


Algunos ejercicios de Ampliación de Cálculo

Pedro Fortuny Ayuso
septiembre-diciembre 2012
fortunypedro@uniovi.es

26 de noviembre de 2015

 Copyright © 2011–2015 Pedro Fortuny Ayuso

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales

Ejercicio 1. Una piscina con 1000l de agua contiene una disolución de sal al 1 % en volumen. Tiene una salida por la que desagua a 1l/s y una entrada por la que se vierte la misma cantidad de agua pero con una concentración de 3 % en volumen. Escribir la evolución de la concentración dentro de la piscina, calcular en qué momento llega al 2 % y calcular la concentración tras 1h.

¿Es el volumen de la piscina relevante para el problema?

Ejercicio 2. El periodo de semidesintegración del radio es de 1600 años. Se parte de una masa de 2g. Calcúlese en qué momento se tendrán 1.99g. ¿Qué masa habrá dentro de 100 años?

Misma pregunta con el Plutonio 238, cuyo periodo de semidesintegración es 88 años.

Ejercicio 3. Una inversión (a interés compuesto en tiempo continuo) comenzó con 100 Euros y al cabo de cinco años consiste en 120 Euros. Calcular el tipo interés.

Ejercicio 4. Calcular a partir de qué tiempo compensa más invertir 1000 Euros al 8 % anual (interés compuesto continuo) que 1500 Euros al 4 % anual.

Ejercicio 5. De un muelle (de peso irrelevante) cuelga una masa de 1kg. La constante de Hooke del muelle es $0.2N/m$. Calcular la posición del muelle

al cabo de $2s$ si se parte de la posición de reposo del muelle a velocidad 0. Obviar el rozamiento.

Ejercicio 6. Igual que el ejercicio 5 pero asumiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad (y de sentido contrario), con una constante de $0.1Ns/m$.

Ejercicio 7. ¿Puede la siguiente ecuación describir el movimiento de un muelle con rozamiento?

$$y''(x) - 0.03y'(x) + 0.7y(x) = 0.$$

Explicar por qué.

Ejercicio 8. Se ha planteado la ecuación diferencial del movimiento de un muelle con rozamiento y, aplicando el método de variación de las constantes, se han obtenido las raíces $2 \pm 4i$. ¿Puede esto ocurrir? ¿Y si las raíces son $-2 \pm 4i$?

Ejercicio 9. En una caída libre con rozamiento proporcional a la velocidad (y de sentido contrario), ¿de qué parámetros depende la velocidad límite?

Ejercicio 10. Calcular (sin rozamiento) la velocidad de escape de la Tierra. Utilizar constantes simbólicas para todos los parámetros.

Ejercicio 11. Expresar la ecuación de la catenaria (no resolverla).

Ejercicio 12. Un cuerpo de masa m y longitud $2l$ (en las unidades adecuadas) está sujeto por cada uno de sus extremos a dos paredes, mediante sendos muelles de longitudes $2A$ y $2B$. Las constantes de Hooke respectivas son k_1 y k_2 . Si la posición del muelle es $x(t)$ y no hay rozamiento, expresar cual es la ecuación que describe su movimiento cuando la posición inicial es $x(0)$ y la velocidad inicial $v(0)$.

Ejercicio 13. El mismo problema que el 12 pero asumiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad y de signo contrario, con constante r .

Ejercicio 14. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} y^3) - y = 1 & y^4) - 2y'' + y = 1 \\ y'' - 2y' + 1 = x & y'' - 2y' = x^2 \end{array}$$

Ejercicio 15. ¿Pueden ser los siguientes números las raíces de una ecuación diferencial asociada a un problema mecánico Newtoniano? ¿Por qué?

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 + 3i, \lambda_3 = 4 + i.$$

¿Y los siguientes?

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 + 3i, \lambda_3 = 2 - 3i.$$

Ejercicio 16. Se sabe que la densidad del aire es proporcional a la altura y que el coeficiente de rozamiento del aire es proporcional a la velocidad (y en sentido contrario) y a la densidad. Dar unas ecuaciones para la caída libre de un cuerpo. La aceleración de la gravedad se supone constante.

Utilizando esas ecuaciones, calcular cuánto tiempo tarda en caer un objeto que se deja caer desde una altura h .