Algunos ejercicios de Ampliación de Cálculo

Pedro Fortuny Ayuso
septiembre-diciembre 2012
fortunypedro@uniovi.es

30 de noviembre de 2015

Anexo noviembre 2015

(Sobre la fórmula de Green)

Nota importante: En todos los ejercicios, si aparecen integrales "complicadas", se supone que basta dejarlas indicadas. El alumno puede recurrir a una aplicación como WolframAlpha para calcularlas, bien exactamente, bien aproximadamente.

Ejercicio 1. Calcular, utilizando integrales de línea, el área del pétalo limitado por la curva polar

$$\rho = \cos 3\theta, \theta \in [-\pi/6, \pi/6]$$

(la curva completa es un *trifolium*).

Ejercicio 2. Calcular, utilizando integrales de línea, el área del pétalo limitado por la curva polar

$$\rho = \cos n\theta, \theta \in [-\pi/(2n), \pi/(2n)]$$

(la curva completa es una flor con n pétalos). En este y en los ejercicios siguientes, n representa un número natural.

Ejercicio 3. Calcular, utilizando integrales de línea, el área de *un pétalo* limitado por la curva

$$\rho = 0.5 + \cos n\theta$$

para lo cual habrá que calcular la abertura de uno de dichos pétalos e integrar en los límites adecuados.

Ejercicio 4. Calcular, utilizando integrales de línea, el área de *un pétalo* limitado por la curva
$$\rho = r_0 + \cos n\theta$$
para r_0 un número entre 0 y 1. Habrá, previamente, que calcular la abertura de dicho pétalo e integrar en los límites adecuados.

Ejercicio 5. Calcular, mediante integrales de línea, el área del conjunto limitado por la curva
$$\rho = s + \cos n\theta, \theta \in [0, 2\pi]$$
donde s es un número real mayor que 1 y n es un número natural.

Ejercicio 6. Considérese el campo de vectores
$$X = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$
definido en el conjunto limitado exteriormente por la circunferencia centrada en el origen de radio 1 e interiormente por la circunferencia centrada en el origen de radio ϵ, para ϵ pequeño.

Ejercicio 7. Razonando como en el ejercicio anterior, comprobar que
$$\int_\gamma X \, d\gamma = 2\pi$$
para cualquier curva cerrada simple γ que rodea al origen de coordenadas en sentido antihorario.

Ejercicio 8. Considérese el campo de vectores
$$X = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$
definido en todo $\mathbb{R}^2$ menos el origen de coordenadas. Calcúlese, razonando como en el ejercicio anterior (pero para este campo) el valor de
$$\int_\gamma X \, d\gamma$$
para cualquier curva cerrada simple que rodea el origen de coordenadas en sentido antihorario.