este ejercicio (el ángulo que forma el eje OZ con el vector director del punto en cuestión, si la esfera está centrada en el origen). La fórmula para el volumen de una esfera puede darse por sabida.

Proof. En esféricas, el conjunto, llamémoslo S, se parametriza como $\rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]$ y $\varphi \in [0, \pi/2]$. Su volumen es $V = 2\pi R^3/3$. Si $T(x, y, z)$ es la temperatura del punto (x, y, z), la temperatura media es

$$\overline{T} = \frac{1}{V}\int_S T(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

por el enunciado, $T(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sin\varphi$, que en esféricas es $T(\rho, \theta, \varphi) = k\rho\sin\varphi$. Por tanto, cambiando de coordenadas, como el jacobiano de esféricas es $\rho^2 \sin\varphi$,

$$\overline{T} = \frac{k}{V}\int_S \rho\sin\varphi\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho$$

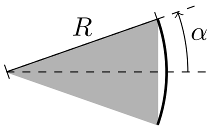
aplicando Fubini

$$\overline{T} = \frac{k}{V}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \rho^3\sin^2\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho$$

(y se hace la integral, que es bien sencilla). □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la figura que se muestra: un triángulo isósceles plano (**de dos dimensiones**) de lado R cuyos lados iguales forman un ángulo 2α y con la base perpendicular al eje OX, junto con un arco de circunferencia (una **curva**) de radio R, con centro en dicho vértice del triángulo y que une los otros dos vértices. La densidad del triángulo es μ_1 (en unidades de masa/área) y la densidad del arco es μ_2 (en unidades de masa/longitud).

Proof. Las densidades son constantes. El triángulo tiene altura $R\cos\alpha$ y base $2R\sin\alpha$, así que su masa es $M_T = \mu_1 R^2 \sin\alpha\cos\alpha$. El arco tiene longitud 2α, así que su masa es $M_A = 2\mu_2\alpha$. Por simetría y por ser las densidades constantes, el



centro de masas tiene coordenada y nula. Si el c.m. es $C = (C_x, C_y)$, entonces $C_y = 0$.

La coordenada x del c.m. del triángulo es (los lados tienen por ecuación $y = -\tan(\alpha)x$, $y = \tan(\alpha)x$, respectivamente):

$$C_x^T = \frac{1}{M_T}\int_0^{R\cos\alpha}\int_{-x\tan\alpha}^{x\tan\alpha}\mu_1 x\,dy\,dx$$

que es una integral elemental (como es sabido, es $2/3R\cos\alpha$).

La coordenada x del c.m. del arco se calcula con la ecuación de la circunferencia (lo hemos hecho en clase y no voy a copiar el ejercicio, pero el alumno debe hacerlo). El resultado final, si no me equivoco, es:

$$C_x^A = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

(en todo caso es un ejercicio sencillo de **curvas**).

La coordenada C_x del c.m. total se obtiene ahora como

$$C_x = \frac{1}{M_T + M_A}(M_T C_x^T + M_A C_x^A).$$

□

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Calcular la energía cinética de una **superficie** cónica de radio de la base R y altura h (puede suponerse que el vértice está en el origen, y el cono va "hacia arriba", si así es más sencillo) que tiene densidad superficial μ y gira a una velocidad angular ω alrededor de su directriz.

Proof. Es mejor poner el vértice en el origen, como se sugiere. El cono queda (tras hacer un dibujo):

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2),$$

para $z \in [0, h]$. Parametrizarlo es sencillo usando cartesianas:

$$\Psi = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{para } (x, y) \in D(R)$$

donde $D(R)$ es el disco de radio R. El vector normal es:

$$d\vec{\Psi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & hx/(R\sqrt{x^2+y^2}) \\ 0 & 1 & hy/(R\sqrt{x^2+y^2}) \end{vmatrix} = (-\frac{hx}{R\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{hy}{R\sqrt{x^2+y^2}}, 1).$$

Y el elemento de superficie es su módulo que es (es más fácil de lo que parece):

$$d\Psi = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}.$$

Hecho esto, la energía cinética de un punto (x, y, z) en rotación alrededor de un eje E a velocidad angular ω es:

$$E_c(x, y, z) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 d_E(x, y, z)^2 dx\,dy\,dz$$

y la distancia a la directriz es, en estas coordenadas, $\sqrt{x^2+y^2}$. Por tanto, se tiene

$$E_c(x,y,z) = \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2)dx\,dy\,dz.$$

Así que tenemos que calcular la suma de E_c en la superficie del cono:

$$E_c = \int_\Psi E_c(x,y,z)\,d\Psi = \int_{D(R)} \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}\,dx\,dy$$

que se hace muy fácilmente en polares (sin olvidar cambiar de variables, claro). □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcular la longitud de la curva de ecuación, en coordenadas polares, $\rho = e^\theta$, para $\theta \in [0,1]$.

Proof. En cartesianas:

$$\begin{cases} x = e^\theta \cos\theta & \dot{x} = -e^\theta \sin\theta + e^\theta \cos\theta \\ y = e^\theta \sin\theta & \dot{y} = e^\theta \cos\theta + e^\theta \sin\theta \end{cases}$$

y el elemento de longitud es (tras simplificar las cuentas): $d\gamma = \sqrt{2}e^\theta$. Por tanto, la longitud pedida es

$$l = \int_\gamma d\gamma = \int_0^1 e^\theta \sqrt{2}d\theta = \sqrt{2}(e-1).$$

□

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Un sólido tiene el centro de masas (respecto de un cierto sistema de coordenadas) en el punto $C = (C_x, 0, 0)$. Se sabe que su masa es de 100kg. ¿Es cierto que su momento de inercia respecto del eje OY de dicho sistema de coordenadas es aprox. $100C_x^2$ kgm^2?

Proof. No, no tiene por qué, en absoluto. Para empezar, no se está teniendo en cuenta que los puntos no tienen por qué estar en el eje OX. Además, y esto es lo más importante, el momento de inercia no puede referirse al centro de masas: si el objeto estuviera en el origen de coordenadas, tendría momento de inercia 0. Más aun, si un objeto estuviera compuesto de un punto de masa de 50kg en el origen y un punto de masa de 50kg en el punto $(2C_x, 0, 0)$, el centro de masas estaría en $(C_x, 0, 0)$ pero el momento pedido sería $200C_x^2$. □

Ejercicio 7 (1 punto)**.** Alguien intenta calcular el área de la superficie cónica $x^2+y^2 = z^2$ para $z \in [0,1]$ razonando así: "para cada z, corto la superficie por el plano $Z = z$. Obtengo una circunferencia de radio $\sqrt{z}$, cuya longitud es $2\pi\sqrt{z}$. Ahora sumo (integro) esto desde 0 hasta 1: $\int_0^1 2\pi\sqrt{z}\,dz$ y me sale $4\pi/3$". (La integral está bien hecha, de eso no hay que preocuparse). Se sabe que el área verdadera es π. ¿Dónde está la confusión?

Proof. En este ejercicio hay muchas confusiones (muchas). El radio no es $\sqrt{z}$ sino z, el valor correcto del área es $\sqrt{2}\pi$, no π... Pero la clave del error es que *no se puede cortar una superficie por planos que no son perpendiculares a ella para calcular su área.* Por eso hay que hacer todo el montaje del vector normal y su módulo: porque las coordenadas cartesianas casi nunca son perpendiculares a la superficie. En el caso de un cilindro, por ejemplo, puede hacerse así y el valor es correcto. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (4 puntos (2 + 2)). Se considera el campo $\vec{X} = (-y, x, z^2)$ y las superficies S_1 y S_2, donde S_1 es la semiesfera de radio R y centro $(0,0,0)$ para $z \geq 0$, y S_2 el disco de radio R centrado en $(0,0,0)$ y contenido en el plano XY. Se pide:

(1) Comprobar el Teorema de Stokes para X y S_1.
(2) Comprobar el Teorema de Gauss para X y la superficie cerrada formada por la unión de S_1 y S_2.

Nota: el cálculo correcto de rotacionales, divergencias, etc... es *imprescindible*.

Solución. **Parte 1**: necesitamos el rotacional de $\vec{X}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z^2 \end{vmatrix} = (0,0,2).$$

Ahora parametrizamos S_1 utilizando longitud θ y latitud ϕ, en ese orden:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = R\cos\theta\sin\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\phi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi/2]$$

(cuidado con los límites de ϕ). El vector normal, en esta parametrización, es

$$d\vec{S}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\sin\theta\sin\phi & R\cos\theta\sin\phi & 0 \\ R\cos\theta\cos\phi & R\sin\theta\cos\phi & -R\sin\phi \end{vmatrix} =$$
$$-R^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi).$$

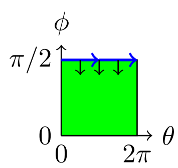
Por tanto, el flujo del rotacional de $\vec{X}$ en S_1 es:

$$\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{X} d\vec{S}_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} -R^2\sin\phi(0,0,2)\cdot(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)\,d\phi\,d\theta$$

que es

$$-2R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\,d\phi\,d\theta = -2R^2\pi.$$

Por otro lado, la curva del borde de S_1 (la circunferencia de radio R y centro $(0,0,0)$ del plano XY), *con ese orden de variables* θ, ϕ, corresponde a dejar $\phi = \pi/2$ y tomar $\theta \in [0,2\pi]$. Gráficamente,



que, como se indica, deja el conjunto de los parámetros a la derecha. Por tanto, para verificar el Teorema de Stokes, hace falta cambiar el signo al trabajo que calculemos (porque solo hay una curva en el borde). Como se ha dicho, $\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ (sustituir $\phi = \pi/2$ en la parametrización de S_1). Así que

$$\dot{\gamma} = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0).$$

El trabajo de X en γ es

$$\int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0) \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\, d\theta = \int_0^{2\pi} R^2\, d\theta = 2R^2\pi.$$

Ya se ha dicho que hay que cambiarle el signo, así que hemos verificado el Teorema de Stokes en este caso: el flujo del rotacional es el trabajo en el borde.

Parte 2: Necesitamos la divergencia de X:

$$\vec{\nabla} \cdots \vec{X} = 0 + 0 + 2z = 2z.$$

La integral de la divergencia en el volumen es, por tanto

$$\int_V 2z\, dx\, dy\, dz$$

donde V es la semiesfera sólida de radio R y centro $(0,0,0)$ con $z \geq 0$. La parametrizamos en esféricas:

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad \rho \in [0,R], \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi/2], \quad |J\Phi| = \rho^2\sin\phi.$$

Por tanto, pasando a esféricas y por Fubini:

$$\int_V 2z\, dx\, dy\, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\rho\cos\phi\rho^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho = \frac{R^4\pi}{2}.$$

Por otro lado, el flujo de $\vec{X}$ en la superficie que rodea ese sólido es:

$$\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{X} d\vec{S}_2$$

siempre y cuando S_1 y S_2 estén orientadas "hacia afuera": esto es con lo que hemos de tener cuidado. Para empezar, utilizamos la parametrización de antes para S_1:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = R\cos\theta\sin\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\phi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi/2]$$

cuyo vector normal era

$$d\vec{S}_1 = -R^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi),$$

que apunta hacia el interior del conjunto. La superficie S_2 es un círculo en el plano XY, se puede parametrizar como $x = x, y = y, z = 0$ con $(x,y) \in D(R)$ donde $D(R)$ es el disco de radio R en $\mathbb{R}^2$. El vector normal de esta parametrización es (obviamente) $d\vec{S}_2 = (0,0,1)$, que también apunta hacia el interior. Por tanto, para la fórmula de Gauss, con esas parametrizaciones, debemos comprobar que

$$\int_V 2z\, dx\, dy\, dz = -\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \vec{X} d\vec{S}_2$$

porque las parametrizaciones apuntan hacia dentro. Calculemos los flujos, recordando que $X = (-y, x, z^2)$:

$$\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (-R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta\sin\phi, R^2\cos^2\phi) \cdot$$
$$\cdot(-R^2\sin\phi)(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)\, d\phi\, d\theta$$

que es más sencilla de lo que parece porque las dos primeras coordenadas se anulan y queda

$$\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 = -R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2\cos^3\phi\sin\phi\, d\phi\, d\theta = -\frac{R^4\pi}{2},$$

(la integral se calcula fácilmente teniendo en cuenta que $\cos^3\phi\sin\phi = \frac{-1}{4}(\cos^4\phi)')$.
Así pues, para verificar Gauss solo queda comprobar que el flujo de $\vec{X}$ en $S\;\;2$ es 0.

$$\int_{S_2} \vec{X} d\vec{S}_2 = \int_{D(R)} (-y, x, 0)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy$$

que es, obviamente, 0. Por tanto,

$$\int_V 2z\,dx\,dy\,dz = -\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \vec{X} d\vec{S}_2$$

que es lo que queríamos verificar: ambos miembros valen $R^4\pi/2$. □

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Se consideran el campo $\vec{X} = \vec{\nabla} f$ para $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ y la curva $\gamma(t) = (R\sin t, R\cos t, 2t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. Calcular

$$\int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma}.$$

Solución. El trabajo de un campo gradiente en una curva es la diferencia de potencial. Así que:

$$\int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma} = f(0,R,4\pi) - f(0,R,0) = (R^2 - 16\pi^2) - R^2 = -16\pi^2.$$

□

Ejercicio 3 (2 puntos (1+1))**.** Se considera el campo

$$\vec{X} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Sea γ una curva cuyo inicio es $(1,0)$ y cuyo fin es $(0,1)$. Contestar razonadamente:

(1) ¿Cuánto vale $\int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma}$?
(2) ¿Es ese valor independiente de la curva γ?

Solución. El campo es irrotacional (su rotacional es 0, ya se ha hecho en clase). Sin embargo, se sabe (de clase) que ese campo que mide ángulos: el trabajo de $\vec{X}$ en una curva que no rodea al origen es el ángulo que recorre la curva. En este caso, si γ no rodea al origen, dicho trabajo es $\pi/2$ o bien $-3pi/2$ (depende del sentido). Por tanto, el trabajo depende de dicha curva.

Este ejercicio puede hacerse con todas las cuentas (está hecho en clase) y sale sencillo, pero lo más fácil es la explicación de arriba.

Hay más explicaciones válidas, la dada arriba no es la única. □

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Sea T_0 la temperatura de un cuerpo más caliente que el ambiente y cuyo enfriamiento sigue la Ley de Newton del Enfriamiento. Sea T_a la temperatura ambiente. Comprobar que el tiempo que tarda en pasar de T_0 a $(T_0 + T_a)/2$ no depende de T_0. Obviamente, **se pide plantear la ecuación diferencial y resolverla**.

Solución. La Ley de Enfriamiento de Newton dice que el decremento de temperatura (cuando el ambiente es más frío) es proporcional al tiempo y al gradiente de temperatura. Infinitesimalmente, si $T(t)$ es la temperatura del objeto,

$$T(t+dt) - T(t) = -k(T(t) - T_a)dt$$

lo cual quiere decir que

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a).$$

Esta ecuación se resuelve, por ejemplo:

$$\frac{T'(t)}{T(t)-T_a} = -k,$$

por lo que, integrando,

$$\log(T(t)-T_a) = -kt + C,$$

y al final:

$$T(t) - T_a = C_0 e^{-kt}$$

donde, obviamente, $C_0 = T_0 - T_a$. Así pues:

$$T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Tenemos que estudiar cuánto tiempo se tarda en llegar a $(T_0 + T_a)/2$; es decir, calcular t para que

$$\frac{T_0 + T_a}{2} - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt},$$

que es lo mismo que decir:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt},$$

y esto no depende de T_0. Igual que el periodo de semidesintegración no depende de la masa inicial. □

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Dar una ecuación (no resolverla) para calcular el coeficiente de rozamiento si un objeto de 1kg lanzado hacia arriba a una velocidad de 4.99m/s tarda 1s en pasar por la altura de lanzamiento, suponiendo que $g = 10\text{m/s}^2$ y que el rozamiento es proporcional a la velocidad.

Se pide (y es imprescindible) plantear el problema gráficamente e indicar el sistema de referencia. Sin esto, el problema está **mal**.

Solución. El diagrama no lo incluyo porque es bien conocido. Denotamos por $x(t)$ la posición en el instante t, colocando el origen del sistema de coordenadas en el punto de lanzamiento, con la coordenada x positiva hacia arriba. Por tanto, la fuerza de la gravedad es *negativa* $F_g = -10$ (porque $g = 10$ y $m = 1$ y el signo es negativo porque tiende a hacer decrecer la x). La fuerza de rozamiento es contraria a la velocidad, $F_r = -r\dot{x}(t)$. Se nos dice que $x(0) = 0$ y que $\dot{x}(0) = 4.99$ (positivo porque va hacia arriba). La Segunda Ley de Newton para este problema es, por tanto:

$$1 \cdot \ddot{x}(t) = -10 - r\dot{x}(t),$$

donde r es la constante de rozamiento. Llamando $v(t)$ a $\dot{x}(t)$, la ecuación se vuelve de primer orden:

$$\dot{v}(t) = -10 - rv(t),$$

es decir

$$\dot{v}(t) = -r(v(t) + \frac{10}{r}),$$

así que

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t) + 10/r} = -r,$$

de donde se concluye que

$$v(t) + \frac{10}{r} = Ce^{-rt},$$

donde C es $v(0) + 10/r$, es decir:

$$v(t) = \left(4.99 + \frac{10}{r}\right)e^{-rt} - \frac{10}{r}.$$

Aquí se podría argumentar con energías (pero habría que aclarar que la fricción es simétrica): la velocidad al pasar por el origen otra vez debe ser la misma que al ser lanzada, pero de sentido contrario y por tanto, para $t = 1$, tendría que ser

$$-4.99 = \left(4.99 + \frac{10}{r}\right) e^{-r} - \frac{10}{r}.$$

(nótese que he sustituido t por 1 en el exponente). La r sería la solución de esa ecuación. Si alguien no quiere razonar con energías, puede integrar la función $v(t)$ para obtener $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t v(s)\, ds = (\ldots)$$

y la ecuación correspondiente es con $x(1) = 0$.

Ninguna de las dos ecuaciones que salen para r puede resolverse, así que no hay que preocuparse por despejar. $\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Calcular el momento de inercia de un cono **sólido** de densidad constante μ, de altura h y radio de la base R, respecto de un eje que pasa por el centro de la base *y está incluido en el plano de la base.*

Solución. Por comodidad con el eje, colocamos la base en el plano XY y el centro en el eje OZ. Como todos los ejes de la base son equivalentes, elegimos $E = OY$. Hacemos un diagrama del perfil del cono, con coordenadas (ρ, z) (distancia al eje OZ, altura). Según dicho diagrama, para cada altura $z \in [0, R]$, las distancias del

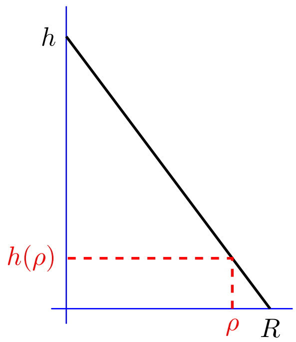


Figura 1. Perfil (ρ, z) del cono.

interior del cono van desde $\rho = 0$ hasta $\rho(z)$. Por el Teorema de Thales,

$$\frac{R}{h} = \frac{\rho(z)}{h - z}$$

de donde

$$\rho(z) = \frac{R}{h}(h - z).$$

Por tanto, en coordenadas cilíndricas (las más adecuadas para esta figura), el cono se parametriza como

$$C \equiv \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \text{ (el cono es de revolución)} \\ z \in [0, h] \\ \rho \in [0, R(h - z)/h] \end{cases}$$

El jacobiano del cambio a cilíndricas es $J = \rho$ (el mismo que el de polares). El momento de inercia I es la suma en el cono C de los momentos de inercia de cada punto, y el momento de inercia del punto (x, y, z) del cono es, si llamamos E al eje:

$$I_E(x, y, z) = d_E^2(x, y, z)\mu \, dx \, dy \, dz.$$

La distancia del punto (x, y, z) al eje $E = OY$ es $d_E(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$. Por tanto,

$$I_E(x, y, z) = (x^2 + z^2)\mu \, dx \, dy \, dz.$$

Ya se puede calcular el momento de inercia total

$$I_E(C) = \int_C (x^2 + z^2)\mu \, dx \, dy \, dz$$

cambiando a cilíndricas ($x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$), queda (ojo con el jacobiano)

$$I_E(C) = \int_C \mu(\rho^2\cos^2(\theta) + z^2)\rho\, d\theta\, d\rho\, dz =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{R(h-z)/h} \mu(\rho^3\cos^2\theta + \rho z^2)\, d\rho\, dz\, d\theta$$

que, tras hacer todas las cuentas da

$$\frac{\pi\mu(2R^2h^3 + 3R^4h)}{60}.$$

□

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Calcular el radio de un círculo que cumple las siguientes propiedades: la temperatura de cada punto es proporcional a la distancia al centro (con constante de proporcionalidad k), y la temperatura media en el círculo es k grados.

Solución. Como todo está referido al centro del círculo, colocamos este en el origen de coordenadas, para simplificar. El círculo, por tanto, es el conjunto $x^2 + y^2 \leq R^2$ y la función de la temperatura de cada punto es $T(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Si llamamos C al círculo, su área es πR^2 y la temperatura media es, por tanto,

$$\overline{T} = \frac{\int_C T(x, y)\, dx\, dy}{\pi R^2},$$

que debe ser igual a k. Solo tenemos que calcular la integral del numerador y ver si se puede despejar luego la R de la ecuación correspondiente. La integral es:

$$\int_C T(x, y)\, dx\, dy = \int_C k\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$

que, obviamente, es más fácil hacer en polares. El cambio da $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, el jacobiano es ρ y se obtiene

$$\int_C T(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R k\rho\rho\, d\rho\, d\theta = 2k\pi\frac{R^3}{3}.$$

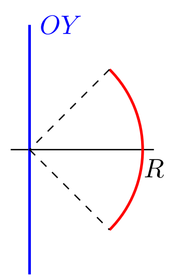
La temperatura media ha de ser k; la ecuación queda:

$$\frac{2k\pi R^3}{3\pi R^2} = k,$$

por lo que $R = 3/2$. □

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Calcular la distancia media *al eje* OY de los puntos del arco de circunferencia de centro el origen, radio R y ángulos desde $-\pi/4$ a $\pi/4$ (medidos desde el semieje positivo OX, como es habitual).

Solución. Hacemos un dibujo para aclararnos: la curva en cuestión es solo el arco de circunferencia. Indicamos el eje OY para saber desde dónde se mide la distancia. Es



bien conocido que un arco de circunferencia de radio R centrado en el origen tiene por parametrización $\gamma(\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta))$, y en este caso, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. El vector tangente es $\dot{\gamma} = (-R\sin(\theta), R\cos(\theta))d\theta$, cuyo módulo es $d\gamma = Rd\theta$. La distancia de un punto (x, y) al eje OY es, claramente $d_{OY}(x, y) = |x|$, que en este caso es $d_{OY}(x, y) = x$, porque todos los puntos están en $x > 0$. Por tanto, la distancia media es

$$\overline{d} = \frac{\int_\gamma d_{OY}(\gamma(\theta))\, d\gamma}{l(\gamma)},$$

donde $l(\gamma)$ es la longitud. La longitud de un arco de circunferencia de radio R y abertura α, es justamente $R\alpha$, así que en este caso, $l(\gamma) = R\pi/2$. La integral del numerador de $\overline{d}$ es:

$$\int_\gamma d_{OY}(\gamma(\theta))\, d\gamma = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (R\cos\theta)R\, d\theta = R^2\sqrt{2}.$$

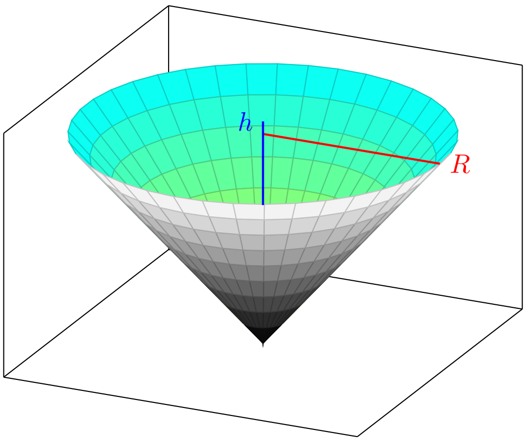
Por tanto, la distancia media es

$$\overline{d} = \frac{R^2\sqrt{2}}{R\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \simeq 0.9R.$$

$\square$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Una *superficie* cónica de densidad constante 1, (ojo: solo la parte curva, no el círculo de la base) de radio de la base R debe tener masa exactamente igual a R^2. Calcular la altura de esta superficie.

Solución. En este caso es más cómodo colocar el vértice en el origen de coordenadas (la ecuación del cono es más sencilla) y, como es habitual, tomamos OZ como la directriz (como en la figura, más o menos). Puesto que es una superficie



de revolución, es más cómodo utilizar coordenadas (ρ, θ) para parametrizarla. Un argumento similar (pero más sencillo) al usado en el Ejercicio 1, nos dice que cada punto (x, y, z) cumple que $z = \rho h/R$. Por tanto, si C es la superficie del cono:

$$C \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R]. \\ z = h\rho/R \end{cases}$$

Con esta descripción, el vector normal al cono es

$$d\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & h/R \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{h}{R}\rho\cos\theta, \frac{h}{R}\rho\sin\theta, \rho),$$

cuyo módulo es $dC = \rho\sqrt{1+h^2/R^2}$. La masa de este cono es, por tanto:

$$M(C) = \int_C \mu\, dC = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mu\rho\sqrt{1+h^2/R^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi\mu\sqrt{1+h^2/R^2}R^2/2.$$

un valor que depende de R y de h (no se puede expresar fácilmente). La altura se calcularía despejando la h en la ecuación:

$$2\pi\mu\sqrt{1+h^2/R^2}R^2/2 = R^2,$$

es decir

$$2\pi\mu\sqrt{1+h^2/R^2} = 1,$$

y se despeja fácilmente. □

Ejercicio 5 (2.5 + 2.5 puntos)**.** Se considera el campo vectorial $\vec{X} = (-y, x, z)$. Se pide:

(1) Verificar el Teorema de Stokes para el campo X en el paraboloide dado por $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

(2) Verificar el Teorema de Gauss para el campo X en el cilindro sólido de radio R, altura h, directriz el eje OZ y base en $z = 0$.

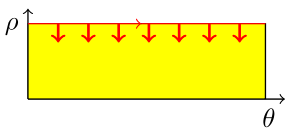
Solución. Antes de nada, calculamos el rotacional y la divergencia de $\vec{X}$ para ya tenerlos.

$$\vec{\nabla}\times\vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & z \end{vmatrix} = (0,0,2). \;\; \vec{\nabla}\cdot\vec{X} = 0+0+1 = 1.$$

(1) El paraboloide está parametrizado con x e y pero, como es de revolución, vamos a hacerlo ya en (θ, ρ). Poniendo $x^2+y^2 = \rho^2$, llamando P a la superficie, queda

$$P \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 1-\rho^2 \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi],\, 0\leq\rho\leq 1,$$

y usamos el orden de variables θ, ρ. La curva del borde es $x^2+y^2 = 1$ (la zona en la que $z = 0$), es decir, $\rho = 1$. Haciendo un diagrama, la curva del



borde se corresponde con $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho = 1$, así que deja el conjunto a la derecha: está negativamente orientada. Con esa parametrización, sale

$$d\vec{P} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, -\rho).$$

Por tanto, el flujo del rotacional es

$$\begin{aligned}\int_P \vec{\nabla}\times\vec{X}d\vec{P} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0,0,2)\cdot(-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, -\rho)\, d\rho\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho\, d\rho\, d\theta = -2\pi.\end{aligned}$$

La curva en cuestión es $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, cuyo vector tangente es $\dot{\gamma}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Así pues, el trabajo es:

$$\int_0^{2\pi} \vec{X} d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta + cos^2\theta\, d\theta = 2\pi.$$

Como la curva está negativamente orientada, el valor del trabajo hay que cambiarlo de signo y hemos verificado Stokes.

(2) El cilindro del enunciado tiene tres partes: la superficie vertical, que parametrizamos como $S \equiv (x, y, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$, el disco inferior $D_0 \equiv (x, y, z) = (x, y, 0)$ y el disco superior $D_1 \equiv (x, y, z) = (x, y, 1)$. El vector normal a S es, en el orden (θ, ρ) (ya lo hicimos en su día) $d\vec{S}(-R\cos\theta, -R\sin\theta, 0)$, que apunta hacia dentro, así que hay que cambiarlo de signo. El vector tangente a ambos discos, con el orden (x, y) es $(0, 0, 1)$ que, para D_0 apunta hacia dentro, y para D_1 hacia afuera. Por tanto, para la Fórmula de Gauss, hay que cambiar el signo a $d\vec{S}$ y a $d\vec{D}_0$. El flujo de $\vec{X}$ en $\vec{S}$ cambiando la orientación a $d\vec{S}$ es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-R\sin\theta, R\cos\theta, z) \cdot (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\, dz, \theta = 0.$$

El flujo de $\vec{X}$ en D_0, cambiando la orientación a $\vec{D}_0$ es:

$$\int_{D(R)} (-y, x, 0) \cdot (0, 0, -1)\, d\rho\, d\theta = 0,$$

donde $D(R)$ es el disco (en el plano (x, y) de radio R y centro $(0, 0)$). Finalmente, el flujo de $\vec{X}$ en D_1, que está bien orientado, es

$$\int_{D(R)} (-y, x, 1) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = \pi R.$$

(el área del disco $D(R)$).

Por otro lado, la divergencia de $\vec{X}$ es 1, así que la integral de la divergencia en el interior del cilindro es el volumen del cilindro, que es área de la base (πR) por altura (1), es decir, πR. Hemos verificado la fórmula de Gauss.

□

Ejercicio 6 (2.5 puntos)**.** ¿Cuánto tarda un objeto en enfriarse a 50° si comienza a 100°, la constante de enfriamiento de Newton es $0.1/s$ y la temperatura ambiente es 30°? **Importante**: hace falta *plantear* la ecuación diferencial correspondiente y resolverla.

Solución. La ecuación del enfriamiento de Newton es la ley "el enfriamiento es proporcional al gradiente de temperatura y al tiempo". Si $T(t)$ es la temperatura en tiempo t,

$$T(t + dt) = -k(T(t) - T_a),$$

donde T_a es la temp. ambiente. En este caso,

$$T(t + dt) = -0.1(T(t) - 30).$$

La solución de esta ecuación es (omito las cuentas, ya hechas muchas veces):

$$T(t) = (T(0) - 30)e^{-0.1t} + 30.$$

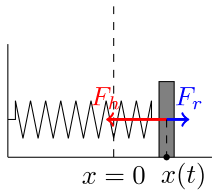
Como $T(0) = 100$, sale
$$T(t) = 70e^{-0.1t} + 30.$$
Para saber cuándo llega a 50, basta resolver
$$50 = 70e^{-0.1t} + 30,$$
es decir
$$t = -10\log(2/7) \simeq 12.53\text{s}.$$
□

Ejercicio 7 (2.5 puntos (1.5 + 1))**.** Dos partes:

(1) Se considera un muelle *horizontal* fijo por un extremo y con una masa de 1kg conectada al otro. Se supone que el rozamiento es proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $r = 0.01$kg/s y que la constante de Hooke es $h = 0.5\text{kg/s}^2$. Se estira 1m y *se suelta*. Calcular *el periodo completo* (es decir, el tiempo que tarda en ir desde un extremo hasta el otro y volver). **Nota**: hay que plantear la ecuación diferencial con un diagrama para que cuente.

(2) Si se desconocen los valores de r y h, pero se sabe que ambos son estrictamente positivos: ¿es posible que las raíces del polinomio asociado sean $0.1 \pm 2i$? ¿y que sean $\pm 3i$?

Solución. El diagrama que sigue indica las fuerzas que hay que tener en consideración (solo la de Hooke y la de rozamiento). Si llamamos $x(t)$ a la posición del



objeto en el instante t y $x = 0$ es el punto de reposo del muelle, la Segunda Ley de Newton nos dice que
$$m\ddot{x}(t) = F_h + F_r$$
La Ley de Hooke, en esas coordenadas es $F_h = -kx(t)$, mientras que el rozamiento, tal como nos lo enuncian, es $F_r = -r\dot{x}(t)$ (proporcional a la velocidad pero de sentido contrario). Ahora:

(1) Tomando los valores del enunciado, se obtiene la ecuación diferencial
$$\ddot{x}(t) = -0.5x(t) - 0.01\dot{x}(t),$$
que se puede escribir
$$\ddot{x}(t) + 0.01\dot{x}(t) + 0.5x(t) = 0.$$
Para resolver esta ecuación hace falta resolver el polinomio asociado:
$$T^2 + 0.01T + 0.5 = 0,$$
que da
$$T = \frac{-0.01 \pm \sqrt{0.0001 - 2}}{2} \simeq -0.005 \pm 0.707i.$$
Las soluciones de la ecuación, son por tanto, de la forma
$$x(t) \simeq e^{-0.005t}(A\cos(0.707t) + B\sin(0.707t)) = e^{-0.005t}(K\cos(0.707t + \omega_0),$$

donde K es una constante (la amplitud) y ω_0 es el desfase, otra constante. El periodo es justamente el periodo de la función $\cos(0.707t + \omega_0)$, que es $\lambda = 2\pi/0.707$. Obsérvese que *para resolver esta parte no hacen falta ni la posición ni la velocidad inicial.*

(2) A la primera pregunta se ha de responder que no, porque la parte real de las raíces da la intensidad del amortiguamiento (el exponente de e en la solución): si este exponente es positivo, en lugar de amortiguamiento, hay crecimiento de la onda y esto no es físicamente posible sin motores. A la segunda pregunta, también se ha de contestar que no porque sin parte real no hay amortiguamiento: por tanto no hay pérdida de energía mecánica, pero esto es justamente lo que es el *rozamiento*, y se nos dice que es positivo.

$\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Se consideran dos esferas *sólidas*, de radios respectivos r_1 y r_2, y de densidades μ_1 y μ_2, constantes. Ambas son mutuamente tangentes. Calcúlese el momento de inercia del sólido formado por ambas, respecto de un eje E que es tangente a las dos y pasa por el punto de tangencia mutuo.

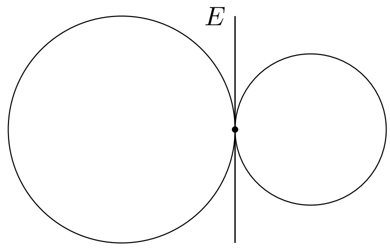


Figura 1. Corte esquemático del Ejercicio 1.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Se considera la espiral $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t)$ para $t \in [0, 2\pi]$. Calcular la temperatura media si la de cada punto es proporcional a la distancia a la recta $x = 3, y = 0$.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Considérese el campo $\vec{X} = (-y^2, x^2, z^2)$ y la superficie cónica de altura h, radio de la base R, con la base incluida en el plano XY (atención: solo la superficie curva, no la "base"). Verifíquese el Teorema de Stokes para dicho campo y dicha superficie.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Calcular el centro de masas de la parte de la superficie esférica de centro $(0, 0, 0)$ y de radio R que queda por encima del cono $x^2 + y^2 = z^2$ si la densidad es constante, μ.

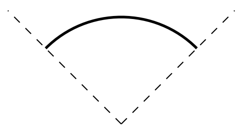


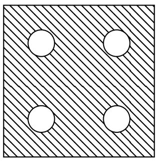
Figura 2. Corte esquemático del ejercicio 3.

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Un muelle horizontal sin rozamiento se estira una distancia d respecto de la posición de reposo y se suelta. La constante elástica del muelle es k. Calcular cuánto tardará en pasar por el punto de reposo por primera vez.

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Calcular la cuota de un préstamo de 10.000€ si el interés es del 4% anual y se paga en 5 años.

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.
La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Se considera un cubo de lado l y densidad μ y un eje E paralelo a cuatro aristas que pasa por el centro de dos caras. A este cubo se le taladran cuatro agujeros cilíndricos (que lo traspasan por completo) paralelos al eje, de radio r y cuyo centros están en los puntos medios de los segmentos que van del centro de la cara a sus vértices. Calcular el momento de inercia del objeto resultante respecto de E. Se muestra una planta de la figura, sin dimensiones.



Solución. Colocamos la figura de manera que el eje OZ sea el del momento de inercia y las aristas paralelas vayan de $z = 0$ a $z = l$. La figura consta de 4 partes simétricas dos a dos respecto de los planos XOZ e YOZ y la densidad es constante, así que basta con calcular el momento de inercia de la parte del primer cuadrante y multiplicar por 4. Llamemos a esta cuarta parte C.

Si A es la parte del cubo y B la del cilindro correspondiente, por las propiedades de la integración $I_{OZ}(C) = I_{OZ}(A) - I_{OZ}(B)$. Así vamos a calcularlo.

El conjunto A se parametriza como $x \in [0, l/2]$, $y \in [0, l/2]$ y $z \in [0, l]$. Su momento de inercia respecto de OZ es

$$I_{OZ}(A) = \int_0^{l/2} \int_0^{l/2} \int_0^{l} \mu(x^2 + y^2)\, dz\, dx\, dy$$

(Ojo al límite superior de la z).

Para calcular el momento de inercia de B, utilizamos el Teorema de Steiner. Si F es el eje del cilindro B, al ser paralelo a E, y estar a una distancia $l\frac{\sqrt{2}}{8}$, se tendrá que

$$I_E(B) = I_F(B) + M\frac{l^2}{16}.$$

Donde M es la masa del cilindro, en este caso $M = \mu\pi r^2 l$.

El momento de inercia $I_F(B)$ es (tras pasar a polares):

$$I_F(B) = \int_0^{l} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \mu\rho^2 \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

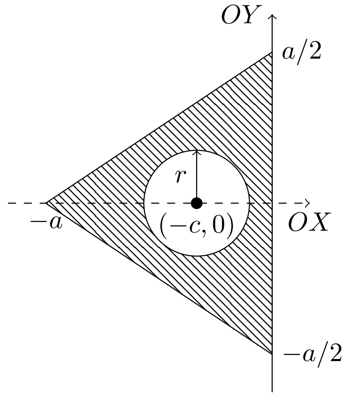
y con todo esto ya se puede saber cuál es el momento pedido. □

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Se considera una pieza plana que tiene la forma del diagrama de abajo, donde a, c y r son números reales positivos. Se pide calcular la media de la distancia elevada al cuadrado de los puntos de la figura al eje OY.

Solución. Si P es la pieza, T es el triángulo y C es el círculo, y si $\overline{D}$ es la media pedida de la distancia al cuadrado:

$$\overline{D} = \frac{\int_P d^2(x, y)\, dx\, dy}{A_P}$$

donde A_P es el área de la pieza, que *evidentemente* es: $A_P = a^2/2 - \pi r^2$.



La función $d(x,y)$ es $d(x,y) = |x|$, por lo que $d^2(x,y) = x^2$. La integral del numerador, por las propiedades de la integral, es

$$\int_P d^2(x,y)\,dx\,dy = \int_T x^2\,dx\,dy - \int_C x^2\,dx\,dy.$$

La primera integral es elemental, sin más que saber delimitar el triángulo (el lado inferior tiene ecuación $Y = -x/2 - a/2$ y el superior $Y = x/2 + a/2$). La segunda integral es elemental haciéndola en polares *centradas en el centro del círculo.* □

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Calcular el centro de masas del arco de espiral de densidad constante descrito por $(R\cos t, R\sin t, at)$ para $R > 0, a > 0$ y $t \in [0,\pi]$.

Solución. Si las coordenadas del centro de masas son (C_x, C_y, C_z), por simetría y puesto que la densidad es constante, $C_x = 0$ y $C_z = \frac{a\pi}{2}$. Solo resta calcular C_y. Para ello necesitamos el vector tangente a la curva:

$$d\overline{\gamma} = (-R\sin t, R\cos t, a)$$

cuyo módulo es $d\gamma = \sqrt{R^2+a^2}$. La masa de dicho arco es $M = \int_0^\pi \mu\sqrt{R^2+a^2}\,dt$, que es $\mu\pi\sqrt{R^2+a^2}$.

La coordenada C_y es, por tanto:

$$C_y = \frac{1}{\mu\pi\sqrt{R^2+a^2}}\int_0^\pi \mu R\sin t\sqrt{R^2+a^2}\,dt = \frac{2R}{\pi}.$$

□

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Un sólido tiene un momento de inercia I_1 respecto de un eje E_1 y otro I_2 respecto de un eje paralelo E_2. Si $I_1 > I_2$, ¿qué se puede decir de los ejes E_1 y E_2?

Solución. Que si E es el eje paralelo a ambos que pasa por el centro de masas del sólido, entonces el eje E_1 está más lejos de E que el E_2, por el Teorema de Steiner.

Importante: “Estar más lejos de un cuerpo” no tiene mucho sentido porque ambos ejes pueden “pasar por el cuerpo”. La clave en este problema no es el sólido, es su centro de masas. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.
La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Calcular el momento de inercia respecto del eje OZ de la *superficie* de densidad constante μ compuesta de las siguientes dos partes:

- La mitad del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que cumple que $x \geq 0$, y $0 \leq z \leq 2$
- El rectángulo que une las aristas paralelas de dicha mitad del cilindro.

Un dibujo lo aclara todo.

Prueba. Si C es la superficie cilíndrica, puede parametrizarse como

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z \in [0,2]. \\ z = z \end{cases}$$

El vector normal es, en orden (θ, z)

$$d\overline{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Su módulo es $dC = 1$.

La superficie plana P es $x = 0, y = y, z = z$ con $y \in [-1, 2]$ y $z \in [0, 2]$. El vector normal a P con esa parametrización es $(1, 0, 0)$ (esto es evidente). Su módulo es $dP = 1$.

La distancia de un punto (x, y, z) al eje OZ es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Como la densidad es constante, el momento de C es (todos sus puntos están a distancia 1 del eje OZ)

$$I_{OZ}(C) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \mu \cdot 1^2 \cdot 1 \, dz \, d\theta = 2\pi\mu.$$

El momento de la pieza plana P es, teniendo en cuenta que $x = 0$ en P:

$$I_{OZ}(P) = \int_{-1}^{1} \int_0^2 \mu(y^2) \, dz \, dy = \frac{4\mu}{3}.$$

□

Ejercicio 2 (4 puntos: 2 + 2)**.** Se considera: la superficie cónica S_1 de vértice $(0, 0, 1)$ y base la circunferencia de radio 2 y centro $(0, 0, 0)$ contenida en el plano $Z = 0$ y la superficie S_2 que consiste en el círculo de radio 2, centro $(0, 0, 0)$ contenido en el plano $Z = 0$ (la "tapa" del cono). Sea $\vec{X}$ el campo

$$X = (-y, x, x^2 + y^2 + z^2).$$

Se pide:

(1) Comprobar el Teorema de Stokes para S_1 y su borde.
(2) Comprobar el Teorema de Gauss para S_1, S_2 y el volumen que encierran

Solución. Antes de nada, parametricemos cada parte. El cono S_1 es, en implícitas, $(z-1)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ (haciendo el argumento clásico del Teorema de Thales, por ejemplo). Si lo parametrizamos como ángulo-distancia, podemos poner

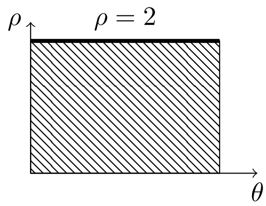
$$S_1 \equiv \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad , \; \rho \in [0,2], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = 1 - \rho/2 \end{cases}$$

La normal en el orden (θ, ρ) es:

$$d\overline{S}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -1/2 \end{vmatrix} = (-\frac{\rho\cos\theta}{2}, -\frac{\rho\sin\theta}{2}, -\rho)$$

que apunta hacia el origen de coordenadas. Cuando verifiquemos la fórmula de Gauss habrá que orientarlo al revés para que la normal sea exterior al cono sólido.

En estas coordenadas y en ese orden, la curva γ que corresponde al borde es $\rho = 2$. Si dibujamos en el orden (θ, ρ):



La curva η dada por $\rho = 2$, para que esté positivamente orientada respecto del dominio de S_1, ha de parametrizarse como $\eta(t) = (2\pi - \theta, 2)$ para $\theta \in [0, 2\pi]$. Esta curva, llevada mediante la parametrización de S_1 al espacio, da $\gamma = (2\cos(2\pi - \theta), 2\sin(2\pi - \theta), 0) = (2\cos\theta, -2\sin\theta, 0)$, que es el borde del cono "bien parametrizado" para poder aplicar Stokes.

Fin de la parte 1. Ahora ya puede comprobarse la fórmula de Stokes con S_1 y γ.

Para la fórmula de Gauss, necesitamos parametrizar S_2 y el cono sólido.

La superficie S_2 se parametriza como $(x, y, 0)$ con $(x, y) \in D_2$, donde D_2 es el círculo de radio 2 y centro el origen de coordenadas. Como la normal en el orden (x, y) apunta hacia el interior del cono, ha de tomarse la normal en el orden (y, x), a la hora de hacer la fórmula de Gauss.

El volumen encerrado por S_1 y S_2 es el interior del cono, que se puede parametrizar en cilíndricas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array} \right. \quad \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1].$$

Ahora no hay más que calcular las integrales de ambas fórmulas y verificar que estas se cumplen (esto es mecánico). Cuidado porque *la divergencia de* $\overline{X}$ *es* $\overline{\nabla} \cdot \overline{X} = 2z$. □

Ejercicio 3 (1 punto)**.** En este ejercicio se pide también **plantear la ecuación diferencial explicando de dónde sale**. ¿Cuál es el préstamo pedido si tras 10 años pagando cuotas de 100€ al mes al 5% de interés anual quedan aún 2000€ por pagar?

Solución. Hecho (o algo similar) en los ejercicios. □

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** En este ejercicio se pide también **plantear la ecuación diferencial correspondiente explicando de dónde sale**. Se considera un cuerpo de masa m en un extremo de un muelle horizontal sujeto a una pared por el otro extremo, con rozamiento proporcional a la velocidad. Se estira el muelle una longitud l respecto de su reposo y se *suelta*. ¿Tiene alguna influencia el rozamiento en la frecuencia con que el muelle pasa por el punto de reposo? Se supone que el rozamiento es muy pequeño comparado con la constante de Hooke.

Solución. Hecho en los ejercicios. Es evidente que influye porque la constante del rozamiento aparece en la parte imaginaria de las raíces del polinomio asociado a la ecuación diferencial (esta parte imaginaria no es nula porque la constante de rozamiento es menor que la de Hooke).

Importante: La segunda ley de Newton es

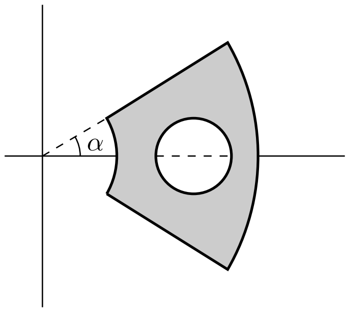
$$\overline{F}_h + \overline{F}_r = m\overline{a}$$

en cualquier caso. $\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Se considera una pieza plana como la de la figura, de densidad constante. El agujero del centro es un círculo de radio 1/4 centrado en $(2, 0)$. Se pide: calcular su centro de masas. El ángulo α es $\pi/6$. El radio mayor de la pieza es 3 y el radio menor, 1.



Solución. La figura es simétrica respecto del eje OX y la densidad es constante: la coordenada y del centro de masas es 0. Pongamos que el centro de masas es $(C_x, 0)$. Hemos de calcular solo C_x. Como la pieza es una grande (el sector circular desde $r = 1$ hasta $r = 3$, llamémoslo S) a la que se quita una pequeña (el disco sólido D), se puede utilizar la fórmula:

$$C_x^S = \frac{m(P)C_x + m(D)C_x^D}{m(P) + m(D)}$$

donde $m(P)$ y $m(D)$ son las masas respectivas de la pieza y el disco y C_x^S y C_x^D son el centro de masas del sector y del disco, respectivamente.

El disco tiene su centro de masas en su centro geométrico porque la densidad es constante: $C_x^D = 2$. Su masa es $m(D) = \pi/16\mu$, si μ es la densidad.

El sector puede parametrizarse en polares así:

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \ \rho \in [1, 3],\ \theta \in [-\alpha, \alpha]$$

por tanto

$$C_x^S = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_1^3 \mu\rho\cos\theta\rho\, d\rho\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_1^3 \mu\rho\, d\rho\, d\theta} = \frac{9 - (1/3)(2\sin\alpha)}{8\alpha}.$$

Despejando en la fórmula de arriba:

$$C_x = \frac{m(S)C_x^S - m(D)C_x^D}{m(S) - m(D)}$$

y sustituyendo los valores calculados se termina. □

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Calcular la densidad media de una semiesfera sólida de radio 1000km si la densidad del centro es 1000kg/m^3 y es proporcional al cuadrado de la distancia al centro.

Solución. Si centramos las coordenadas en el centro de la esfera, la temperatura es $T(x,y,z) = k(1000 - \sqrt{x^2 - y^2 - z^2})^2$ y vale 1000 en 0, así que $k = 1$. En esféricas, $T(x,y,z) = (1000-\rho)^2$. El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. La temperatura media es:

$$\overline{T} = \frac{\int_S T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{V}.$$

Donde S denota la esfera sólida. En esféricas, teniendo en cuenta que el jacobiano es $\rho^2 \sin\phi$:

$$\int_S T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{1000}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1000-\rho)^2\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho = \frac{4\cdot 10^{14}\pi}{3}.$$

La temperatura media es la división de esto por V. $\square$

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Se consideran el campo de vectores $\overline{X} = (x^2+y^3, 3y^2+z, y+z^3)$ y la curva $\gamma = ((t^2-t)e^t, t^2-t, t\sin(\pi t))$, para $t\in[0,1]$. Se pide calcular

$$\int_\gamma \overline{X}\,d\overline{\gamma}$$

Solución. El rotacional del campo es:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+y^3 & 3y^2+z & y+z^3 \end{vmatrix} = (0,0,-3y^2)$$

que *no es* $(0,0,0)$, así que $\overline{X}$ no es un gradiente. Por tanto, habría que hacer la cuenta entera:

$$\int_\gamma \overline{X}\,d\overline{\gamma} = \int_0^1((t^2-t)^2e^t + (t^2-t)^3, 3(t^2-t)^2 + t\sin(\pi t), (t^2-t) + t^3\sin\pi t)\cdot$$
$$((2t-1)e^t + (t^2-t)e^t, 2t-1, \sin\pi t + t\cos\pi t)\,dt = \cdots$$

que basta dejar indicada. $\square$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Se consideran el campo $\overline{X} = (-y,x,z)$ y la superficie S que es el cono de vértice $(0,0,0)$ con radio de la base 1 que va desde $z=0$ hasta $z=1$. Se pide comprobar el Teorema de Gauss para dicho campo y dicha superficie.

Solución. La parametrización de dicha semiesfera puede ser:

$$x = \cos\theta\sin\phi, y = \sin\theta\sin\phi, z = \cos\phi,\ \ \theta\in[0,2\pi], \phi\in[0,\pi/2].$$

El vector normal es

$$d\overline{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi).$$

que cumple $d\overline{S} = -\sin\phi(x,y,z)$ en la superficie. Por tanto, el producto escalar

$$\overline{X}\cdot d\overline{S} = -sen\phi\cos^2\phi.$$

Así pues, el flujo pedido es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\sin\phi\cos^2\phi\,d\phi\,d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

$\square$

Ejercicio 5 (2 puntos (1+1))**.** Un muelle horizontal está fijo por un extremo y tiene una masa de 1kg unida a su otro extremo; el rozamiento es proporcional a la velocidad. La constante de Hooke es κ y la constante de rozamiento es ρ. El muelle mide, en reposo, l. Se *estira* una longitud d y *se suelta.* Se pide:

(1) Plantear (explicándola con un gráfico) la ecuación diferencial que rige el movimiento del muelle. No se pide *resolverla.*
(2) ¿Puedes asegurar que la frecuencia de paso por el punto de reposo es constante?

Solución. Colocamos el origen de coordenadas en el punto de reposo del muelle (la longitud l es, por tanto, irrelevante). La fuerza de Hooke en estas coordenadas es $F_H = -\kappa x(t)$ y la fuerza de rozamiento es $F_r = -\rho \dot{x}(t)$, al ser contraria al movimiento. La segunda ley de Newton nos dice que:

$$ma = F_H + F_r = -\kappa x(t) - \rho \dot{x}(t)$$

y como $m = 1$ y $a = \ddot{x}(t)$, queda

$$\ddot{x}(t) = -\kappa x(t) - \rho \dot{x}(t).$$

Para la segunda parte, como la ecuación es homogénea, las soluciones de la homogénea son ya las de la ecuación. La ecuación diferencial es, escrita como habitualmente:

$$Y'' + \rho Y' + \kappa Y = 0.$$

El polinomio asociado es $T^2 + \rho T + \kappa$, cuyas raíces son

$$T = \frac{-\rho \pm sqrt \rho^2 - 4\kappa}{2}.$$

Si el rozamiento es suficientemente pequeño, las raíces son complejas conjugadas: $T = a \pm bi$ y el movimiento viene dado por:

$$x(t) = e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$$

para ciertas A y B que dependen de las condiciones iniciales. Por tanto, la frecuencia de paso por el origen *no depende de A y B* sino solo de b y, sí, es constante, pues $b = \sqrt{\rho^2 - 4\kappa}/2$, que es constante. $\square$

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.
La puntuación **depende del modo de resolución**.
Para que un problema pueda sumar, las parametrizaciones han de estar bien.

Ejercicio 1 (4 puntos (2+2)). Considérese la superficie esférica de centro $(0,0,0)$ y radio R. Tómese la parte que está por debajo del plano $z = R/2$ (lo que queda tiene la forma de una "pecera redonda", o un bol). Considérese el campo de vectores $\vec{X} = (x, y+z, z)$. Se pide:

- Comprobar el teorema de Stokes para dicha superficie y dicho campo.
- Comprobar el teorema de Gauss para el volumen encerrado por dicha superficie y el círculo que la tapa (el que está delimitado por la circunferencia del corte de la esfera y el plano).

Nota: Si φ, θ son la latitud (respecto del polo norte) y la longitud, respectivamente, y la esfera se parametriza como

$$\Psi(\varphi, \theta) = (R\cos\theta \sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$$

entonces el vector normal es (en ese orden de coordenadas: φ, θ):

$$R^2 \sin\varphi(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi),$$

y su módulo es $R^2 \sin\varphi$.
Esto se indica para que no haya que hacer tres millones de cuentas.
Pero *el determinante necesario para calcular el vector normal hay que escribirlo.*

Solución. Antes de nada, calculamos el rotacional y la divergencia del campo $\vec{X}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y+z & z \end{vmatrix} = (-1, 0, 0), \quad \vec{\nabla} \cdot X = 3.$$

Se nos dice que el plano está a altura $R/2$. Si consideramos las coordenadas φ, θ que se nos indican, el ángulo φ debe ser tal que

$$\cos(\varphi) = 1/2$$

lo cual significa que $\varphi = \pi/3$. Esto quiere decir que la circunferencia de corte del plano $Z = R/2$ y la esfera tiene radio:

$$r = \sin(\pi/3)R = \sqrt{3}R/2.$$

(1) Para el Teorema de Stokes, está claro que solo hay una curva en el borde (la circunferencia de corte con el plano). Hemos de relacionar el flujo de $\vec{\nabla} \times \vec{X}$ en la única superficie que hay, con el trabajo de $\vec{X}$ en la circunferencia *con la orientación adecuada*. Calculemos primero el flujo. Llamemos S_1 a la superficie esférica bajo el plano. Se puede parametrizar como

$$S_1(\varphi, \theta) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi),\ \varphi \in [\pi/3, \pi], \theta \in [0, 2\pi],$$

(ojo a los límites de φ) y el vector normal es el que nos dicen en el enunciado. El flujo del rotaional es (una vez hecho el producto escalar):

$$\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{X} dS_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} -R^2 \sin\varphi R\cos\theta\sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

el signo menos viene del rotacional. Esta integral es directa porque aparece multiplicando $\cos\theta$ con límites $0, 2\pi$, así que

$$\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{X} dS_1 = 0.$$

IMPORTANTE. Como el flujo es 0, el trabajo total en el borde de la superficie tendrá que ser 0, *y como solo hay una curva en el borde*, el trabajo en esta curva ha de ser 0: por tanto, *no importa cómo orientemos la curva*. Así que podemos olvidarnos de la orientación. *Esto hay que decirlo*, calcular el trabajo "sin más" sin hablar de la orientación no está justificado.

Dicho lo anterior, la curva puede parametrizarse, por ejemplo, como $\gamma(t) = (\sqrt{3}R/2\sin\theta, \sqrt{3}R/2\cos\theta, R/2)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, cuyo vector normal es $(\sqrt{3}R/2\cos\theta, -\sqrt{3}R/2\cos\theta, 0)$. El campo $\vec{X}$ sobre la curva es:

$$\vec{X} = (\sqrt{3}R/2\sin\theta, \sqrt{3}R/2\cos\theta + R/2, R/2), \text{ (en la curva)},$$

y por tanto

$$\int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (3R/4\sin\theta\cos\theta - 3R/4\cos\theta\sin\theta + 0)\, d\theta = 0.$$

Y se verifica que:

$$\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{X} d\vec{S_1} = \int_\gamma \vec{X} d\vec{\gamma}$$

con las orientaciones adecuadas.

(2) **Este es el problema más complicado del examen**. Para el teorema de Gauss, necesitamos parametrizar también la superficie S_2 del disco bordeado por γ. Lo más sencillo es hacer

$$S_2(x, y) = (x, y, R/2),\ (x, y) \in D$$

donde D es el conjunto plano descrito por $x^2 + y^2 \leq 3R^2/4$ (disco de radio $\sqrt{3}R/2$). Su vector normal es $(0, 0, 1)$ en el orden de variables (x, y), que apunta hacia afuera.

El vector normal que hemos calculado arriba para S_1 es, para $\varphi = \pi/2, \theta = 0$ el vector $R^2(1, 0, 0)$, que apunta también hacia afuera. Por tanto, estas orientaciones nos sirven.

El volumen encerrado por el cuerpo es: la parte de la esfera delimitada por $\theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R], \varphi \in [\pi/3, \pi]$ (llamemos a estgo V_1) **más** (cuidado con esto) el cono de vértice $(0, 0, 0)$, altura $R/2$ y base de radio $\sqrt{3}R/2$ (mucho cuidado) (llamemos a esto V_2).

La integral de la divergencia es, en V_1, utilizando esféricas con su jacobiano:

$$\int_{V_1} 3\, dx\, dy\, dz = 3\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi}\int_0^R \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi, d\theta = 3\pi R^3.$$

La misma divergencia en V_2 es $3 \times \mathrm{vol}(V_2)$ y el volumen de un cono es *área de la base por altura partido por* 3, así que:

$$\int_{V_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{X}\, dx\, dy\, dz = 3\frac{R}{2}\frac{3R^2}{12}\pi = \frac{3R^3}{8}\pi.$$

El Teorema de Gauss dice que ese valor ha de ser

$$\int_{S_1} \vec{X} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{X} d\vec{S}_2$$

donde S_1 y S_2 son las de arriba con las orientaciones (φ, θ) y (x, y).

La integral en S_2 es la más sencilla:

$$\int_{S_2} \vec{X} \cdot d\vec{S}_2 = \int_D (x, y + R/2, R/2) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = \int_D \frac{R}{2}\, dx\, dy$$

donde D es el disco de radio $\sqrt{3}R/2$, por tanto:

$$\int_{S_2} \vec{X} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R^2\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} R^3.$$

La integral en S_1 es:

$$\int_{S_1} \vec{X} \cdot d\vec{S}_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} (R\cos\theta \sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi + R\cos\varphi, R\cos\varphi) \cdot$$
$$R^2 \sin\varphi (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

que, analizando un poco el integrando, es:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} R^2 \sin\varphi (R + R\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

porque se está multiplicando $R^2 \sin\varphi(x, y + z, z)$ por (x, y, z) en una esfera de radio R. Queda la suma:

$$2\pi R^3 (1 + 1/2) + 0 = 3\pi R^3,$$

el 0 es por el $\sin\theta$ con límites entre 0 y 2π.

Y la suma de ambos valores es la misma suma que la integral de la divergencia.

□

Ejercicio 2 (4 puntos (2+2))**.** Considérese un muelle en horizontal, sujeto por un extremo a una pared y con una masa de $m$kg en el otro extremo. El rozamiento es proporcional a la velocidad, con constante $r = 0.01$ (en las unidades adecuadas), mientras que la constante de Hooke es $h = 0.1$. Se estira 0.1m y *se suelta*. Se pide:

- *Hacer un diagrama* y explicar cómo y por qué se plantea la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema.
- Calcular en qué momento pasa por segunda vez por el punto de reposo del muelle (si queda una ecuación muy complicada, dejarla planteada).

Solución. Veamos:

(1) La primera parte está hecha en clase, los apuntes, etc... Pero, si $x(t)$ es la posición *respecto del punto de reposo*: la fuerza de rozamiento es $F_R = -0.01\dot{x}(t)$ y la fuerza elástica es $F_H = -0.1x(t)$. Poner estas con signo positivo y luego “restar” en la Ley de Newton anula este apartado (obviamente).

(2) Para la segunda parte (hecha en clase, etc.): hay que “calcular” *el tiempo t_0 que tarda en llegar por primera vez a $x = 0$* (sin este tiempo el problema está mal, y este tiempo *no es un cuarto de periodo*), y sumarle luego el semiperiodo (que se obtiene con las raíces del polinomio característico). Lo de menos es la solución del problema, lo importante es calcular t_0 y sumar el semiperiodo.

□

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Explicar por qué la ecuación diferencial de la semidesintegración es la que es (1 punto) y por qué el periodo de semidesintegración es una constante que no depende de la masa (1 punto).

Solución. Explicar requiere algo más que escribir la ecuación diferencial. Requiere decir que "la masa que se pierde es proporcional a la masa y al tiempo, en cada instante", y de ahí deducir la ecuación diferencial.

Explicar por qué el periodo de semidesintegración no depende de la masa requiere resolver la ecuación diferencial, ver que la solución es:

$$m(t) = M(0)e^{-kt},$$

y a partir de ahí, si T es el periodo de semidesintegración:

$$\frac{M(0)}{2} = M(0)e^{-kT},$$

de donde

$$\frac{1}{2} = e^{-kT},$$

ecuación en la que la masa no interviene. Fin. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.
La puntuación **depende del modo de resolución**.
Para que un problema pueda sumar, las parametrizaciones han de estar bien.

Ejercicio 4 (4 puntos (2+2))**.** Un cilindro de radio 1 (uno), altura 1 (uno) y densidad constante μ tiene un momento de inercia respecto de un eje perpendicular a las bases y que pasa por el centro de masas igual a πK (para cierta K, con todos los valores en un sistema de unidades fijo). Se pide:

- Calcular la densidad μ.
- Calcular el radio de una esfera que está fabricada con el mismo material, que tenga el mismo momento de inercia respecto de un eje que pasa por su centro.

Solución. Veamos:

(1) Basta calcular el momento de inercia de un cilindro con esos datos (hecho en los problemas, en clase y trivial) y despejar μ.
(2) Basta calcular el momento de inercia de una esfera con esos datos y radio R (la incógnita), cosa hecha en clase, ejercicios, etc. y despejar R.

Este ejercicio solo sirve para saber si se sabe lo que es el momento de inercia y, sobre todo, si se sabe utilizar el teorema del cambio de variables y parametrizar una esfera y un cilindro. □

Ejercicio 5 (4 puntos (2+2))**.** Se considera la curva $\gamma(t) = (e^t, e^{2t}, 1)$ para $t \in [0,1]$. Se supone que describe un cable de densidad lineal constante μ. Se pide:

- Calcular su centro de masas (no hace falta hacer las integrales con raíces cuadradas).
- Calcular su momento de inercia respecto del eje $X = Y = 0$.

Solución. Veamos: nos dan la parametrización, así que el vector velocidad es:

$$\dot{\gamma} = (e^t, 2e^{2t}, 0)dt$$

y su módulo es:

$$d\gamma = \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}dt.$$

(1) El centro de masas tiene tres coordenadas: (C_x, C_y, C_z). La C_z es 1 porque $\gamma(t)$ tiene variable z constante igual a 1.

La masa es:

$$M = \int_\gamma \mu d\gamma = \mu \int_0^1 \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}\, dt$$

que, como se nos indica, dejamos así.

La coordenada C_x:

$$C_x = \frac{1}{M}\int_0^1 \mu x d\gamma = \frac{\mu}{M}\int_0^1 e^t \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}\, dt$$

que dejamos indicada.

La coordenada C_y:

$$C_y = \frac{1}{M}\int_0^1 \mu y d\gamma = \frac{\mu}{M}\int_0^1 e^2 \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}\, dt$$

que dejamos así.

Como se ve, la μ se va (el centro de masas no depende de la densidad si es constante)

(2) El momento de inercia respecto de ese eje (que es el eje OZ) es:

$$I_{OZ}(\gamma) = \int_\gamma \mu d^2_{OZ}(\gamma(t))\, d\gamma.$$

La distancia al cuadrado respecto de OZ es siempre $x^2 + y^2$, en este caso:

$$d^2_{OZ}(\gamma(t)) = e^{2t} + e^{4t},$$

así que la integral queda

$$I_{OZ}(\gamma) = \int_0^1 (e^{2t} + e^{4t})\sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}\, dt$$

que dejamos así.

□

Ejercicio 6 (2 puntos)**.** Calcular el centro de masas de un arco de *círculo* (es decir, "relleno") de radio r, amplitud 2α y densidad constante μ.

Solución. Esto está hecho en los ejercicios y en clase. Lo más sencillo es poner el objeto C simétrico respecto del eje OX y parametrizarlo en polares como

$$C \equiv \begin{cases} r \in [0, R] \\ \theta \in [-\alpha, \alpha] \end{cases}$$

La masa del arco de círculo es la densidad por el radio por la mitad del ángulo: $\mu R\alpha$, en este caso. Como es simétrico respecto de OX y la densidad es constante, $C_y = 0$. Finalmente, cambiando a polares

$$C_x = \frac{1}{M}\int_C \mu x\, dx\, dy = (\text{polares}) = \frac{1}{M}\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^R \mu\rho\cos\theta\rho\, d\rho\, d\theta$$

integral que no desarrollo. □