El Teorema de Fubini

El Teorema de Fubini describe cómo puede calcularse efectivamente una integral múltiple: operando coordenada a coordenada. A continuación se da una explicación del motivo por el que “debe ser cierto”. Se hace en dimensión 2 para poder dar una idea gráfica, pero el razonamiento es exactamente igual para cualquier número de variables: solo depende de la definición de *derivada*.

Recuérdese que si $f(x)$ es una función real de variable real, es derivable en un punto c si el valor de f cerca de c puede aproximarse mediante una función lineal:

$$f(c+dx) = f(c) + Ldx + odx,$$

donde L es un número real (la derivada de f en c), y dx y o son infinitésimos. La igualdad de arriba se lee “el error que comete la función $f(c) + Ldx$ como aproximación a $f(c+dx)$ es un infinitésimo de mayor orden que dx”. El valor L se llama la *derivada de f en c* y se escribe $L = f'(y)$.

Consideremos ahora una función de dos variables $f(x,y)$, continua en un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. La integral

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy$$

es la “masa” del rectángulo si cada punto (x,y) tiene densidad (superficial, en este caso) $f(x,y)$. Como esto es así para todos los rectángulos, podemos definir la siguiente función:

$$F(y) = \int_{R_y} f(x,y)\,dx\,dy$$

donde R_y es el rectángulo $[a_1, b_1] \times [a_2, y]$. Es decir, $F(y)$ es la masa de la

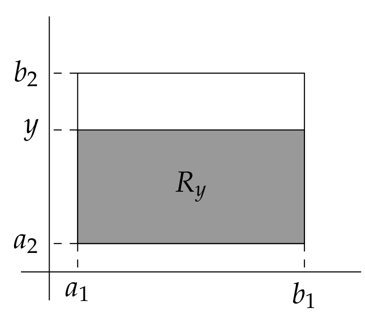

Figura 1: Un rectángulo y un subrectángulo: la función $F(y)$.

parte de R cuya altura va desde a_2 hasta y, como en la Figura 1. La función $F(y)$ está definida en todo el intervalo $[a_2, b_2]$ y es una función de una sola variable. Veamos cómo cambia su valor si desplazamos la y una cantidad "muy pequeña": $F(y + dy)$. Como muestra la Figura 2, este valor $F(y + dy)$ es

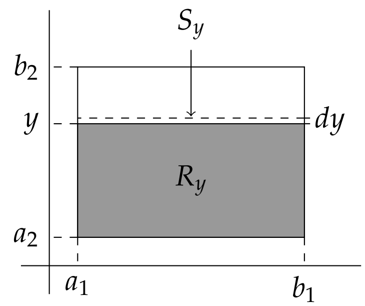

Figura 2: El valor de la función $f(x, y)$ en la banda S_y, de altura dy, no depende de y.

la masa de R_y más la masa del rectángulo S_y (más bien una banda) infinitamente estrecho que comienza en altura y y termina en altura $y + dy$. En forma de ecuación:

$$F(y + dy) = F(y) + \int_{S_y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

La banda S_y tiene anchura infinitesimal, así que el valor de $f(x, y)$ en ella no depende de la variable y (puesto que y no cambia en S_y), así que la masa de S_y es la de un cable infinitamente delgado cuya densidad viene dada por $f(x, y)\, dy$ (obsérvese que se multiplica $f(x, y)$, la densidad superficial, por una longitud dy, de manera que se obtiene una densidad lineal). La masa de un cable infinitamente delgado es justamente la integral en una variable (para eso se define la integral):

$$\int_{S_y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{b_1} (f(x, c)\, dy)\, dx = \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

El elemento dy es constante, por eso se puede sacar fuera de la integral, que es lo que se realiza en la última igualdad; como S_y es una *banda muy estrecha*, su masa tiene que ser pequeña, de ahí que sea un número multiplicado por dy. Otro detalle importante es que en la integral

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$$

la *y es constante*: por eso tiene sentido tal expresión.

Volviendo a $F(y)$, hemos constatado que

$$F(y+dy) = F(y) + \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Es decir, atendiendo a la definición de derivada dada arriba:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx = F'(y).$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tendrá entonces que la masa del rectángulo R original es:

$$F(b) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

lo que significa que: para hacer una integral doble, ha de procederse *coordenada a coordenada*, haciendo integrales de una variable cada vez, y considerando el resto de variables como constantes en cada paso.