


# Apuntes [esbozo] de Ampliación de Cálculo

Pedro Fortuny Ayuso  
septiembre-diciembre 2022  
fortunypedro@uniovi.es

 Copyright © 2011–2024 Pedro Fortuny Ayuso

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>3</b>
<b>1 ¿Por qué integrar?</b>	<b>5</b>
<b>2 Integración en Varias Variables</b>	<b>9</b>
2.1 Introducción . . . . .	9
2.2 Una explicación elemental antes de entrar en materia . . . . .	10
2.3 Formalización de lo anterior . . . . .	16
2.4 El teorema del cambio de variable . . . . .	25
2.5 Cambios de variable notables . . . . .	31
2.6 Simetrías del conjunto, paridad de la función . . . . .	36
2.7 Medias, momentos, volúmenes... . . . .	39
2.8 Problemas y ejemplos . . . . .	41
<b>3 Campos Vectoriales, curvas, superficies...</b>	<b>42</b>
3.1 Curvas . . . . .	42
3.2 Superficies . . . . .	44
3.3 Campos de vectores y su integración . . . . .	46
3.4 Anexo topológico . . . . .	49
3.5 El teorema de Stokes . . . . .	51
3.6 Consecuencias y otras propiedades . . . . .	53
<b>4 Análisis complejo</b>	<b>55</b>
4.1 Funciones complejas derivables . . . . .	55
4.2 Funciones holomorfas . . . . .	59

<i>Índice general</i>	4
4.3 Polos de funciones holomorfas . . . . .	62
4.4 Residuos . . . . .	64
<b>5 Ecuaciones diferenciales</b>	<b>70</b>
5.1 Introducción por medio de ejemplos . . . . .	71
5.2 Definiciones esenciales . . . . .	92
5.3 Resolución: ecuaciones lineales sencillas . . . . .	95
5.4 Los teoremas fundamentales . . . . .	104
5.5 Resolución (II): la transformada de Laplace . . . . .	109

---

## Capítulo 1

### ¿Por qué integrar?

---

Considérese la pieza plana de la figura, que podría formar parte de un motor. Denominémosla  $P$  y supongamos que, por razones de ahorro de energía, quiere calcularse su momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano y que pasa por su centro de simetría. Se han colocado los ejes coordenados de manera que el centro de la figura sea el origen de coordenadas. El

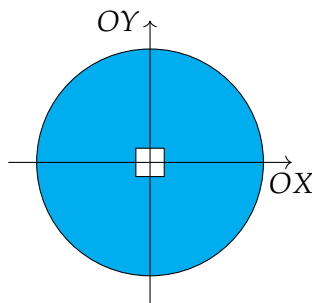
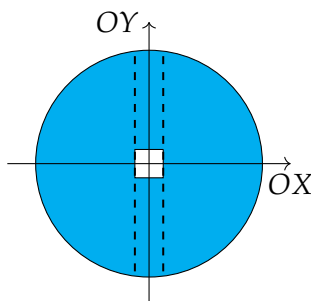


Figura 1.1: Una pieza de un motor.

momento de inercia es una magnitud asociada a un sólido rígido: depende de su forma, de la densidad y del eje. Supongamos, por simplificar, que la pieza es homogénea y está fabricada con un metal de densidad constante  $\mu$ . Para

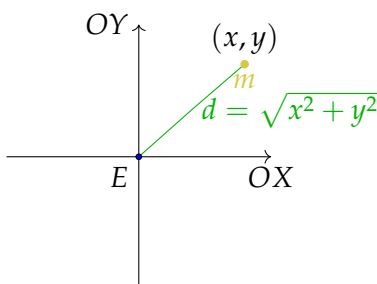
Figura 1.2: Una posible subdivisión de  $P$ .

calcularlo, por tanto, no es muy útil dividirla en piezas más pequeñas (p.ej. como en la Figura 1.2), pues estaríamos cambiando un problema complicado por otros que, en el fondo, tienen la misma complicación, pues la pregunta que hemos de responder es: ¿cómo se calcula ese momento de inercia? La cuestión solo puede abordarse correctamente a partir del dato elemental del momento de inercia de un punto.

El momento de inercia de *un punto de masa  $m$*  situado en las coordenadas  $(x, y)$ , respecto del eje indicado (perpendicular al plano y que pasa por el origen de coordenadas) es, como debería saberse:

$$I_E(x, y) = m(x^2 + y^2)$$

puesto que la distancia de  $(x, y)$  al origen de coordenadas es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Figura 1.3: Un punto de masa  $m$  respecto del eje  $E$  (perpendicular al plano) tiene momento de inercia  $I_E(x, y) = md^2$ .

Desde el punto de vista puramente físico, es un hecho (por el principio de superposición) que el momento de inercia de  $P$  ha de ser la suma de los mo-

mentos de inercia de todas las partículas elementales que lo componen (esto es una mera realidad física: el momento de inercia de un compuesto es la suma de los momentos de inercia de sus partes). Pero este cálculo es incluso más complicado que el anterior, pues necesitaríamos saber cuál es la posición de cada partícula elemental de  $P$  y, más aun, deberíamos tener en cuenta que los neutrones no tienen la misma masa que los electrones (p.ej.). Además, la inmensa mayoría del volumen de  $P$  es *espacio vacío* (según la estructura del átomo como electrones “alrededor del núcleo”). Hemos cambiado un problema por otro peor.

Pero esa idea podemos cambiarla un poco de la siguiente manera:

- Hagamos la ficción de que el material del que está compuesto  $P$  es un continuo, no una colección de núcleos, electrones y vacío. Dicho continuo de masa tiene densidad constante, como se nos ha indicado,  $\mu$ .
- Cada punto  $(x, y)$  de  $P$  tiene, por tanto, asociada una densidad  $\mu$ .

Hemos sustituido la materia “real” por una materia “continua” pero respetando la densidad. Si fuéramos capaces de calcular la masa de  $(x, y)$  a partir de la densidad, digamos que sea  $m(x, y)$ , entonces el momento de inercia de  $P$  debería ser la *suma de los momentos de inercia de todos los puntos de  $P$* :

$$I_E(P) = \text{Suma}_P (I_E(x, y)) = \text{Suma}_P (m(x, y)(x^2 + y^2)).$$

donde el subíndice solo indica que la suma se realiza en los puntos de  $P$ .

¿Cuál es la masa de  $(x, y)$  si la densidad es  $\mu$ ? Como la pieza es plana, será  $\mu$  por el área del punto  $(x, y)$ . Aquí hemos de aceptar un principio físico fundamental: el espacio es isótropo (igual en todas las direcciones). Esto tiene como consecuencia que:

- Todos los puntos tienen el mismo área (volumen en dimensión 3, longitud en dimensión 1).

¿Y cuánto vale el área de un punto? Será la longitud de un punto por la altura, es decir, la longitud de un punto del eje  $OX$  multiplicada por la longitud de un punto del eje  $OY$ . Llamemos  $dx$  a la primera y  $dy$  a la segunda (por poner un nombre). Será entonces:

$$m(x, y) = \mu dx dy$$

y por tanto

$$I_E(P) = \text{Suma}_P (\mu dx dy(x^2 + y^2)) = \text{Suma}_P (\mu(x^2 + y^2)) dx dy.$$

En lugar de escribir “Suma”, ponemos una  $S$  estilizada:

$$I_E(P) = \int_P \mu(x^2 + y^2) dx dy,$$

y nos preguntamos: ¿es posible calcular esto de alguna manera “sencilla”? Si fuera posible, pese a que hemos realizado algunas hipótesis físicas irreales, quizás obtuviéramos un resultado razonable, pues el hecho de que sean irreales no significa que sean inconvenientes.

De todos modos, la conclusión a la que se llega es:

- O bien conozco la posición de todas las partículas elementales que componen  $P$  y sus masas y sumo todos sus momentos de inercia (una suma de unos  $10^{27}$  términos, poco más o menos). Esto es imposible, claro. Y también requiere hacer una suma casi infinita.
- O bien intento utilizar la simplificación que he hecho y trato de ver si hay un modo sencillo de hacer el cálculo (y compruebo, de alguna manera, que el valor obtenido es razonable). Esto exige hacer una suma infinita pero, a lo mejor, *factible*.

La teoría del cálculo integral se crea para hacer la segunda operación: explicar cómo puede computarse una “suma infinita” como la mostrada sin volverse loco.



---

## Capítulo 2

# Integración en Varias Variables

---

### 2.1 Introducción

La integración en varias variables se puede imaginar de la manera clásica, que es muy visual, pensando que se están calculando “volúmenes” de figuras delimitadas por una función o de otra manera, también clásica, menos visual (puesto que no es “tan obvia”) pero más real desde el punto de vista físico, que es pensar que se están calculando masas de conjuntos a partir de densidades.

En el segundo caso, los enunciados a veces pueden parecer más naturales, especialmente el teorema del cambio de variables, para el que ya no hace falta representarse un volumen en dos sitios distintos, sino pensar en una “deformación de una masa” por contracción y dilatación en todas las direcciones.

De todos modos, la integración en más de una variable está siempre sujeta a dos principios elementales, que son la base de todos los resultados que se manejan (y, de hecho, son los que *dirigen* la teoría: se trata de “poder integrar” en varias variables sabiendo que hay restricciones):

1. Solo conocemos con seguridad el volumen de un paralelepípedo.
2. Solo sabemos calcular primitivas de funciones de una variable (el hecho es que *no hay* primitivas de funciones de varias variables).

Estos dos “principios” o “condicionantes” son los que hacen que tanto el teorema de Fubini (cómo se integra en un cuadrado y en general en cualquier

paralelepípedo) y el teorema del cambio de variable (que, precisamente, permite saber cómo calcular la integral una vez que se “transforma” el dominio de integración en un paralelepípedo o en algo contenido en él) sean relevantes. Quizás el teorema del cambio de variable sea importante también porque permite “simplificar” integrales, pero esto es más cierto en una que en varias variables.

Se explicará la integración en 2 y 3 variables a la vez (en realidad, en  $\mathbb{R}^n$ ) y los cambios de coordenadas útiles se irán haciendo según convenga. Nos abstendremos de enunciar los resultados en total generalidad, pues al fin y al cabo, el estudiante se va a encontrar siempre con funciones que son continuas salvo en conjuntos de medida cero, por no decir *infinitamente diferenciables*.

Finalmente, vamos a hacer un estudio de la integración *en conjuntos acotados*, es decir, el problema de las integrales impropias no lo vamos a tocar, ni el de los conjuntos medibles pero no acotados.

## 2.2 Una explicación elemental antes de entrar en materia

La teoría de la integración no es más que la expresión con precisión de la teoría del cálculo de masas en cuerpos a partir de densidades. El caso más sencillo, el de un ortoedro de densidad constante es conocido: si los lados del ortoedro son  $a, b, c$  y la densidad es constante e igual a  $\rho$ , entonces la masa es  $\rho abc$  (densidad por volumen). Cualquier “teoría” de la integración ha de dar este resultado.

Para no dividir la explicación en apartados artificiales, trabajaremos en esta sección siempre en  $\mathbb{R}^3$  y fijaremos unas coordenadas  $(x, y, z)$ . La teoría que vamos a mostrar a continuación se fundamenta en la siguiente idea  
**Masa como suma:** La masa total de un cuerpo es la suma de las masas del continuo de puntos que lo forman.

Esta idea supone que cada punto de un sólido tiene una masa (que, por ser un punto, será infinitamente pequeña). De hecho, cada punto de  $\mathbb{R}^3$  tiene asignado un *volumen*.

**Definición 1.** Dadas coordenadas  $(x, y, z)$ , el *volumen* de un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^3$  es el volumen (en valor absoluto) del ortoedro generado por los vectores  $(dx, 0, 0)$ ,  $(0, dy, 0)$  y  $(0, 0, dz)$ , es decir:

$$\text{vol}(x, y, z) = dx dy dz = \left| \det \begin{pmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{pmatrix} \right|.$$

Y, si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función (que se interpreta como una *densidad puntual*), entonces la *masa* del punto  $(x, y, z)$  es

$$f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Ha de quedar claro que tanto el volumen como la masa de un punto tienen valores *infinitesimales*, es decir, “infinitamente pequeños.” En dimensión 1, la densidad sería lineal y la masa de un punto se escribiría  $f(x) \, dx$ . En dimensión 2, la densidad sería superficial y la masa correspondiente  $f(x, y) \, dx \, dy$ .

La teoría que se quiere construir en este capítulo no es más que el desarrollo de la idea ya dicha: la masa total de un cuerpo es la suma de las masas de los puntos que lo forman.

**Definición 2.** La *integral* de una función  $f(x, y, z)$  en un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  es la suma de las masas de los puntos de  $X$ , suponiendo que la densidad viene descrita por  $f(x, y, z)$ . Se escribe de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$\int_X f, \quad \int_X f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

La primera expresión

$$\int_X f$$

tiene la ventaja de la sencillez y brevedad pero puede parecer algo artificial al alumno. La segunda,

$$\int_X f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

es justamente una manera abreviada de escribir “suma de masas de los puntos de  $X$ ”, pues:

$\int$ : es la letra S estilizada, y es la “S” de “summa”, que en latín significa “resumen” o “suma.”

$X$ : para saber de qué conjunto se está calculando la masa.

$f(x, y, z)$ : la densidad en cada punto.

$dx \, dy \, dz$ : el volumen de cada punto, que multiplicado por la densidad da la masa de cada punto.

En fin:

$$\int_X f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

suma
volumen

X
densidad

en X
masa

donde tanto la densidad como el volumen como la masa son “puntuales,” así que la “suma en  $X$ ” es una suma en un continuo de puntos de masas infinitesimales. Si  $X$  tiene realmente dimensión 3 y  $f(x, y, z)$  es positiva, entonces el valor es un número real positivo, una verdadera *masa*.

El problema es calcular esta “suma” sobre un continuo. Más que hacerlo directamente, se establecen unos principios elementales que esta operación debe cumplir y, a partir de ellos, se deduce el método para calcular su valor. En lo que sigue,  $f(x, y, z)$  y  $g(x, y, z)$  son funciones continuas en  $\mathbb{R}^3$  y *acotadas*.

La noción de integral que se está definiendo debe cumplir las siguientes propiedades:

**Creciente:** Si  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  en todos los puntos de  $X$ , entonces

$$\int_X f \leq \int_X g.$$

**Lineal en conjuntos:** Si  $X$  e  $Y$  son conjuntos disjuntos (es decir, no tienen intersección), entonces

$$\int_{X \cup Y} f = \int_X f + \int_Y f,$$

(la masa total de dos cuerpos es la suma de la masa de uno y la de otro).

**Lineal en funciones:** Dados  $\lambda$  y  $\mu$  números reales,

$$\int_X (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_X f + \mu \int_X g.$$

**Masa de ortoedros:** Si  $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  y  $f(x, y, z)$  es constante en  $X$ , con valor  $\rho$ , entonces

$$\int_X f = \rho \text{vol}(X) = \rho(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Con estas condiciones y una más técnica que no se va a especificar (de paso al límite en uniones de conjuntos), solo hay una manera posible de definir la integral, y cumple la siguiente propiedad:

**Teorema** (de Fubini para funciones continuas). Si  $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  y  $f(x, y, z)$  es continua y acotada en  $X$ , entonces la integral de  $f$  en  $X$  se calcula coordenada a coordenada:

$$\int_X f = \iiint_X f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

o bien en cualquier otro orden de las coordenadas  $x, y, z$ .

Nótese que la integral interior

$$\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$$

es una integral en una sola variable, la  $z$ , y que para cada valor de  $x$  e  $y$ , se obtiene un valor de la integral. Esta se calcula, por tanto, “como si  $x$  e  $y$  fueran constantes” y todas las operaciones se llevan a cabo con esta condición. Por ejemplo,

$$\int_2^4 (x + \cos y)z dz = (x + \cos y) \int_2^4 z dz = \star,$$

que, aplicando la regla de Barrow, da

$$\star = (x + \cos y) \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=2}^{z=4} = (x + \cos y)(8 - 2) = 6(x + \cos y).$$

Como se observa,  $x$  e  $y$  se han considerado constantes en todo el proceso y, por ello, aparecen tal cual en la expresión final de la integral respecto de  $z$ .

### Ejemplo

Calcular la integral en el conjunto  $X = [0, 2] \times [0, 3] \times [0, 4]$  de la función  $f(x, y, z) = z(x + y)^2$ .

La única complicación de esta integral es que el proceso es largo y tedioso, pero el cálculo es elemental. Hagámoslo en el orden  $z, y, x$ :

$$\int_X z(x + y)^2 dx dy dz = \int_0^4 \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 z(x + y)^2 dx \right) dy \right) dz$$

La integral interior es:

$$\int_0^2 z(x + y)^2 dx = z \left. \frac{(x + y)^3}{3} \right|_{x=0}^{x=2} = z \left( \frac{(2 + y)^3}{3} - \frac{y^3}{3} \right).$$

Por tanto, la integral respecto a  $y$  es:

$$\int_0^3 z \left( \frac{(2 + y)^3}{3} - \frac{y^3}{3} \right) dy = \star$$

que es

$$\star = z \left( \left. \frac{(2 + y)^4}{12} - \frac{y^4}{12} \right|_{y=0}^{y=3} \right) = z \left( \frac{5^4}{12} - \frac{3^4}{12} - \frac{2^4}{12} + 0 \right) = \star$$

es decir

$$\star = z \cdot 44$$

Finalmente, la integral respecto a  $z$  queda:

$$\int_0^4 44z \, dz = 44 \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=0}^{z=4} = 44 \cdot 8 = 352.$$

### Inegración en conjuntos que no son ortoedros

No todos los cuerpos tienen forma de ortoedro (como puede uno darse cuenta dejando de mirar el ordenador y mirando a una planta, por ejemplo). La teoría de la integración sería inútil si solo pudiera calcular masas de ladrillos y libros. En esta breve introducción se tratará de manera superficial el caso de los conjuntos delimitados por funciones en las direcciones de los ejes y funciones continuas. El caso general de funciones continuas casi en todas partes no es más que una formalización de algo completamente natural (la masa de una pieza grande no depende de la pintura que la cubre).

Se parte de un conjunto *acotado*  $X$ , cuya masa quiere calcularse y una función continua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  que representa la densidad en cada punto de  $X$ . Supóngase que  $X$  cumple la siguientes propiedades:

- Existen  $a, b$  tales que

$$X \subset \{(x, y, z) : a \leq x \leq b\}.$$

- Existen dos funciones  $m_x$  y  $M_x$  que delimitan  $X$  en cada  $x \in [a, b]$ :

$$X \subset \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, m_x(y) \leq y \leq M_x(y)\}$$

- Existen dos funciones  $n_{(x,y)}(z)$  y  $N_{(x,y)}(z)$  que delimitan  $X$  en cada  $(x, y)$  que cumple  $a \leq x \leq b$  y  $m_x(y) \leq y \leq M_x(y)$ . Pero además, resulta que  $X$  es exactamente este conjunto:

$$X = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, m_x(y) \leq y \leq M_x(y), n_{(x,y)}(z) \leq z \leq N_{(x,y)}(z)\}$$

En fin, que  $X$  puede delimitarse dimensión a dimensión por capas cada vez mayores. La filosofía del Principio de Fubini debería poder aplicarse a este cuerpo (ir coordenada a coordenada calculando la suma de las masas de cada punto) y, de hecho, eso es lo que ocurre:

**Ejemplo 1**

Calculemos la masa de un elipsoide de densidad constante  $\rho$  (que nos servirá para conocer su volumen, obviamente). La ecuación implícita de un elipsoide centrado en el origen y con ejes principales en los ejes coordenados es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

donde  $a, b$  y  $c$  son las longitudes de los radios principales del elipsoide.

Este conjunto está bien delimitado, pues puede describirse de la siguiente manera:

- La variable  $z$  está entre  $-c$  y  $c$ .
- Para cada  $z$ , la  $y$  está entre  $m(z) = -b\sqrt{1 - z^2/c^2}$  y  $M(z) = b\sqrt{1 - z^2/c^2}$ .
- Fijados  $y$  y  $z$ , la  $x$  varía entre

$$n(z, y) = -a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ y } N(z, y) = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

(sería interesante que el alumno hiciera un dibujo y comprobara este hecho). Se han elegido las variables en el orden  $z, y, x$  para remarcar que tal orden es irrelevante.

Por tanto, la masa del elipsoide  $X$  de densidad constante  $\rho$  viene dada por

$$M = \int_X \rho = \int_{-c}^c \left( \int_{-b\sqrt{1-z^2/c^2}}^{b\sqrt{1-z^2/c^2}} \left( \int_{-a\sqrt{1-z^2/c^2-y^2/b^2}}^{a\sqrt{1-z^2/c^2-y^2/b^2}} \rho \, dx \right) dy \right) dz.$$

Más brevemente, habríamos podido escribir, con la notación de arriba,

$$M = \int_{-c}^c \left( \int_{m(z)}^{M(z)} \left( \int_{n(z,y)}^{N(z,y)} \rho \, dx \right) dy \right) dz.$$

La constante  $\rho$  sale fuera de la integral y la integral interna es (sorprendentemente la primera vez que se ve esto) muy sencilla, pues el integrando es 1, así que el valor de la integral es la diferencia de los límites de integración (el superior menos el inferior). Como son iguales pero de signo distinto, queda el doble del superior:

$$M = \rho \int_{-c}^c \left( \int_{-b\sqrt{1-z^2/c^2}}^{b\sqrt{1-z^2/c^2}} 2a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dy \right) dz.$$

La integral interna ahora es algo más interesante. Lo primero que se hace es un cambio de variables lineal para que los límites sean razonables:

$$y = b\sqrt{1 - z^2/c^2}\tilde{y}, \quad dy = b\sqrt{1 - z^2/c^2}d\tilde{y}.$$

que hace lo siguiente con el integrando:

$$\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2} - \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \tilde{y}^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) (1 - \tilde{y}^2)}$$

y, teniendo en cuenta el valor de  $dy$  calculado arriba, queda: Por tanto, la integral interior queda

$$\int_{-1}^1 2ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \sqrt{1 - \tilde{y}^2} d\tilde{y} = 2ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tilde{y}^2} d\tilde{y}.$$

Esta última integral es (ha de saberse hacer, es una trigonométrica de las conocidas)  $\pi/2$ . Por tanto, para terminar se ha de calcular

$$\int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

### 2.3 Formalización de lo anterior

A continuación se da una explicación detallada y (bastante, no del todo) precisa de las ideas geométrico-físicas anteriores. El alumno puede pasar por encima de toda esta sección (es decir, hasta el Teorema del Cambio de Variable) pero quizás pueda interesarle el formalismo.

Para calcular volúmenes, área, masas, temperaturas medias, etc... *en general*, es imprescindible saber cómo se calcula el caso más particular de todos, el del ortoedro (es decir, un cuerpo delimitado por "planos" paralelos perpendiculares). En lugar de hablar de ortoedros, utilizaremos el término *cubo*, abusando generosamente de la nomenclatura. Un cubo en  $\mathbb{R}^n$  (es casi la única vez que vamos a hablar tan en general) viene dado, por tanto, por una familia de  $n$  vectores (que son los vectores de "una esquina", el resto del cuerpo se calcula repitiendo estos vectores en cada extremo). Para imponer un poco de rigor, se define

**Definición 3.** Un cubo en  $\mathbb{R}^n$  es el producto cartesiano de  $n$  intervalos semi-abiertos por la derecha:

$$Axs = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

donde se sobreentiende que  $b_i > a_i$  (los intervalos tienen los extremos bien colocados).



Así que es natural definir,

**Definición 4.** El volumen de un cubo  $A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$  es

$$\text{vol}(C) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

En lo sucesivo vamos a necesitar hablar de conjuntos *irrelevantes*. En teoría de la integración, estos conjuntos son los *de contenido 0* y los *de medida nula*.

**Definición 5.** Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  es *de contenido 0* ó *de contenido nulo* si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una colección  $A_1, \dots, A_n$  finita de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ y } \sum_{i=1}^n \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Esos conjuntos son *muy pequeños*, pero existe otra familia más interesante y general de conjuntos que también son muy pequeños:

**Definición 6.** Un subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice *de medida nula* ó *de medida 0* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una familia *numerable* de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \dots \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Como se ve, todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero no al revés (por ejemplo, un conjunto no acotado no tiene contenido cero nunca, pero puede ser de medida cero).

**Teorema 1.** Si  $f$  es una función racional en las coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ , las funciones  $\exp()$ ,  $\log()$  y las trigonométricas y  $f \not\equiv 0$  (no es la función constantemente igual a cero) entonces el conjunto  $f = 0$  (los ceros de dicha función) es de medida nula.

Esto significa que “cualquier” conjunto definido razonablemente como los ceros de una función no constantemente nula es de medida nula (y esto servirá para poder integrar en un conjunto grande salvo en “su borde”).

## Integrales en cubos

Trabajamos ahora en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , da igual. Fijemos un cubo  $C = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$  (ó  $C = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$  si en  $\mathbb{R}^2$ ). Está claro que si  $f(x) = c$  es constante en  $C$ , su integral ha de ser (si se pretende que la integral generalice el concepto de *masa*)

**Definición 7.** La *integral de una función constante en un cubo*  $C$  es el producto del valor de la función por el volumen del cubo.

$$\int_P f = c \cdot \text{vol } P = c \text{ vol}(C) = c(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

que no es más que la idea de “la masa es el volumen por la densidad” trasladada a un modelo matemático concreto.

Ahora bien, si alguna propiedad tiene que cumplir la integral es que la integral en un conjunto ha de dar lo mismo que la suma de las integrales en una partición. En concreto, si el cubo  $C$  se puede dividir en cubos  $C_1, \dots, C_r$  y  $f$  es una función sobre  $P$ , ha de ser

$$\int_P f = \int_{C_1} f + \cdots + \int_{C_r} f$$

(la masa no cambia si se corta el cuerpo). Esta propiedad es elemental de probar para funciones constantes sobre cubos si la subdivisión se hace en cubos.

Pero para hablar con precisión, necesitamos la definición de *partición*:

**Definición 8.** Dado un conjunto  $C$ , una *partición de*  $C$  es una familia finita de conjuntos  $C_1, \dots, C_n$  tal que

- Llenan todo el conjunto  $C$ :

$$C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

- No se cortan entre sí: para cualquier par  $i, j$ , se tiene que

$$C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Esta definición corresponde exactamente con la idea de “trocear” un conjunto en partes más pequeñas.

La definición de función integrable en general sobre un cubo no puede ser más sencilla, igual que en una variable. Se consideran subdivisiones del cubo en conjuntos cada vez más pequeños, se aproxima en cada uno de esos conjuntos por una constante “superior” e “inferior” y si tomando supremos e ínfimos da lo mismo, la función es integrable. Se supone que  $P$  es un cubo:

**Definición 9.** Sea  $C$  un cubo y  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función de valores no negativos y acotada. Sea  $\mathcal{P} = C_1, \dots, C_n$  una partición de  $C$  en cubos, y para cada  $i$ , sea  $f_i = \inf_{x \in C_i}(f(x))$  y  $f^i = \sup_{x \in C_i}(f(x))$ . Se llaman *suma inferior* y *suma superior* a

$$I_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \text{vol } C_i, \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f^i \cdot \text{vol } C_i$$

las sumas de las integrales en cada pequeño cubo. Se dice que  $f$  es *integrable en C* si

$$I^-(f) := \sup_{\mathcal{P}}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \inf_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(f)) =: I^+(f)$$

Donde el supremo y el ínfimo se toman en el “conjunto de particiones de  $P$  en cubos”. Los nombres  $I^+$  e  $I^-$  vienen de “integral superior” (por arriba) e “integral inferior” (por abajo).

Igual, *exactamente igual* que en  $\mathbb{R}$ . Lo único que uno ha de utilizar particiones en conjuntos más complicados que segmentos (cubos).

La definición que se acaba de dar es solo para funciones positivas, pero toda función  $f$  es diferencia de dos funciones positivas  $f = f_+ - f_-$ , donde

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0)$$

(esto es un artificio que simplifica las definiciones, nada más, no hay que preocuparse por ello).

**Definición 10.** Si  $C$  es un cubo en  $\mathbb{R}^n$ , decimos que una función acotada  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  es *integrable en C* si tanto  $f_+$  como  $f_-$  son integrables en  $C$ . Se define la *integral de  $f$  en  $C$*  como

$$\int_C f = \int_C f_+ - \int_C f_-$$

(es decir, *el área total es el área por encima del eje menos el área por debajo*, como se diría en una variable). Si estuviéramos calculando temperaturas en una lámina, diríamos que las temperaturas por encima de 0 suman y las por debajo de 0 restan.

En este punto se plantean dos cuestiones:

- ¿Qué pasa si el conjunto de integración no es un cubo?
- ¿Cómo se *calcula* la integral?

La primera pregunta es relativamente fácil de responder, la respuesta a la segunda pregunta se llama *Teorema de Fubini*.

### Conjuntos que no son cubos

Todo conjunto *acotado* está incluido en un (y en muchos) cubo. Supongamos que se nos da un conjunto  $A$  acotado de  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  y una función en  $A$   $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Es lógico preguntarse qué significado “formal” puede tener la “integral de  $f$  en  $A$ ”. Al fin y al cabo, la forma de una lámina no tiene por

qué ser rectangular, o podemos tener que saber calcular la masa de una esfera conociendo las densidades, por ejemplo. Lo más sencillo desde el punto de vista teórico es definir las “funciones indicador”.

**Definición 11.** Dado un conjunto cualquiera  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ , la *función indicador* (o *función caracterísitca*) de  $A$  es la función que vale 0 fuera de  $A$  y 1 en  $A$ :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Supongamos ahora un conjunto acotado  $A$  y un cubo  $C$  que lo incluye. Diremos que  $A$  es *medible* si la función indicador  $\chi_A$  es integrable en  $C$  (está claro que esta definición no depende de  $C$ ). En realidad, esta noción es demasiado teórica para nosotros, pues vamos a trabajar siempre con conjuntos delimitados por ecuaciones algebraicas o a lo sumo analíticas, que son siempre medibles. Ahora la definición de integral en  $A$  es sencilla:

**Definición 12.** Dado un conjunto acotado y medible  $A$  y una función acotada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que  $f$  es *integrable en  $A$*  si para cualquier cubo  $C$  que incluya a  $A$ , la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ f(x) & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es integrable. En ese caso, se define

$$\int_A f = \int_C \tilde{f}$$

Esta definición no depende del cubo  $C$  que incluya a  $A$ . Se define, en concreto, el *volumen* de  $A$  como la integral de la función constante 1 sobre  $A$ :

$$\text{vol}(A) = \int_A 1. \quad (2.1)$$

Lo que se ha hecho es “desplazar el problema”. Para definir la integral en un conjunto arbitrario, se ha generado una función que solo sirve de herramienta técnica, pero que permite dar una definición coherente con las herramientas que se poseían. Ahora que sabemos *qué es una integral en un conjunto arbitrario* (acotado y medible, eso sí), nos falta saber *cómo se calcula*.

Como mera nota, pues nuestro curso solo tratará conjuntos “más bien regulares”, enunciamos el resultado siguiente:

**Teorema 2.** *Un conjunto acotado  $A$  es medible si y solo si su borde es de medida nula.*

Donde el *borde de  $A$*  es el conjunto de puntos para los que cualquier cualquier bola centrada en ellos tiene puntos de  $A$  y puntos que no son de  $A$ .

### Propiedades elementales

Antes de seguir con el teorema de Fubini, conviene enunciar las propiedades más elementales de la integración, que se usan sin explicación ubicuamente. Primero, la linealidad:

**Teorema 3.** Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en un conjunto acotado medible  $A$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un escalar, entonces

$$\begin{aligned}\int_A (f + g) &= \int_A f + \int_A g \\ \int_A \lambda f &= \lambda \int_A f\end{aligned}$$

La integración “conserva el orden” (si la gráfica de una función está por encima de otra, entonces la integral de la primera es mayor que la de la segunda): si un cuerpo tiene menor densidad en cada punto que otro de la misma forma, entonces la masa del primero es menor que la del segundo:

**Teorema 4.** Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en el conjunto acotado medible  $A$  y  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in A$ , entonces

$$\int_A g \leq \int_A f$$

Como consecuencia,

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

La integral es *aditiva* respecto del conjunto de integración:

**Teorema 5.** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos medibles (con lo que  $A \cup B$  es medible) y  $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable entonces

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Finalmente, los conjuntos de contenido cero no cambian el valor de la integral, así que uno puede siempre obviar los conjuntos de contenido cero que aparezcan en sus problemas:

**Teorema 6.** Si  $A$  es un conjunto acotado medible,  $f$  es una función integrable en  $A$  y  $B \subset A$  es un conjunto de contenido cero, entonces

$$\int_A f = \int_{A \setminus B} f$$

o, lo que es lo mismo, si  $B$  es un conjunto de contenido cero cualquiera y  $f$  es cualquier función integrable,

$$\int_B f = 0$$

Por cierto, la teoría de la integración que estamos presentando es la que hace Spivak en su libro de “Cálculo en Variedades”, muy simplificada para exponerla sin demasiado aparataje. Sus *rectángulos* son nuestros *cubos*.

### Cálculo de integrales. El teorema de Fubini

Como dijimos arriba y todo el mundo sabe, las únicas integrales que sabemos calcular de verdad “en general” son las de una variable (pues es el único lugar en que tiene sentido la noción de “primitiva de una función”). El teorema de Fubini es la herramienta que nos permite reducir el problema de cálculo de integrales en dimensiones superiores a dimensión 1.

La imagen mental del teorema de Fubini se corresponde con la idea de *integrar variable a variable*, o dicho de otro modo, *dimensión a dimensión*.

En general, no integraremos funciones *sobre cubos*, pero tal y como hemos definido la integral de una función sobre un conjunto acotado medible (definición 12), nos es suficiente enunciar el teorema de Fubini en cubos y *trasladarlo* a conjuntos acotados arbitrarios utilizando la función característica.

Lo enunciamos en dos, tres y  $n$  variables para tranquilidad del lector.

#### El teorema de Fubini en dos variables

**Teorema** (Teorema de Fubini, 2 variables). Sea  $P = [a, b] \times [c, d]$  un cubo (rectángulo) en  $\mathbb{R}^2$ , donde las variables son  $(x, y)$  y sea  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Para cada  $x \in [a, b]$ , sea  $g_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$g_x(y) = f(x, y).$$

Definimos  $I^+(x) = I^+(g_x)$  e  $I^-(x) = I^-(g_x)$  (la integral superior e inferior de  $g_x$ ). Entonces las funciones  $I^+(x)$  e  $I^-(x)$  son integrables y

$$\int_P f = \int_{[a,b]} I^+(x) = \int_{[a,b]} I^-(x)$$

es decir, la integral existe y es igual a la iteración de las integrales superiores ó inferiores.

El teorema de Fubini es lo que permite que escribamos<sup>1</sup>

$$\int_P f = \int_a^b \left( \int_c^d g(x, y) dy \right) dx.$$

Por la misma regla de tres, se tiene que

$$\int_P f = \int_c^d \left( \int_a^b g(x, y) dx \right) dy$$

Para conjuntos medibles en general, no hay más que, como arriba, considerar un rectángulo suficientemente grande que los incluya y hacer la integral de la función característica por la función inicial. De todos modos, si el conjunto es lo suficientemente cómodo, se pueden escribir las cosas más clásicamente.

### Regiones planas “bien” delimitadas

Diremos que un conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  está “bien delimitado” verticalmente si existe un intervalo  $[a, b]$  y funciones  $m(x), M(x)$  continuas<sup>2</sup> tales que el punto  $(x, y)$  pertenece a  $A$  si y solo si  $a \leq x < b$  y  $m(x) \leq y < M(x)$ . Las funciones  $m(x)$  y  $M(x)$  se llamarán “borde inferior” y “borde superior” de  $A$ .

Diremos que un conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^2$  está “bien delimitado” horizontalmente si pasa lo mismo pero respecto de la segunda coordenada: existe un intervalo  $[c, d]$  y funciones  $m(y), M(y)$  continuas<sup>3</sup> tales que el punto  $(x, y)$  pertenece a  $A$  si y solo si  $c \leq y < d$  y  $m(y) \leq x < M(y)$ . Las funciones  $m(y)$  y  $M(y)$  se llamarán, por razones obvias, “borde izquierdo” y “borde derecho” de  $A$ .

Está claro que puede haber conjuntos “bien delimitados” vertical y horizontalmente *a la vez*. Por ejemplo, un disco, un ortoedro...Cualquier conjunto convexo<sup>4</sup> está bien delimitado horizontal y verticalmente.

En el libro de referencia, estos conjuntos se llaman “de tipo I” y “de tipo II”, pero prefiero una nomenclatura más castellana.

En estos conjuntos se puede integrar una función poniendo límites de integración variables.

<sup>1</sup>Aunque *no es esto exactamente* lo que hemos demostrado. La escritura como integral iterada tiene sentido porque las funciones tienen sentido *salvo en un conjunto de contenido cero* y estos son irrelevantes a la hora de integrar. Pero puesto que en este curso las funciones serán todas continuas (y de hecho diferenciables) salvo en conjuntos de contenido cero, abusaremos de ahora en adelante de la notación.

<sup>2</sup>Salvo en un conjunto de contenido cero, pero esto es irrelevante.

<sup>3</sup>Mismo comentario que antes

<sup>4</sup>Aunque no hemos definido conjunto convexo, claro

**Teorema 7.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto acotado medible tal que  $A \subset [a, b] \times [c, d]$ . Si  $A$  está bien delimitado verticalmente y  $m(x)$  y  $M(x)$  son sus bordes inferior y superior y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en  $A$ , entonces

$$\int_A f = \int_a^b \left( \int_{m(x)}^{M(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Lo análogo ocurre en regiones bien delimitadas horizontalmente, cambiando el orden de integración:

**Teorema 8.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto medible tal que  $A \subset [a, b] \times [c, d]$ . Si  $A$  está bien delimitado horizontalmente y  $m(y)$  y  $M(y)$  son sus bordes izquierdo y derecho y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable en  $A$ , entonces

$$\int_A f = \int_c^d \left( \int_{m(y)}^{M(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

### El teorema de Fubini en tres variables

En  $\mathbb{R}^3$  nos limitamos a dar enunciar el resultado para el orden de integración  $z, y, x$ , remarcando que en todas las aplicaciones de este curso *el orden en que se integra es irrelevante*.

**Teorema 9.** Sea  $A \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  un conjunto acotado medible y  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada integrable. Supongamos que existen funciones  $m(x), n(x)$  y  $u(x, y), v(x, y)$  tales que  $(x, y, z) \in A$  si y solo si  $a \leq x < b$ ,  $m(x) \leq y < n(x)$  y  $u(x, y) \leq z < v(x, y)$ . Entonces<sup>5</sup>

$$\int_A g = \int_a^b \left( \int_{m(x)}^{n(x)} \left( \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} g(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Nótese que, aunque lo que “primero se vea” sea  $dx$ , lo que primero se integra es la variable  $z$ , luego la  $y$  y luego la  $x$  en el enunciado del teorema.

Un conjunto  $A$  que cumpla las condiciones del teorema lo llamaremos *bien delimitado*. Si un conjunto no cumple esas condiciones, lo más probable es que se pueda poner como unión disjunta de conjuntos bien delimitados. Si no se puede, entonces hay que echar cuentas detalladamente.

### Ejemplo 2

La esfera, los cubos, los cilindros, los elipsoides, todos ellos están bien delimitados.

<sup>5</sup>Estamos una vez más abusando de la notación, pero este enunciado es el que utilizaremos.



### El teorema de Fubini en general

El resultado general conocido como Teorema de Fubini no es tan claro de enunciar. Nos limitamos a hacerlo para cubos:

**Teorema 10.** Sea  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada e integrable de  $\mathbb{R}^n$  definida en un cubo  $C = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ . Se tiene que para cada  $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$ , la función  $f(d, x)$  es integrable en  $[a_n, b_n)$  y además<sup>6</sup>:

$$\int_C f = \int_D \left( \int_{a_n}^{b_n} f(d_1, \dots, d_{n-1}, x_n) dx_n \right),$$

donde  $D$  es el cubo  $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1})$ , que es de dimensión  $n - 1$ .

## 2.4 El teorema del cambio de variable

Haber reducido el problema de integración en varias variables a la integración iterada en una variable es mucho, pero no es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. En una variable se puede facilitar la integración con una reparametrización (el método de cambio de variable), hasta el punto de que hay integrales que solo se pueden calcular por este método. En varias variables ocurre exactamente igual. El enunciado del teorema equivalente es bastante más complejo que en una variable, pero el resultado es *moralmente* el mismo, si se entiende bien lo que se hace tanto en una como en varias variables.

### Aplicaciones diferenciables 1 – 1

El concepto clave en este contexto es el de aplicación 1 – 1 diferenciable. Para hablar de cambios de variable es necesario también el concepto de *conjunto abierto*, definido supuestamente en la asignatura de Cálculo.

**Definición 13.** Diremos que una aplicación  $\varphi : A \rightarrow B$  entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  es una *aplicación 1 – 1 diferenciable* si es una biyección (es inyectiva y sobreyectiva) y tiene derivadas parciales en todos los puntos, *salvo quizá en un conjunto de contenido cero*.

Prácticamente todas las aplicaciones que conocemos tienen derivadas parciales en todos los puntos donde están definidas. Además, si una aplicación

---

<sup>6</sup>Esto significa también que todo la función que aparece a la izquierda en el integrando es también integrable en  $D$  pero no se dan los detalles.

entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  es 1 – 1 y tiene derivadas parciales, entonces su jacobiano solo puede ser nulo en un conjunto de medida nula (esto pasa en  $\mathbb{R}^3$  y en cualquier dimensión, se llama *Teorema de Sard*). Esta propiedad es importante como luego se verá.

Es decir, lo difícil en la definición, a la hora de trabajar, es conseguir que la aplicación sea 1 – 1 (inyectiva y sobreyectiva).

Una manera visual de imaginar una aplicación 1 – 1 diferenciable es pensar el abierto  $A$  como un sólido (en el plano, una lámina) y el abierto  $B$  como una deformación *suave* de dicho sólido: estirar, doblar, comprimir, pero no romper. El que sea diferenciable *salvo en un conjunto de contenido cero* quiere decir que se permite que la deformación genere *esquinas*, pero “no demasiadas”. En realidad, como el jacobiano es distinto de cero casi siempre, habrá pocas esquinas en todos los casos que nos encontremos.

Esta imagen visual es buena porque nos da incluso una idea del resultado.

## Idea

En una variable, el teorema del cambio de variable dice que si  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  es diferenciable y  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, entonces

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Supongamos por un momento que  $g$  tiene signo constante positivo (es decir, consiste en *estirar ó encoger*, pero no cambiar de orientación ni ir hacia atrás).

Entendamos  $h(x)$  como una *densidad* sobre una varilla de extremos  $c$  y  $d$ . La integral de la izquierda es la masa de la varilla (visualmente, se calcula la masa de un “elemento muy pequeño”, calculando densidad por longitud,  $h(x)dx$  y se suman todas estas masas, que es lo que hace la operación  $\int_c^d$ ).

La aplicación  $g$  es una transformación que convierte la varilla  $[a, b]$  en la  $[c, d]$ . La imagen mental correcta es que la varilla  $[a, b]$  se estira por unos sitios y se encoge por otros. El hecho de que  $g$  tenga signo constante solo significa que “no se dobla hacia atrás”. La varilla se estira o se encoge en cada punto según indica la derivada de  $g$  (si la derivada es mayor que 1, se “estira”, si es menor que 1, se encoge).

Ahora nos gustaría calcular la masa de la varilla  $[a, b]$ , que es la misma masa que la de  $[c, d]$ , pero con otra distribución de densidades, que proviene de esa operación de estirado/encogido.

Tomemos un trozo muy pequeño de la varilla inicial, cerca del punto  $x_0 \in [c, d]$ . Este pequeño segmento, que tiene longitud  $dx$ , tiene masa es  $h(x_0) dx$ .

El punto  $x_0$  corresponderá a uno de la varilla deformada  $t_0 \in [a, b]$  (es decir,  $g(t_0) = x_0$ ).

Ahora bien, la longitud *pequeña*  $dx$  corresponde a una longitud  $g'(t_0)dt$ , pues un segmento pequeño se transforma, por una aplicación, en un segmento dilatado tanto como indique la derivada. Por tanto, en el punto  $t_0$ , la masa total que hay acumulada es el producto de “la densidad retrotraída”  $h(g(t_0))$  por la longitud equivalente a  $dx$ , que es  $g'(t_0)dt$  (pues, si se tiene que  $x = g(t)$ , entonces  $dx = g'(t)dt$ ), así pues, la “masa” en  $t_0$  es  $h(g(t_0))g'(t_0) dt$ .

Como la unidad diferencial de longitud en  $[a, b]$  es  $dt$ , resulta que *la densidad en  $t_0$  es  $h(g(t_0))g'(t_0)$* . Si ahora calculamos la masa en la varilla  $[a, b]$  según la fórmula “suma de las densidades por longitudes diferenciales”, queda

$$\int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

y como *la masa no se crea ni se destruye* por una dilatación, ha de ser igual a la masa de la varilla  $[c, d]$ :

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Cambiemos de dimensión por un momento.

Tomemos una lámina plana, que llamamos  $L$ , de tamaño  $1 \times 1$ , cuya densidad se desconoce. Se le somete a una deformación térmica lineal  $\varphi$ , que la convierte en otra lámina plana pero ya no cuadrada, sino que forma un paralelogramo delimitado por los vectores  $B = (x_1, y_1)$  y  $D = (x_2, y_2)$ , como en la figura 2.1. Por un procedimiento extraño, se puede calcular la densidad de esta nueva lámina y se sabe que es  $\rho'$ . ¿Cuál es la densidad original de la lámina unidad, si se sabe que es constante,  $\rho$ ? *¿Está claro que la densidad no es la misma? ¿por qué?*

No hay más que calcular la masa de la lámina deformada. Un sencillo razonamiento geométrico muestra que, si  $v_1 = (x_1, y_1)$  y  $v_2 = (x_2, y_2)$ , entonces el área es

$$\text{área} = |x_1y_2 - x_2y_1|. = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

El valor absoluto se toma porque estamos calculando áreas (que no son negativas).

Esto puede parecer misterioso (el determinante es una operación demasiado complicada y sin raíces cuadradas como para que la altura ó el ángulo aparezcan a partir de él), pero es sencillo (y sería bueno que cada uno hiciera el ejercicio) comprobar que es cierto para dimensiones 2 y 3.

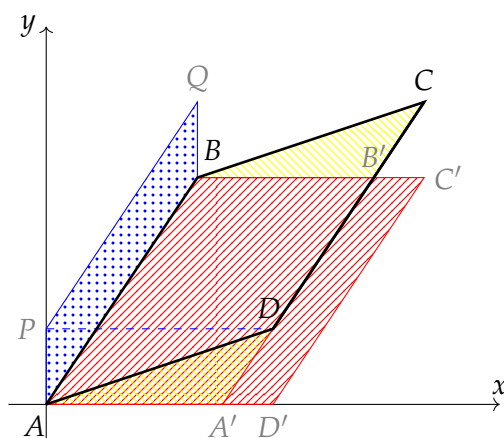


Figura 2.1: Área de un paralelogramo

Si  $D = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$ , el área del paralelogramo  $ABCD$  de la figura 2.1 es el área del paralelogramo  $ABC'D'$  menos el área del  $A'B'C'D'$  (como se ve, los triángulos con rayado amarillo son iguales). Con argumentos de semejanza de triángulos (hay muchas líneas paralelas y muchos ángulos iguales en el dibujo) se comprueba que el área de  $A'B'C'D'$  es la misma que la de  $APQB$ , que es (fácil)  $x_2y_1$ . Así que, el área de  $ABCD$  es  $x_1y_2 - x_2y_1$ .

Así pues, la masa de la lámina es

$$M = \rho' |x_1y_2 - x_2y_1| = \int_{L'} \rho \, dx \, dy$$

Esa masa es, claro, la misma que la de la lámina sin deformar:

$$M = \int_L \rho \, du \, dv$$

y, como el cuadrado unidad tiene área 1, resulta que la densidad original ha de ser

$$\rho = \rho' |x_1y_2 - x_2y_1|$$

sustituyendo en la fórmula de la masa, nos queda (nótese el cambio de conjunto de integración y de variables):

$$M = \int_{L'} \rho' \, dx \, dy = \int_L \rho' |x_1y_2 - x_2y_1| \, du \, dv$$

pero la expresión del valor absoluto es

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que tenemos

$$\int_{L'} \rho' dx dy = \int_L \rho' |\det(\text{Jac}(\varphi))| du dv$$

La única diferencia entre esta fórmula y la de dimensión 1 que expresamos arriba es que en dimensión 1 no hace falta el valor absoluto *porque ya incluimos el signo al cambiar los extremos de la integral* (una integral entre  $x$  e  $y$  es opuesta a una integral entre  $y$  y  $x$ ).

El razonamiento en cualquier dimensión es el mismo. Lo único que hay que saber es que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de los vectores que lo forman.

**Teorema 11.** *Dado un paralelepípedo  $V$  delimitado por los vectores  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^n$ , el volumen de  $V$  es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores expresados en la base estándar.*

Si en vez de una aplicación lineal se tiene una deformación cualquiera,  $(x, y) = \varphi(u, v)$ , lo que se hace es recurrir a la idea de integral como “suma de masas de elementos diferenciales”.

Supongamos que  $\varphi : A \rightarrow B$  es una aplicación 1 – 1 diferenciable entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ , cuyo jacobiano tiene determinante de signo constante (y se anula como mucho en un conjunto de contenido cero). Sea  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable (una *densidad* ó una *densidad de carga*, por ejemplo).

Por pura física, puesto que el cuerpo es el mismo salvo que sometido a un cambio “mecánico”, ni la masa ni la carga total cambian. Así que

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_A \tilde{h}(u, v) du dv$$

donde  $\tilde{h}(u, v)$  es la *densidad* ó *densidad de carga* original, en  $A$ .

Mirando infinitesimalmente en un punto  $(u_0, v_0)$  de  $A$ , tenemos una situación análoga a la de la deformación lineal (esa es la definición de la matriz jacobiana, la aplicación lineal que mejor aproxima a la función):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \end{aligned}$$

que significa que “un paralelogramo de dimensiones  $(du, dv)$  se transforma en uno de dimensiones  $\text{Jac}(\varphi) \cdot (du, dv)$ ”. Por tanto, la *densidad*  $\tilde{h}(u, v)$  en un paralelogramo de dimensiones  $(du, dv)$  es

$$\tilde{h}(u, v) = h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que la igualdad de integrales (de *masas o cargas*) queda

$$\int_B h(x, y) \, dx \, dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))| \, du \, dv$$

que es exactamente la fórmula del teorema de cambio de variable.

### Enunciado y ejemplos

El enunciado preciso del teorema de cambio de variable es, dados dos abiertos acotados  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

**Teorema 12.** *Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  una aplicación 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable en  $B$ . Entonces  $h \circ \varphi$  es integrable en  $A$  y se tiene*

$$\int_B h = \int_A (h \circ \varphi) \cdot |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

Expresado en coordenadas:

**Teorema 13.** *Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  una aplicación en  $\mathbb{R}^2$  dada en coordenadas por  $(x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ , que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada integrable en  $B$ . Entonces  $h \circ \varphi$  es integrable en  $A$  y se tiene*

$$\int_B h(x, y) \, dx \, dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v))| \, du \, dv$$

Y en  $\mathbb{R}^3$  (etc.)

**Teorema 14.** *Sea  $\varphi : A \rightarrow B$  una aplicación en  $\mathbb{R}^3$  dada en coordenadas por  $(x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$ , que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada integrable en  $B$ . Entonces  $h \circ \varphi$  es integrable en  $A$  y se tiene*

$$\int_B h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_A h(\varphi(u, v, w)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v, w))| \, du \, dv \, dw$$

### Atención

El teorema del cambio de variable se utiliza siempre para llevar las cosas de

$B$  a  $A$ . Se supone que en  $A$  la expresión de la integral es más sencilla, es conocida, o algo similar. No se ha de pensar que “se lleva la función acotada de  $A$  a  $B$ ” sino al revés. En caso de duda, un dibujo siempre aclara las cosas.

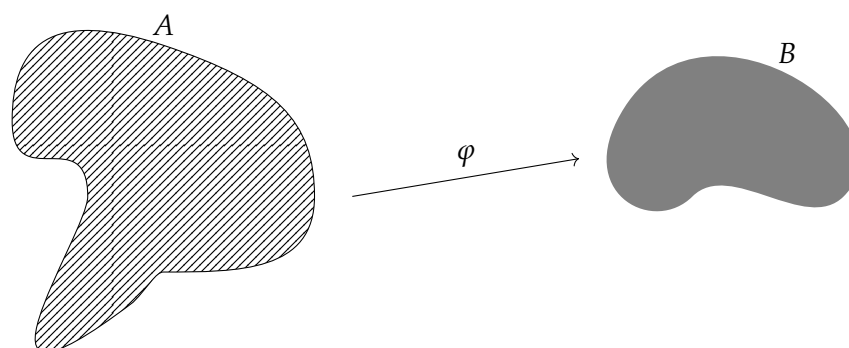


Figura 2.2: Cambio de variables

Este y el teorema de Fubini son los resultados más útiles para calcular integrales definidas en dimensión superior a 1. Lo difícil, en general, es encontrar un cambio de variables que simplifique el problema.

## 2.5 Cambios de variable notables

Existen cambios que se utilizan con mucha frecuencia, sobre todo por su naturaleza geométrica. En dimensión 2 el más importante es el cambio “a polares”, que se corresponde con la idea de *observar un conjunto desde el origen*, en vez de observarlo “desde los ejes”. La misma idea se puede trasladar a dimensión 3 de dos maneras distintas: una considerando el eje  $z$  como una “altura”, de donde se obtiene el cambio a *cilíndricas*, otra considerando el espacio como recubierto por esferas de radios sucesivamente mayores, el cambio a *esféricas*.

Cuando en lugar de considerar circunferencias o esferas se consideran elipses o elipsoides, se obtienen las versiones *generalizadas* de todos esos cambios.

### El cambio a polares

Del mismo modo que cualquier punto del plano se puede determinar por un par de coordenadas  $(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  son números reales, cualquier punto se puede determinar por un radio  $\rho$  y un ángulo  $\theta$ , donde el radio es un número real positivo (los radios son distancias) y el ángulo es un número real entre  $0$  y  $2\pi$ .

La aplicación está descrita gráficamente en la figura 2.2. Formalmente, es una aplicación  $\varphi$  del rectángulo  $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  dada por las ecuaciones

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (2.2)$$

Es claramente 1 – 1 diferenciable entre esos dos conjuntos (y no es sobreyectiva pero la imagen es todo el plano real salvo el semieje positivo de las  $x$ , con lo que para calcular integrales en el plano da igual). El jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es (claramente):

$$\det(\text{Jac}(\varphi)) = \rho$$

que, en el dominio en que está definida la aplicación, es siempre positivo, así que no hay por qué tomar su valor absoluto.

### Polares generalizadas

El cambio a polares sin más puede modificarse algo para obtener, en lugar de circunferencias concéntricas, elipses. Basta una homotecia en cada coordenada. Fijados dos números reales positivos  $a, b$ , el *cambio a coordenadas polares generalizadas de parámetros  $a$  y  $b$*  viene dado por las ecuaciones

$$\varphi(\rho, \theta) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta)$$

y tiene por matriz jacobiana

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{pmatrix}$$



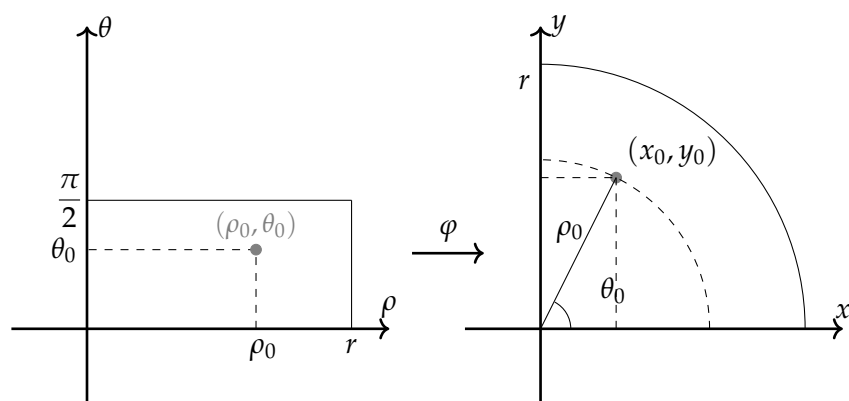


Figura 2.3: Cambio a coordenadas polares

cuyo determinante es

$$\det \text{Jac}(\varphi) = ab\rho.$$

que es no negativo (salvo cuando  $\rho$  es 0, que es un conjunto de contenido cero).

Está claro que  $a$  es el “radio horizontal” de la elipse y  $b$  el “radio vertical”. El dominio de definición es el mismo que el de las polares normales,  $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$  y el recorrido es, igualmente, todo el plano salvo el semieje horizontal derecho y es una aplicación 1 – 1.

### Polares hiperbólicas

Utilizando una hípérbola en lugar de una circunferencia, se obtiene el cambio a coordenadas hiperbólicas (lo que nos permite introducir las funciones hiperbólicas). La figura 2.4 muestra gráficamente la definición de las funciones hiperbólicas .

Como se ve, dada un área  $\theta$  (que corresponde a la noción de *ángulo* en el caso del círculo) en la hípérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$ , se pueden definir dos cantidades, el *coseno hiperbólico*  $\cosh \theta$  y el *seno hiperbólico*  $\sinh \theta$ . Si en lugar de la hípérbola  $x^2 - y^2 = 1$  se utiliza  $x^2 - y^2 = \rho^2$ , se obtienen  $\rho \cosh \theta$  y  $\rho \sinh \theta$ , respectivamente. Las ecuaciones del cambio de variables son:

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cosh \theta, \rho \sinh \theta).$$

La aplicación envía el semiplano  $(\rho, \theta)$  (para  $\rho \in \mathbb{R}$  y  $\theta \in [0, \infty)$  en el “*aspa*”  $x^2 - y^2 > 0$ . El “*aspa*” vertical  $x^2 - y^2 < 0$  se obtendría con la aplicación

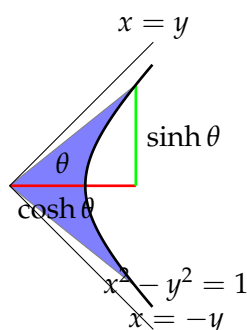


Figura 2.4: Coordenadas hiperbólicas

$(\rho \sinh \theta, \rho \cosh \theta)$ . La aplicación es 1 – 1 diferenciable y biyectiva entre dichos conjuntos y su jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \rho \sinh \theta \\ \sinh \theta & \rho \cosh \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es, en el conjunto  $\rho > 0$ , positivo e igual a  $\rho$ .

### Homotecia eje a eje

El cambio de variables más simple, tanto en 2 como en 3 variables es una homotecia en cada coordenadas:

$$\varphi(u, v, w) = (au, bv, cw)$$

cuyos matriz jacobiana y jacobiano son:

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad |\text{Jac}(\varphi)| = \rho$$

que tiene como determinante  $abc$ . Este cambio puede parecer *tonto*, pero es la base de muchas simplificaciones. Por ejemplo, para calcular el volumen de un tetraedro recto de lados  $a, b, c$ .

### Coordenadas cilíndricas

La primera versión de las coordenadas polares en dimensión 3 es una “traslación directa” de las coordenadas polares planas, utilizando el tercer

eje como “altura” (es decir, dejándolo quieto). Así se obtiene el cambio

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z), \quad |\text{Jac}(\varphi)| = ab\rho \quad (2.3)$$

cuyo jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante distinto de cero (en concreto,  $\rho$ ) en todo el dominio de definición  $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$  (salvo en un conjunto de medida nula). Es fácil comprobar que es una aplicación 1 – 1 en el dominio y que recubre todo  $\mathbb{R}^3$  salvo un conjunto de medida nula, así que es utilizable como cambio de coordenadas para la integración en cualquier conjunto de  $\mathbb{R}^3$  medible.

### Cilíndricas generalizadas

La misma generalización que para las coordenadas polares se puede aplicar en las cilíndricas y se obtiene el cambio

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta, z) \quad (2.4)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos números reales positivos. El determinante del jacobiano es  $ab\rho$  y el dominio de definición, etc. el mismo que en las cilíndricas. Este cambio es útil cuando en lugar de un cilindro circular hay que parametrizar uno elipsoidal.

### Coordenadas esféricas

La generalización “total” de las coordenadas polares al espacio tridimensional son las llamadas coordenadas *esféricas*. Hay muchas maneras de parametrizar el espacio utilizando el radio y dos ángulos. Aquí escribimos una, pero (aparte de las obvias rotaciones y giros posibles), hay otras que no son necesariamente equivalentes.

Las coordenadas esféricas envían una “banda” infinita (en un sentido) de anchura  $2\pi$  y altura  $\pi$  con coordenadas  $(\rho, \theta, \phi)$  sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, z)$  mediante las ecuaciones

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \quad (2.5)$$

como se ha dicho, los límites de variación de las variables  $(\rho, \theta, \phi)$  son

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

La matriz jacobiana de esta aplicación es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix}$$

cuyo determinante tiene signo negativo siempre y es

$$|\text{Jac}(\varphi)| = -\rho^2 \sin \phi$$

en el conjunto en que está definido (que es  $0 < \rho, 0 < \theta < 2\pi$  y  $0 < \phi < \pi$ ). Así que para este cambio es preciso tomar el valor absoluto del determinante jacobiano a la hora de hacer el cambio de variables en la integral.

### Esféricas generalizadas

Como en los casos anteriores, se puede generalizar el cambio a esféricas utilizando un elipsoide de radios  $a, b, c$ :

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (a\rho \cos \theta \sin \phi, b\rho \sin \theta \sin \phi, c\rho \cos \phi)$$

que tiene por jacobiano

$$\det(\text{Jac}(\varphi(\rho, \theta, \phi))) = -abc\rho^2 \sin \phi$$

## 2.6 Simetrías del conjunto, paridad de la función

Hay unas cuantas simplificaciones útiles a veces para calcular integrales que se derivan de las posibles simetrías del conjunto de integración y de la paridad de la función (*de ambas cosas a la vez*, no basta con que haya una). Las enumeramos someramente pero han de tenerse en cuenta, pues puede perfectamente haber funciones “muy difíciles de integrar” cuya integral sea trivial si se dan estos casos.

### Dimensión 2

#### Simetrías respecto de los ejes

En el plano  $\mathbb{R}^2$ , dependiendo de las simetrías del conjunto de integración respecto de los ejes coordenados, puede ocurrir:

**Funciones pares** Si  $f(x, y)$  es par en una de las dos variables y el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde  $\Omega'$  es la intersección del conjunto  $\Omega$  con el semiplano positivo correspondiente al eje de simetría.

**Funciones impares** Si  $f(x, y)$  es impar en una de las dos variables y el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

### Simetría respecto del origen

Por otro lado, si el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto de los dos ejes coordenados y  $f(x, y)$  es par en  $x$  y en  $y$ , entonces

$$\int_{\Omega} f = 4 \int_{\Omega'} f$$

donde  $\Omega'$  es la intersección de  $\Omega$  con cualquiera de los cuadrantes (se suele utilizar el positivo, positivo, por comodidad).

## Dimensión 3

### Simetrías respecto de planos

Las siguientes propiedades se dan para funciones en  $\mathbb{R}^3$ :

**Funciones pares** Si la función  $f(x, y, z)$  es par en una de las variables y el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde  $\Omega'$  es la mitad del recinto que corresponde al semiespacio positivo en esa variable.

**Funciones impares** Si la función  $f(x, y, z)$  es impar en una de las variables y el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

**Simetrías respecto del origen**

Si una función  $f(x, y, z)$  es *par* en cada una de las variables y el recinto de integración  $\Omega$  es simétrico respecto de todos los planos coordenados, entonces

$$\int_{\Omega} f = 8 \int_{\Omega'} f$$

donde  $\Omega'$  es la parte del recinto situada en el octante positivo (en cualquiera de los octantes).

**Cuerpos de revolución**

Si  $P$  es un cuerpo de revolución, hay varias posibilidades para calcular su volumen .

**Como un disco** Si el cuerpo se puede expresar como la rotación *alrededor del eje de OX* del área encerrada entre las funciones  $g(x)$  y  $f(x)$  en el plano  $(x, y)$ , entonces

$$\text{vol}(P) = \pi \int_a^b |f(x)^2 - g(x)^2| dx$$

suponiendo que  $0 \leq g(x) < f(x)$ . Si  $g(x) = 0$ , entonces queda

$$\text{vol}(P) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los discos (anillos)” de radio menor  $g(x)$  y radio mayor  $f(x)$  entre  $a$  y  $b$ .

**Como un cilindro** Si el cuerpo es la rotación del mismo área girando alrededor del eje  $OY$ , entonces

$$\text{vol}(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x) - g(x)| dx,$$

que, si  $g(x) = 0$  queda

$$\text{vol}(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los cilindros verticales” de radio  $x$  y altura  $|f(x) - g(x)|$ , entre  $a$  y  $b$ , que valen  $2\pi x|f(x) - g(x)|$ .

## 2.7 Medias, momentos, volúmenes...

Hay varias cantidades relevantes en problemas físicos y estadísticos que se definen utilizando integrales (porque *son* nociones que se refieren a datos acumulados). Las enumeramos y damos sus definiciones. Comenzamos por una lista de los que son comunes en todas las dimensiones. En todas estas definiciones, se habla del conjunto  $C$ , pero se ha de sobreentender que es  $C$  *dotado* de la densidad correspondiente.

**Media integral** Si  $f$  es una función integrable en un conjunto  $C$  acotado medible de  $\mathbb{R}^n$ , se define la *media integral* (o simplemente *media*) de  $f$  en  $C$  como:

$$m(f) = \frac{1}{\text{vol}(C)} \int_C f \quad (2.6)$$

donde  $\text{vol}(C)$  es el volumen de  $C$ , como en la página 20.

**Masa** Cuando  $f$  es una función integrable *no negativa* en un conjunto acotado medible  $C \subset \mathbb{R}^n$ , se puede decir que  $f$  es una densidad, en cuyo caso, la *masa de  $C$*  es:

$$m(C) = \int_C f. \quad (2.7)$$

**Carga total** Cuando  $f$  es una función integrable en un conjunto acotado medible  $C$ , se puede pensar también como una *densidad de carga* (eléctrica) sobre  $C$ , en cuyo caso la *carga total* de  $C$  es:

$$q(C) = \int_C f. \quad (2.8)$$

La diferencia con el caso anterior es que la densidad de *masa* es siempre positiva (no hay masas negativas), mientras que para la *carga*, puede tener cualquier signo.

**Densidad media** Dada  $f$  integrable en un conjunto acotado medible  $C$ , entendida como una densidad de carga ó de masa, la *densidad media* (de carga ó de masa) es:

$$\frac{m(C)}{\text{vol}(C)} \text{ ó } \frac{q(C)}{\text{vol}(C)} \quad (2.9)$$

donde  $\text{vol}(C)$  es el volumen de  $C$ , como en la página 20.

**Centro de masas** Dada una densidad  $f(x) \geq 0$  integrable en un conjunto acotado medible  $C \subset \mathbb{R}^3$ , se define el *centro de masas* de  $C$  como el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de coordenadas:

$$x_0 = \frac{\int_C xf}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{\int_C yf}{m(C)}, \quad z_0 = \frac{\int_C zf}{m(C)}, \quad (2.10)$$

donde  $m(C)$  es la masa de  $C$ , como en (2.7). Si el cuerpo fuera plano, se definiría igual, pero con dos coordenadas solamente.

Los momentos se enuncian de manera distinta en dos y tres dimensiones, así que subdividimos la sección en estos dos casos.

### Momentos en dimensión 2

Dado un conjunto acotado medible  $C$  en  $\mathbb{R}^2$  y una función  $f(x)$  no negativa, se definen los *momentos estáticos del cuerpo  $C$  con densidad  $f(x)$* <sup>7</sup> con respecto a los ejes coordenados como

$$M_x = \int_C yf(x, y) dx dy, \quad M_y = \int_C xf(x, y) dx dy. \quad (2.11)$$

Está claro, de las definiciones anteriores que, si  $(x_0, y_0)$  es el centro de masas del cuerpo, entonces

$$x_0 = \frac{M_y}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m(C)}$$

donde  $m(C)$  es la masa de  $C$ .

### Momentos en dimensión 3

Dado un conjunto acotado medible  $C$  en dimensión 3, y una función  $f(x)$  integrable y no negativa en  $C$ , se define:

**Momentos estáticos** los momentos estáticos de  $C$  respecto de los planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  son, respectivamente:

$$M_{xy} = \int_C zf, \quad M_{xz} = \int_C yf, \quad M_{yz} = \int_C xf. \quad (2.12)$$

**Momentos de inercia respecto a ejes** los momentos de inercia de  $C$  respecto de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se definen, respectivamente como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)f, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)f, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2)f. \quad (2.13)$$

**Momento de inercia respecto al origen** el momento de inercia respecto del origen se define como

$$I_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)f \quad (2.14)$$

**Momentos respecto a planos** los momentos de inercia respecto de los planos coordenados son, respectivamente

$$I_{xy} = \int_C z^2f, \quad I_{xz} = \int_C y^2f, \quad I_{yz} = \int_C x^2f. \quad (2.15)$$

---

<sup>7</sup>Se dirá "momento de  $C$ ", sobreentendiendo que se le dota a  $C$  de la densidad  $f(x)$ .



## Áreas y volúmenes

Las integrales que hemos definido nos deben servir, como es obvio, para calcular áreas y volúmenes, también. La integral doble se puede utilizar para calcular áreas de figuras planas (esta es la definición de *volumen* de un conjunto acotado medible), pero también para calcular volúmenes de figuras delimitadas por el grafo de una función definida en un conjunto acotado medible de  $\mathbb{R}^2$ . En concreto

*Nota 1.* Si  $C$  es un conjunto acotado medible de  $\mathbb{R}^2$  y  $f(x, y)$  es una función integrable en  $C$ , el volumen encerrado entre el plano  $(x, y)$  y la gráfica de la función es

$$\int_C f(x, y) dx dy$$

igual que el área encerrada entre el eje  $OX$  y la gráfica de una función de una variable  $f(x)$ .

Para calcular el área de un conjunto acotado medible  $C$  de  $\mathbb{R}^2$ , no hay más que (como se definió en la página 20) calcular la integral sobre  $C$  de la función constante 1:

$$\text{area}(C) = \int_C dx dy.$$

Para calcular el volumen de un sólido en  $\mathbb{R}^3$  (es decir, de un conjunto acotado medible  $C$ ), se realiza la misma operación en dimensión 3:

$$\text{vol}(C) = \int_C dx dy dz.$$

---

## Capítulo 3

# Campos Vectoriales, curvas, superficies...

---

En este capítulo se introduce muy sucintamente la teoría de campos de vectores en el plano y en el espacio, con el objetivo de enunciar el Teorema de Stokes (página 52), que es quizá la aplicación más importante, junto con sus consecuencias (el Teorema de Gauss, principalmente). La integración de campos en curvas y superficies es el contexto en el que el teorema de Stokes se encuadra, pero también posee interés en sí misma, como aplicación de las integrales múltiples al cálculo de masas (y, por ende, de longitudes y áreas) y momentos.

En todos los enunciados habrá probablemente imprecisiones teóricas (aunque procuraremos evitarlas), pero ha de tenerse en cuenta que el objetivo del curso es más práctico que teórico y que posiblemente ninguna de esas imprecisiones ocurra en los ejemplos que el alumno pueda encontrarse en el futuro (p.ej. todas las consideraciones podrían hacerse para campos de tipo  $C^2$ , pero vamos a hacerlas para campos  $C^\infty$  y vamos a suponer que todas las fronteras de los conjuntos son *mínimamente normales*, es decir, *analíticas a trozos*, por no decir *semialgebraicas*).

### 3.1 Curvas

Comenzamos con el estudio de las curvas.

**Definición 14.** Una *curva* en  $\mathbb{R}^3$  (ó  $\mathbb{R}^2$ , pero de aquí en adelante utilizaremos siempre  $\mathbb{R}^3$  e identificaremos  $\mathbb{R}^2$  con el plano  $z = 0$ ) es una aplicación de un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Se denota  $\gamma$ ,  $\gamma(t)$  o bien  $(x(t), y(t), z(t))$ . Se supondrá de aquí en adelante que las “ecuaciones” de las coordenadas son funciones con derivadas de todos los órdenes.

Una curva tiene asociada una colección de objetos que pasamos a enumerar:

**Definición 15.** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva cuyas ecuaciones vienen dadas por las coordenadas  $(x(t), y(t), z(t))$ , se define:

- La *trayectoria* de  $\gamma$  es el conjunto  $\Gamma$  dado por el recorrido de la aplicación  $\gamma$ ; es decir,  $\Gamma = \gamma([a, b])$ .
- El *vector tangente* a  $\gamma$  en un punto  $(x(t), y(t), z(t))$  es  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$  donde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

En general, el vector tangente a una curva se denota siempre  $d\bar{s}$  y se puede llamar también *elemento de longitud* de una curva.

- La *velocidad* de una curva  $\gamma$  en un punto  $(x(t), y(t), z(t))$  es la norma (longitud) del vector tangente:

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

que es la *longitud recorrida en un tiempo diferencial*, si se supone que  $t$  es “el tiempo”.

Vamos a utilizar las siguientes nociones en el futuro:

**Definición 16.** Una curva  $\gamma$  se dice *simple* si es *inyectiva* (es decir, si no pasa dos veces por el mismo punto).

**Definición 17.** Una curva  $\gamma$  es *cerrada* si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , es decir si el punto inicial y el final coinciden. Una curva cerrada también se puede denominar *ciclo*.

**Definición 18.** Una curva  $\gamma$  se dice que es *cerrada simple* si es una curva cerrada y  $\gamma$  es inyectiva en  $[a, b)$ .

Con estos conceptos se puede ya comenzar a hacer algunos cálculos interesantes. Supongamos que  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que toma valores en la trayectoria de una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La *integral de línea* corresponde a la idea de integrar a lo largo de la trayectoria de  $\gamma$ , no solo de intervalos en  $\mathbb{R}$ :

**Definición 19.** La *integral de línea* de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  se define como la integral en  $[a, b]$  de la función “retrotraída” al intervalo ponderada por la velocidad:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) ds = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

Si  $\gamma$  es una curva cerrada (un ciclo), se suele denotar la integral de línea como

$$\oint_{\gamma} f$$

Como es obvio, la integral de línea de una función constante corresponde a la idea de *masa* de la curva suponiendo que la densidad lineal es dicha constante. Como la masa es la curva coincide con su longitud si la densidad es uno, se puede definir

**Definición 20.** La *longitud* de una curva es la integral de línea de la función constante 1 sobre la curva:

$$long(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Y, por otro lado

**Definición 21.** Dada una función  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la *masa* de la curva  $\gamma$  (o, equivalentemente de  $\Gamma$ ) de densidad  $f$  como la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ :

$$masa(\gamma) = \int_{\gamma} f ds,$$

que no es más que la “suma de todas las densidades por unidad de longitud”.

## 3.2 Superficies

La noción de superficie se corresponde con la de aplicación de un *abierto* de  $\mathbb{R}^2$  en el espacio.

**Definición 22.** Una superficie es una aplicación  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de un abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  cuyas ecuaciones

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

son diferenciables un número infinito de veces. El recorrido de la superficie (es decir, el conjunto  $T(D)$  imagen del abierto  $D$  en  $\mathbb{R}^3$ , la *superficie* “en sí”) se denotará  $|T|$  o bien con la letra  $S$ .

Igual que las curvas, las superficies tienen asociado un vector, que en este caso es *normal* (no tangente):

**Definición 23.** Dada una superficie  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el *vector normal* a  $T$  en cada punto  $T(u, v)$  es el vector

$$d\bar{S} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v \, du \, dv$$

donde  $\bar{T}_u$  y  $\bar{T}_v$  son, respectivamente, el “vector tangente en la dirección  $u$ ” y el “vector tangente en la dirección  $v$ ”:

$$\bar{T}_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \bar{T}_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

y  $\times$  representa el producto vectorial.

Así que el vector normal, en coordenadas, se escribe en cada punto  $T(u, v)$  como

$$d\bar{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Su norma (es decir, la raíz cuadrada de su módulo al cuadrado) se denota siempre  $dS$ .

Con este concepto se puede ya definir la integral de una función sobre una superficie:

**Definición 24.** Dada una superficie  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de recorrido  $S$  y una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la *integral de superficie* de  $f$  sobre  $T$  (o sobre  $S$ ) como la integral de  $f$  “retrotraída a  $D$ ” según  $T$ :

$$\begin{aligned} \iint_S f &= \int_D f(T(u, v)) \, dS = \\ &= \int_D f(T(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

donde la última integral es una integral doble en  $D$ .

Si  $f(x, y, z)$  se entiende como una *densidad*, entonces la definición que acabamos de dar es

**Definición 25.** La *masa* de la superficie  $S$  con densidad  $f$  es la integral de superficie de  $f$  en  $S$ .

Y, puesto que el área coincide con la masa cuando la densidad es 1:

**Definición 26.** El *área* de  $S$  es la integral de superficie de la función 1 en  $S$ :

$$\text{area}(S) = \iint_S dS = \int_D \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

A veces, al vector normal  $\|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\|$  se le denota por  $\bar{n}$ .

### 3.3 Campos de vectores y su integración

Comenzamos el estudio sistemático de los *campos de vectores*, para lo cual primero los definimos

**Definición 27.** Un *campo de vectores* en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es una aplicación  $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Vamos a asumir en todo momento que los campos de vectores tienen coordenadas diferenciables un número arbitrario de veces salvo quizá en un subconjunto *pequeño*.

Ha de entenderse un campo de vectores como una *flecha* que, por lo general, indicará una *fuerza* ó una *velocidad* en cada punto del espacio (la fuerza ejercida por el campo gravitatorio sobre una unidad de masa o la velocidad de una partícula que se mueve en un lugar del espacio...). El que las coordenadas de la aplicación  $\bar{F}$  sean diferenciables no es más que un requerimiento técnico para facilitar todo el estudio (si no fuera así, la técnica sería mucho más compleja).

El primer concepto *integral* relativo a un campo es el de *integral* a lo largo de una trayectoria, que puede entenderse (es quizá la noción más natural) como el *trabajo* ejercido por un campo  $\bar{F}$  al moverse una partícula siguiendo una curva. Dado un campo  $\bar{F}$  en  $\mathbb{R}^3$  (lo mismo vale para  $\mathbb{R}^2$ ) y una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si escribimos el campo  $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , se define

**Definición 28.** La *integral de línea* de  $\bar{F}$  a lo largo de  $\gamma$  es la integral en  $[a, b]$  del producto escalar de  $\bar{F}$  con el vector velocidad:

$$\int_{\gamma} \bar{F} = \int_a^b \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

(recuérdese que  $d\bar{s}$  denota el vector velocidad de  $\gamma$ ) que, en coordenadas se escribe (en  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\int_{\gamma} \bar{F} = \int_a^b F_1 dx + \int_a^b F_2 dy + \int_a^b F_3 dz$$

que, a su vez, no es más que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{F} &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt + \\ &+ \int_a^b F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt + \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt \end{aligned}$$

Como se ve, si la curva  $\gamma$  es perpendicular a  $\bar{F}$  en todos los puntos, el campo no realiza ningún trabajo, mientras que si  $\gamma$  tiene la misma dirección que  $\bar{F}$ , el trabajo es máximo ó mínimo, dependiendo del sentido. Nótese que es el trabajo *realizado por el campo*. Finalmente, es un buen ejercicio comprobar que *el trabajo realizado no depende de la velocidad*: si  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otra parametrización simple de la misma curva  $\Gamma$ , y  $d\tilde{s}$  es su elemento de velocidad, entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} \bar{F} d\tilde{s} = \int_{\gamma} \bar{F} d\bar{s}$$

suponiendo que  $\gamma$  también era simple (este resultado no es más que un cambio de variable).

### Ejemplo 3

Si  $\bar{F}$  es el campo de velocidades de un fluido y  $\gamma$  es un ciclo (una curva cerrada), se denomina *circulación* de  $\bar{F}$  a la integral

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{s}$$

### Ejemplo 4

La intersección de una esfera con un cilindro de radio mitad y que pasa por el centro de la esfera se denomina *bóveda de Viviani*.

La otra noción clave es la que relaciona un campo de vectores con una superficie: el *flujo*. Supongamos que  $\bar{F}$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R}^3$  y  $S$  es una superficie (es decir,  $S$  es la imagen de  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ). Entonces

**Definición 29.** El flujo de  $\vec{F}$  en  $S$  es la integral del producto escalar de  $\vec{F}$  por el vector normal  $\vec{n}$  a  $S$ :

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \vec{F} \cdot \|T_u \times T_v\| du dv$$

Si el campo tiene la misma dirección que el vector normal, el flujo es *positivo*, mientras que si tiene dirección opuesta, el flujo es *negativo*. Este es uno de los lugares en que la *orientación* del vector normal es importante.

### El operador Nabla

Por lo general, los campos de vectores que se encuentran en Física no son cualesquiera, y los problemas de campos de vectores relacionan unos con otros. Existe un "operador" que se utiliza mucho (aunque no sea más que un artificio de notación) para construir campos a partir de otros campos o de funciones escalares, el *operador Nabla* (con la notación  $i, j, k$  para los vectores coordenados):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

**Definición 30.** Supongamos que  $f$  es una función en  $\mathbb{R}^3$  y que  $\vec{F}$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Se definen:

- El *gradiente* de  $f$  es el campo de vectores dado por

$$\nabla f = \nabla \cdot f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- El *rotacional* del campo  $\vec{F}$  es el producto vectorial de  $\nabla$  por  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

- Y, finalmente, la *divergencia* de un campo de vectores  $\vec{F}$  es un campo escalar (es decir, una función), producto escalar del operador nabla con  $\vec{F}$ :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Cada uno de los campos definidos arriba representa, hasta cierto punto, un concepto físico:

**El gradiente** indica la dirección (e intensidad) de la máxima pendiente de las superficies de nivel de una función. La dirección del gradiente es normal (perpendicular) a dichas superficies de nivel.

**El rotacional** indica la *tendencia* al giro de un campo de vectores cuando este se interpreta como la velocidad en cada punto de un fluido. Si en un punto se ubicara una esfera “muy pequeña”, esta giraría (o no) según la forma del campo de vectores. El eje de giro viene indicado por el rotacional y la velocidad angular es la mitad del módulo.

**La divergencia** indica la *tendencia a expandirse o comprimirse* de un campo de vectores, cuando este se interpreta como un campo de velocidades de un fluido. Cuanto más positiva es la divergencia, más tiende el fluido a “expandirse” (salir) del punto, cuanto más negativa, más tiende el fluido a “comprimirse” (entrar) en el punto. Otra manera de visualizarlo es como el cambio (con el signo opuesto) de densidad (si un fluido se comprime, la densidad aumenta, si un fluido se expande, la densidad disminuye). Los fluidos incompresibles se mueven según trayectorias sin divergencia.

Un campo de vectores cuyo rotacional es cero se denomina *irrotacional* y uno cuya divergencia es cero se denomina *incompresible* ó *solenoidal*.

Hay dos igualdades fundamentales:

**Teorema.** *Los campos gradientes no giran y los campos rotacionales son incompresibles:*

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0\end{aligned}$$

### 3.4 Anexo topológico

Antes de continuar necesitamos algunas nociones muy básicas de *topología*, solo para poder enunciar los resultados con precisión, sin pretender que estos conceptos sean importantes, pues al final el alumno siempre va a trabajar con conjuntos “bien delimitados”, o por conjuntos delimitados por curvas muy sencillas. En cualquier caso, pensamos que el esfuerzo por entender estos conceptos merece la pena.

Quizás la noción más importante de todas es la de *conjunto abierto*, que corresponde a la idea intuitiva de conjunto cuyos puntos están “bien contenidos”:

**Definición 31.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se llama *abierto* si cualquier punto  $x \in A$  tiene una “bola” alrededor totalmente contenida en  $A$ . Es decir, si para cualquier  $x \in A$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que el conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

está contenido en  $A$ :

$$B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Es fácil comprender un poco mejor la noción de conjunto abierto si se tiene en cuenta lo siguiente:

*Nota 2.* Cualquier conjunto definido por *desigualdades estrictas* de funciones continuas es un abierto.

### Ejemplo 5

Por tanto, los siguientes conjuntos son abiertos:

- Los semiespacios  $ax + by + cz + d > 0$ , para cualesquiera  $a, b, c$  y  $d$ .
- Los “cubos” abiertos:  $(a, b) \times (c, d) \times (e, f)$ .
- Las *esferas*:  $B_r(x)$  definidas como arriba.

Además, se tiene que

**Teorema.** *Cualquier unión de abiertos es un abierto y las intersecciones finitas de abiertos son abiertas.*

La segunda noción importante es la de *frontera*: los puntos que están “cerca” de un conjunto y de su complementario.

**Definición 32.** Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la *frontera* de  $A$ , denotada  $\partial A$  es el conjunto de puntos tales que cualquier bola centrada en ellos contiene a un punto de  $A$  y uno que no es de  $A$  (del complementario de  $A$ , que se denota  $A^c$ ).

Por lo general, si  $A$  es un abierto definido por una desigualdad, la frontera de  $A$  se corresponde con el conjunto definido por “la igualdad”:

### Ejemplo 6

Se tiene:

- La frontera de una bola es la esfera “externa”: si  $A$  es la bola  $B_\varepsilon(x)$ , entonces  $\partial A = S_\varepsilon(x)$ , donde

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| = \varepsilon\}.$$

- La frontera de un semiespacio es un plano: si  $A$  es el semiespacio  $ax + by + cz + d > 0$ , entonces  $\partial A$  es el plano  $ax + by + cz + d = 0$ .

Aunque la siguiente noción se suele utilizar en otros contextos, pensamos que es óptima para enunciar con precisión los teoremas siguientes.

**Definición 33.** Diremos que un abierto  $A$  está *bien contenido* en otro abierto  $B$  si  $B$  incluye a  $A$  y a la frontera de  $A$ . Es decir, si cualquier punto “muy cercano” a  $A$  está en  $B$ . Si  $A$  está bien contenido en  $B$ , se escribirá  $A \sqsubset B$ .

La noción anterior es útil para lo siguiente, que no es más que la definición correcta de “función diferenciable en un abierto y en su frontera”:

**Definición 34.** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable un número  $k$  de veces con continuidad está *definida fuertemente* en  $A$  si existen un abierto  $B$  tal que  $A \sqsubset B$  y una función  $\tilde{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$  de un abierto  $B$  a  $\mathbb{R}$  que es diferenciable un número  $k$  de veces con continuidad, que coincide con  $f$  en  $A$ .

Un campo de vectores  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  está *definido fuertemente* en  $A$  si cada componente  $F_i$  lo está. Lo mismo una aplicación  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Finalmente,

**Definición 35.** Un *dominio de Stokes* es un abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que su frontera  $\partial A$  es una *unión finita* de curvas cerradas simples.

### 3.5 El teorema de Stokes

Todas las definiciones y propiedades anteriores se orientan al que posiblemente sea el resultado más profundo de todo este curso, el Teorema de Stokes, que relaciona el flujo del rotacional de un campo de vectores a través de una superficie con el trabajo realizado por el campo en el borde de la superficie. Comenzamos por un lema algo más simple: el Teorema de Green, pero previamente necesitamos hablar algo de *bordes* de superficies, aunque lo haremos solo en el contexto en que trabajaremos siempre.

A partir de ahora, si  $D$  es un dominio de Stokes y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una de las curvas del borde, diremos que  $\gamma$  está *bien orientada* si  $D$  queda a la izquierda del vector tangente a  $\gamma$ . Si no se especifica lo contrario, cada vez que se tome una curva del borde de un dominio de Stokes, se supondrá que *está bien orientada*. En cualquier caso, si  $C$  es la imagen de  $\gamma$ , se denotará  $C^+$  a la curva *bien orientada* y  $C^-$  a la curva orientada negativamente.

Enunciamos el resultado primero que se conoció, aunque es el menos informativo:

**Teorema 15** (de Green). *Sea  $D$  un dominio de Stokes cuyo borde se supone que es la imagen de una sola curva cerrada simple (llamémosla  $C$  al borde). Sean  $P$  y  $Q$  dos funciones de  $\mathbb{R}^2$  diferenciables. Entonces*

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

(Nótese que la primera integral es sobre una curva y la segunda sobre un dominio entero, i.e. una superficie).

En realidad, este resultado no es más que una sencilla consecuencia del siguiente, que es el realmente importante para superficies:

**Teorema 16** (de Stokes). *Sea  $D$  un dominio de Stokes y  $C_1, \dots, C_n$  las curvas cerradas que determinan su borde. Sea  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie definida fuertemente en  $D$  tal que su borde es la imagen de  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  por una extensión de  $T$ . Supongamos que  $\vec{F}$  es un campo de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces*

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{s}$$

donde  $S$  es la superficie definida por  $T$  y  $d\vec{s}$  denota el elemento de longitud en cada componente del borde de  $S$ ,  $\partial S$ .

En definitiva, para conocer el flujo de un rotacional, basta calcular el trabajo del campo original en el borde.

Para volúmenes, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 17** (de Gauss o de la Divergencia). *Supongamos que  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y que  $\partial\Omega$  es una superficie orientada que es unión finita de las imágenes de superficies  $T_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial infinitamente diferenciable fuertemente definido en  $\Omega$ . Entonces*

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{S}$$

o dicho de otra forma,

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal a  $\partial\Omega$ .

Lo que quiere decir la igualdad anterior es que para calcular la “divergencia total” de un campo en un volumen, basta calcular el flujo del campo por el borde (la cantidad total de entrada y salida de un campo en un volumen se sabe en el borde y es precisamente el flujo).

La *orientación* que se toma para la superficie respecto del volumen es la que deja el vector normal “hacia el exterior” del volumen.

### 3.6 Consecuencias y otras propiedades

Quizás la consecuencia física más clara del Teorema de Stokes es la propiedad de los gradientes de ser conservativos.

**Definición 36.** Un campo de vectores  $\bar{F}$ , fuertemente definido en un abierto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se dice *conservativo* si el trabajo realizado por el campo no depende de la trayectoria. Es decir, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas que unen los puntos  $P$  y  $Q$ , entonces

$$\int_{\gamma_1} \bar{F} d\bar{s}_1 = \int_{\gamma_2} \bar{F} d\bar{s}_2$$

donde  $d\bar{s}_1$  y  $d\bar{s}_2$  son los elementos de longitud (vectores tangentes ó velocidades) correspondientes a  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente.

Es sencillo probar que si  $A$  es un abierto tal que dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante una curva, entonces

**Teorema 18.** Si  $\bar{F} = \nabla f$  es el gradiente de  $f$  en  $A$ , entonces  $\bar{F}$  es conservativo.

Pero no solo ocurre esto, sino también que

**Teorema 19.** Supongamos que  $\bar{F}$  está fuertemente definido en un abierto conexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  y es conservativo. Entonces existe una función (que se denomina potencial)  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\bar{F} = \nabla f$ .

Ahora bien, la propiedad “irrotacional” de los campos de vectores gradientes es *casi* suficiente, pero no del todo...

#### Ejemplo 7

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el “tubo”  $1 < x^2 + y^2 < 2$  y sea  $\bar{F}$  el campo de vectores fuertemente definido en  $S$  por las ecuaciones

$$\bar{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Este campo tiene rotacional 0 pero *no es conservativo* (y por tanto no es el gradiente de una función), pues la integral en cualquier camino cerrado que “rodee” al borde interior es  $2\pi$ .

El problema del ejemplo anterior es que el tubo es un conjunto abierto que *no es simplemente conexo*: hay curvas cerradas simples que no se pueden “deformar” dentro del conjunto hasta convertirlas en un punto.

El caso es que eso no ocurre en  $\mathbb{R}^3$  cuando se le quitan unos pocos puntos:

**Teorema 20.** Si  $\bar{F}$  es un campo de vectores definido en  $\mathbb{R}^3$  salvo quizá en un número finito de puntos, entonces son equivalentes:

- $\bar{F}$  es conservativo.
- Para cualquier curva cerrada simple  $\gamma$ , se tiene

$$\oint_{\gamma} \bar{F} = 0$$

- Existe una función  $f$  definida en  $\mathbb{R}^3$  salvo quizá un número finito de puntos tal que  $\bar{F} = \nabla f$ .
- $\bar{F}$  es irrotacional:  $\text{rot } \bar{F} = 0$ .

Este resultado *no es cierto en  $\mathbb{R}^2$* , pues si al plano se le quita una cantidad finita de puntos, resulta un conjunto que *no es simplemente conexo* (hay curvas cerradas simples que no se pueden contraer a “puntos”). El resultado para el plano es el siguiente

**Teorema 21.** Sea  $\bar{F}$  un campo vectorial definido en  $\mathbb{R}^2$  salvo en un número finito de puntos. Entonces

1. Para cualquier curva  $\gamma$  cerrada simple se tiene

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{s} = 0$$

si y solo si el campo es conservativo.

2. Si se tiene la igualdad anterior para cualquier curva cerrada simple, entonces  $\bar{F}$  es el gradiente de alguna función  $f$ , es decir  $\bar{F} = \nabla f$  definida en todo  $\mathbb{R}^2$  menos quizás en los puntos en que  $\bar{F}$  no lo está.

---

## Capítulo 4

# Análisis complejo

---

Por sorprendente que parezca, una de las ramas más importantes del Análisis (y de las Matemáticas en general) es la conocida como “Variable Compleja”, que consiste en el estudio del Cálculo Infinitesimal extendido a los números complejos de la manera que vamos a introducir en seguida.

### 4.1 Funciones complejas derivables

La noción fundamental del Análisis es la derivabilidad. Para funciones reales de una variable real, la noción de derivabilidad consiste en “ser aproximable por una función lineal” cerca de un punto. Es decir, una función  $f(x)$  es derivable si existe un número  $f'(x)$  tal que, si  $dx$  es un elemento infinitesimal, entonces:

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \dots$$

donde los puntos suspensivos indican un elemento infinitesimal de orden mayor que  $dx$  (i.e. *mucho más pequeño*). La noción equivalente para funciones de números complejos debería ser algo así:

**Definición 37.** Una función compleja  $f(z)$  es *derivable* (en un punto  $z$ ) si existe un número  $f'(z)$  tal que para cualquier elemento infinitesimal complejo  $dz$ , se tiene que

$$f(z + dz) = f(z) + f'(z)dz + \dots$$

donde los puntos suspensivos indican un elemento infinitesimal de orden mayor que  $dz$ .

El caso es que esta definición no da una buena idea computacional ni elemental de “cuándo una función compleja es derivable”, que es lo que tratamos de explicar a continuación.

### Funciones complejas como pares de funciones reales

Un número complejo es un par  $(a, b)$  de números reales, que puede escribirse también como  $a + ib$ , donde  $i$  denota “la raíz cuadrada de  $-1$ .” Las operaciones de suma, producto, etc. son bien conocidas.

Una función compleja de variable compleja, como toda función, es una *asignación* que, partiendo de un número complejo  $z$  da lugar a otro número complejo  $f(z)$ . Así pues, si  $z = x + iy$ , entonces  $f(z)$  será un par que depende de  $x$  e  $y$ , y que está constituido por dos elementos, que llamaremos de ahora en adelante  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , las partes *real* e *imaginaria* de  $f(z)$ :

$$f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy) = (u(x, y), v(x, y))$$

cualquiera de las expresiones anteriores representa el mismo objeto (el número complejo  $f(z)$  imagen de  $z = x + iy$  por la función  $f$ ).

#### Ejemplo 8

Funciones complejas pueden ser las siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_1(x + iy) = ix^2 \\ f_2(z) &= f_2(x + iy) = -y \\ f_3(z) &= f_3(x + iy) = x^2 - iy^2 \\ f_4(z) &= f_4(x + iy) = (x^2 + y^2) \\ f_5(z) &= f_5(x + iy) = e^x (\cos y + iy) \\ f_6(z) &= f_6(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi \\ f_7(z) &= f_7(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y + ix) \end{aligned}$$

y es un ejercicio interesante calcular las partes real e imaginaria de cada ejemplo.

Sin embargo, si se toma, por ejemplo,  $f_1(z)$  del ejemplo anterior, se puede observar lo siguiente: por un lado, si se considera el infinitésimo  $dx$  (es decir, se hace  $dy = 0$ ):

$$f_1(x + iy + dx) = i(x + dx)^2 = i(x^2 + 2xdx + dx^2) = ix^2 + 2xidx + \dots$$



mientras que si se toma  $dx = 0$ , entonces

$$f_1(x + iy + idy) = ix^2 = ix^2 + 0idx + \dots$$

por lo que  $f(z + dz)$  no puede escribirse como  $f(z) + f'(z)dz + \dots$ , pues por un lado debería ser  $f'(z) = 2x$  y por otro  $f'(z) = 0$ .

Así pues, hace falta alguna propiedad especial, además de que  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  (las partes real e imaginaria de  $f(z)$ ) sean derivables para que  $f(z)$  sea “derivable como función compleja.”

Calculemos, para empezar, utilizando la expresión de  $f(z)$  como un par de funciones reales: si  $z = x + iy$  entonces

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Tomemos un infinitésimo general  $dz = dx + idy = (dx, dy)$ , donde  $dx$  y  $dy$  son independientes. Se tiene que

$$f(z + dz) = (u(x + dx, y + dy), v(x + dx, y + dy)).$$

Asumiendo que  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son diferenciables, se tiene

$$f(z + dz) = \left( u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots, v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \dots \right). \quad (4.1)$$

Por otro lado, si  $f(z)$  “debe” comportarse como una función “compleja derivable”, lo lógico es que

$$f(z + dz) = f(z) + f'(z)dz + \dots,$$

para cierto  $f'(z)$ . Si se escribe esta última igualdad usando la expresión compleja clásica, queda

$$u(x, y) + iv(x, y) + (\bar{u}(x, y) + i\bar{v}(x, y))(dx + idy) + \dots,$$

que, multiplicando, resulta

$$u(x, y) + iv(x, y) + (\bar{u}(x, y)dx - \bar{v}(x, y)dy + iu(x, y)dy + iv(x, y)dx). \quad (4.2)$$

Puesto que se quiere que (4.1) sea lo mismo que (4.2), igualando las partes reales e imaginarias y los coeficientes de  $dx$  y de  $dy$ , tienen que cumplirse las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \bar{u}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\bar{v}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{v}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y} &= \bar{u}(x, y). \end{aligned}$$

Y, como los números  $\bar{u}(x, y)$  y  $\bar{v}(x, y)$  pueden ser cualesquiera (pues solo se quiere que  $f(z)$  tenga derivada, no se exige ningún valor), se concluye que

**Teorema 22.** Para que una función compleja  $f(z)$  sea “derivable” como función compleja, se han de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.3)$$

**Ejercicio.** Del Ejemplo 8, compruébese qué funciones son derivables como funciones complejas y cuáles no.

Fácilmente se comprueba que la suma, el producto y el recíproco (cuando la función no es 0) de cualquier función compleja derivable, es derivable también. Las funciones constantes lo son, evidentemente, y su derivada es 0. Además, la composición de funciones derivables es derivable (y su derivada se calcula con la regla de la cadena). Finalmente, la función inversa de una función derivable *cerca de un punto* es también derivable (pero esta propiedad es local, no puede “usarse en todo el plano complejo” sin más).

### Ejemplo 9

Otros ejemplos de funciones derivables son (el alumno debería comprobar que alguna lo es):

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z \\ f_2(z) &= z^n \\ f_3(z) &= e^z = e^x(\cos y + ii) \\ f_4(z) &= \sqrt[m]{z} \text{ cuando } z \neq 0 \\ f_5(z) &= z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ f_6(z) &= \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce, por ejemplo, que cualquier función del tipo

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios en  $z$  es derivable fuera de los ceros de  $Q(z)$ , como en el caso real.

## 4.2 Funciones holomorfas

Las ecuaciones (4.3) de Cauchy-Riemann son solo una parte de la noción de “derivabilidad” compleja. En realidad, una función  $f(z)$  que las cumple es, automáticamente, mucho más rica de lo que parece. En efecto:

**Teorema 23.** *Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función compleja de variable compleja definida en un dominio  $U$  del plano complejo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *La función  $f(z)$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo  $U$ .*
2. *En cualquier punto  $z_0 \in U$ , se puede expresar  $f(z)$  como una suma infinita*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*(lo que se denomina una serie de potencias centrada en  $z_0$ ), que converge (i.e. define un número) en un círculo centrado en  $z_0$  y contenido en  $U$ .*

3. *Si  $V \subset U$  es un dominio simplemente conexo<sup>1</sup> con borde una curva cerrada simple  $\gamma$ , entonces la integral (que se calcula del modo evidente) siguiente es siempre nula.*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy) = 0.$$

Además, fijado  $z_0$ , los coeficientes  $a_n$  de la serie de 2 se calculan con la igualdad de Cauchy:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

donde  $C_\varepsilon$  es una circunferencia pequeña contenida en  $U$  y tal que el disco que contiene también está contenido en  $U$ .

Lo primero que aparece claramente en el teorema enunciado es que la integración forma parte importante de la derivabilidad, lo cual es sorprendente a primera vista. Como se observará, la integración compleja tiene un papel fundamental en toda la teoría (mucho más que la derivación, en realidad).

Demostremos sucintamente que la propiedad de la derivabilidad (esto es, satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann) implica la propiedad 3: como  $dz = dx + idy$ , se tiene que

$$I_{\gamma} = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy),$$

---

<sup>1</sup>Recuérdese que esto significa que “no tiene agujeros.”

que, multiplicando, queda

$$I_\gamma = \left( \int_\gamma u(x,y) dx - v(x,y) dy \right) + i \left( \int_\gamma u(x,y) dy + v(x,y) dx \right),$$

ahora hacemos uso de la Fórmula de Green: como  $\gamma$  rodea al dominio  $V$ , que es simplemente conexo, se tiene que

$$I_\gamma = \int_V -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + i \int_V \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} dx dy$$

pero las igualdades de Cauchy-Riemann dicen justamente que tanto la parte real de  $I_\gamma$  como su parte imaginaria son 0, así que

$$I_\gamma = 0.$$

(La implicación contraria es justamente el mismo razonamiento “hacia atrás”).

La propiedad 2 se puede expresar diciendo que “las funciones derivables complejas son la generalización de los polinomios”, aunque esta frase no tenga mucho sentido. De todos modos, a partir de ahora utilizaremos la nomenclatura tradicional:

**Definición 38.** Una función que cumple cualquiera (y, por tanto, todas) de las propiedades del Teorema 23 se llamará *holomorfa*.

### Los coeficientes

Sin duda ninguna, la propiedad más importante de las funciones holomorfas es la que se enuncia al final del Teorema 23: los coeficientes de la serie de potencias que representa a la función cerca de cada punto  $z_0$  pueden calcularse con una integral de línea que rodea a dicho punto. Comprobémoslo: supongamos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

“cerca” del punto  $z_0$ . Sea  $\varepsilon > 0$  un número real tal que el círculo de centro  $z_0$  y radio  $\varepsilon$  esté incluido en el dominio  $U$  (donde  $f(z)$  está definida). Consideremos la integral

$$I = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz$$

Si desarrollamos en serie la función  $f(z)$  dentro de la integral, queda

$$I = \int_{C_\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{m+1}} dz.$$

[Por razones técnicas que no vamos a explicar] se puede intercambiar la integral y la suma infinita, así que

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{C_\varepsilon} (z - z_0)^{n-m-1} dz$$

(obsérvese que el exponente de  $(z - z_0)$  es negativo para  $n \geq m$ . Parametremos la circunferencia

$$C_\varepsilon \equiv z = z_0 + \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

y sustituyamos en I:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} (\varepsilon e^{it})^{n-m-1} \varepsilon i e^{it} dt.$$

Finalmente, estudiemos cada integral interna, que llamaremos  $I_n$ :

$$I_n = i\varepsilon^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)it} dt.$$

Si  $n \neq m$ , el valor de  $I_n$  es<sup>2</sup>

$$I_n = i\varepsilon^{n-m} \left. \frac{e^{(n-m)ti}}{i(n-m)} \right|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

pues  $e^{0i} = 1 = e^{2\pi i}$ . El caso especial es  $n = m$ :

$$I_m = i\varepsilon^0 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

que, *milagrosamente*, no depende de  $\varepsilon$ .

De toda la explicación previa se obtiene que

$$I = a_m I_m = 2\pi i a_m$$

de donde se deduce la fórmula de Cauchy: para cualquier número natural  $n \geq 0$ :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Esta fórmula es, quizás, la más importante de la variable compleja.

Por otro lado, una comprobación elemental muestra que

---

<sup>2</sup>Aunque no se haya estudiado integración compleja, que se verá posteriormente, ya se ha dicho que tanto la derivación como la integración han de funcionar como en el caso de variables reales, así que esta igualdad es elemental de comprobar.

**Teorema 24.** *Los coeficientes  $a_n$  del Teorema 23 coinciden con los del desarrollo de Taylor de la función  $f(z)$  “como si fuera una función de variable real.”*

Es decir, que se pueden calcular los coeficientes tanto usando la fórmula de Cauchy como la de Taylor. La de Cauchy es importante por su relación con lo que se verá después: el Teorema de los Residuos y porque conecta la teoría de la derivación con la de la integración de manera intrínseca, cosa que no ocurre en el caso de funciones reales.

### Ejemplo 10

Calcular los coeficientes  $a_n$  de los desarrollos en serie de las siguientes funciones (todas ellas holomorfas en los puntos que se indican) en los puntos respectivos:

1.  $f_1(z) = z^2$  en los puntos  $z_1 = 0, z_2 = 3$ .
2.  $f_2(z) = z$  en los puntos  $z_1 = 0, z_2 = \pi, z_3 = i, z_4 = i\pi$ .
3.  $f_3(z) = 1/z$  en los puntos  $z = 1$  y  $z = 3i$ . Explíquese por qué es holomorfa en esos puntos. ¿Lo es en  $z = 0$ ?
4.  $f_4(z) = e^{z+1}$  en  $z = i, z = 1 + i$ .

## 4.3 Polos de funciones holomorfas

La función  $f(z) = 1/z$ , que aparece en el Ejemplo 10, *no es holomorfa* en el punto  $z = 0$  (¿por qué?). Sin embargo, si se considera el conjunto de los números complejos distintos de 0, es claro que es holomorfa ahí. Ocurre que el denominador “tiende a 0” cuando  $z \rightarrow 0$ , así que puede hablarse de que  $f(z)$  tiende a  $\infty$  cuando  $z \rightarrow 0$ , es decir, que  $f(z)$  tiene un polo en  $z = 0$ , como las funciones reales de variable real. Aunque esta propiedad es común a ambos tipos de funciones, es más sencillo definir “polo” de una función compleja de la siguiente manera:

**Definición 39.** Una función holomorfa  $f(z)$  tiene un *polo* en  $z_0$  si existe un número natural  $n > 0$  tal que  $(z - z_0^n)f(z)$  es holomorfa en  $z = z_0$  pero  $(z - z_0)^{n-1}f(z)$  no lo es.

Al número  $n$  se le llama *orden* del polo  $z_0$  de  $f(z)$ .

Esta definición *no sirve para definir polos de funciones de variable real*, pues por ejemplo  $e^{1/z^2}$  tiene un polo en  $z = 0$  pero no cumple la propiedad de la definición.

Por supuesto, para comprobar que  $f(z)$  tiene un polo en  $z_0$  basta, por ejemplo, verificar que puede escribirse como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

donde  $g(z)$  es una función holomorfa en  $z_0$ . Esto es justo equivalente a lo que se enuncia en la Definición 39.

### Ejemplo 11

Las siguientes funciones holomorfas (fuera de los puntos correspondientes) tienen los polos que se indican. Compruébese.

1.  $f_1(z) = 1/(z^2 + 1)$  tiene un polo de orden 1 en  $i$  y otro en  $-i$ .
2.  $f_2(z) = e^z/z$  tiene un polo de orden 1 en 0.
3.  $f(z) = \tan z$  tiene un polo de orden 1 en  $z = \pi/2$  (y tiene otros muchos más polos).
4.  $f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2 - z - 1}$  tiene un polo de orden 2 en  $z = -1$  y uno de orden 1 en  $z = 1$ .

En la práctica, una función holomorfa en un conjunto  $U$  que tiene un polo en  $z_0$  (que, obviamente, *no está en  $U$* ), es *casi* una función holomorfa en  $U$ :

**Teorema 25.** Si  $f(z)$  es holomorfa en un abierto  $U$  y tiene un polo en  $z_0$  de orden  $m$ , entonces, en un disco  $C_\varepsilon$  centrado en  $z_0$  y de radio pequeño, puede escribirse

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$$

ya, además, para cualquier entero  $n \geq -m$  se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Al desarrollo en serie comenzando en  $-m$  (i.e. con polos) se le llama desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en  $z_0$ .

Es decir, la fórmula integral de Cauchy no solo vale para funciones holomorfas en  $z_0$  sino también para funciones holomorfas fuera de  $z_0$  pero con un polo ahí.

Para unificar la manera de hablar, se define

**Definición 40.** Una función  $f(z)$  es *analítica*<sup>3</sup> en un punto  $z_0$  del plano complejo si, o bien es holomorfa en  $z_0$  o bien es holomorfa fuera de  $z_0$  y tiene un polo en  $z_0$ .

<sup>3</sup>En realidad, esta definición no es del todo general pero para este curso es suficiente.

## 4.4 Residuos

La fórmula de Cauchy para funciones analíticas dice que, si  $f(z)$  es analítica en  $z_0$  y su desarrollo de Laurent en  $z_0$  es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

entonces cada coeficiente puede calcularse así:

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{i+1}} dz.$$

Si se escribe con detalle la integral, es

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{a_i}{(z-z_0)} + \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{(z-z_0)^{i+1-j}} dz$$

donde  $C_\varepsilon$ , por insistir, es un círculo cualquiera de radio suficientemente pequeño dentro del cual  $f(z)$  es analítica y el único polo posible es  $z_0$ . Como se puede comprobar

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{a_j}{(z-z_0)^{i+1-j}} dz = 0$$

para  $j \neq i$  (véase la página 61 en que se demuestra la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas), por lo que la fórmula de Cauchy viene a decir, en resumen, que

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{a_i}{(z-z_0)} dz$$

y que

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{a_j}{(z-z_0)^{i+1-j}} dz = 0$$

para  $i \neq j$ . Si aplicamos esto a una función analítica cualquiera  $g(z)$  en  $z_0$ , se concluye que

$$\int_{C_\varepsilon} g(z) dz = a$$

si y solo si  $g(z)$  tiene, en su desarrollo en serie, el término

$$\frac{2\pi i a}{z-z_0}.$$

Por tanto, dada una función analítica  $f(z)$  en  $z_0$ , el siguiente número

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$$



está bien definido en tanto en cuanto  $C_\varepsilon$  no contenga más polos de  $f(z)$  que  $z_0$ .

**Definición 41.** El *residuo* de una función  $f(z)$  analítica en  $z_0$  es el número

$$\text{Res}_{z_0}(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz$$

para  $C_\varepsilon$  que solo contenga el polo  $z_0$  de  $f(z)$  (si es que es un polo).

Como se ha visto antes, si  $f(z)$  tiene como parte de su desarrollo en serie de Laurent en  $z_0$  el término

$$\frac{f_{-1}}{z - z_0}$$

entonces

$$\text{Res}_{z_0}(f(z)) = f_{-1},$$

lo que puede resumirse en la frase: “el residuo de una función analítica en un punto  $z_0$  es el coeficiente de orden  $-1$  de su desarrollo de Laurent.”

Una de las aplicaciones más interesantes es utilizar los residuos *para calcular integrales reales*, aunque no lo haremos en este curso por falta de tiempo.

### Ejemplo 12

Calcúlense los residuos de las funciones indicadas en los puntos respectivos.

- $f_1(z) = z/z$  en  $z = 0, z = 1$ .
- $f_2(z) = \tan z / \cos z$  en  $z = 0, z = \pi/2$ .
- $f_3(z) = z^2 / (z^2 + 1)$  en  $z = 0, z = i, z = -i$ .
- $f_4(z) = e^z \tan z$  en  $z = 0, z = \pi/2$ .

### Ejemplo 13 (Cálculo de residuos)

El residuo de una función analítica en un punto  $z_0$  se calcula como sigue: si  $f(z)$  es analítica en  $z_0$  y tiene un polo de orden  $m$ , esto significa que

$$(z - z_0)^m f(z)$$

es una función holomorfa en  $z_0$ , lo cual quiere decir que puede desarrollarse en serie de Taylor en  $z_0$ :

$$(z - z_0)^m f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + a_m(z - z_0)^m + \cdots$$

así que, despejando:

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{(z - z_0)} + a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots$$

y, como se ha visto antes,

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f(z)) = a_{m-1}.$$

Por tanto, para calcular el residuo de  $f(z)$  en  $z_0$ , ha de calcularse: el orden  $m$  del polo  $z_0$  para  $f(z)$ , desarrollarse  $(z - z_0)^m f(z)$  en serie de Taylor *hasta el orden*  $m - 1$  y el coeficiente  $a_{m-1}$  que se obtenga es el residuo.

#### Ejemplo 14

Calcular los residuos de  $f(z)$  en los puntos  $0, i$  y  $-i$  para

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}.$$

Primero de todo se ha de calcular el orden del polo en cada punto. La función  $e^z$  es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ , así que no tiene polos. Por tanto,  $f(z)$  solo tiene polos en los ceros del denominador, que son  $i$  y  $-i$ . Así pues:

$$\operatorname{Res}_0(f(z)) = 0,$$

pues  $0$  no es un polo de  $f(z)$ .

Para calcular el residuo en  $i$ , se escribe  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ ; la multiplicidad de  $i$  como polo es  $1$ , por tanto. Así pues:

$$(z - i)f(z)$$

es una función holomorfa en  $i$ . Como  $i$  es un polo de orden  $1$ , basta desarrollar esta función como serie de Taylor *hasta grado*  $0$ , es decir, basta calcular su valor en  $z = i$ . Pero es:

$$(z - i)f(z) = \frac{e^z}{z + i}$$

por lo que

$$\operatorname{Res}_i f(z) = \frac{e^i}{i + i} = \frac{\cos 1 + i1}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2}i.$$

Para el residuo en  $-i$ , se procede de la misma manera:

$$(z + i)f(z) = \frac{e^z}{z - i}$$

por lo que

$$\operatorname{Res}_{-i} f(z) = (\dots) = \frac{1}{2} + \frac{\cos 1}{2}i.$$

El resultado más relevante es:

**Teorema 26** (Teorema de los residuos). *Sea  $U$  un dominio delimitado por las curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  orientadas positivamente respecto de  $U$ . Sea  $f(z)$  una función analítica en  $U^4$ . Llamemos  $\gamma$  a la suma de las curvas  $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ . Entonces:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \text{Res}_z(f(z)).$$

*Es decir, la integral de línea sobre el borde de  $U$  de  $f(z)$  es la suma de los residuos de  $f(z)$  en  $U$  (multiplicada por el sobrante  $2\pi i$ ).*

La demostración de este resultado es una aplicación directa de la fórmula de Green.

**Ejemplo 15**

Calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$$

para las siguientes curvas:

1. Si  $\gamma_1$  es la semicircunferencia superior centrada en 0 y de radio 2, seguida del diámetro que va de  $-2$  a  $2$ .
2. Si  $\gamma_2$  es la circunferencia (una vuelta antihoraria) de centro 0 y radio 4 que comienza en 4.

Ambos casos se resuelven utilizando los cálculos del Ejemplo 14.

1. En este caso, la curva  $\gamma_1$  rodea (positivamente) un dominio  $U$  en el que  $\frac{e^z}{z^2+1}$  solo tiene un polo,  $z = i$ . Por tanto,

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 + 1} = 2\pi i \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} i \right) = \pi \cos 1 + i\pi 1.$$

2. En el segundo caso, la curva rodea un dominio en que  $\frac{e^z}{z^2+1}$  tiene dos polos,  $z = i, -i$ . Por tanto,

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 + 1} = 2\pi i \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} i + \frac{1}{2} + \frac{\cos 1}{2} i \right) = 2\pi i 1.$$

---

<sup>4</sup>Realmente es en un dominio que contiene a  $U$  y más condiciones técnicas, pero no vamos a aclararlas.

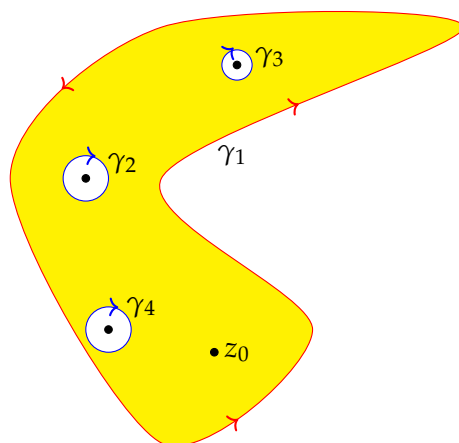


Figura 4.1: Los puntos indican polos de una función holomorfa  $f(z)$ . La integral en el dominio rodeado por  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  y  $\gamma_4$  de  $f(z)$  es la suma (multiplicada por  $2\pi i$ ) de los residuos en los polos de  $f(z)$  que están en  $U$  (en este caso, solo el punto  $z_0$ ).

### Ejemplo 16

Se considera la corona circular delimitada por una circunferencia antihoraria de radio 10 y una horaria de radio  $1/4$ , ambas centradas en el origen. Sea  $\gamma$  la unión de dichas curvas. Se pide calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^3 - z} dz$$

La función  $\cos z$  es holomorfa en todo el plano, así que los únicos polos del integrando son  $0, 1$  y  $-1$ . Llamemos

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^3 - z} = \frac{\cos \pi z}{z(z-1)(z+1)}.$$

Por el Teorema de los residuos, la integral que se pide es

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \text{Res}_z(f(z))$$

donde  $U$  denota el interior de la corona. En esta, solo están incluidos los polos  $z = \pm 1$ , así que el residuo en  $0$  no hay que calcularlo. Como en el ejemplo 14, dado que ambos polos son de orden 1, basta calcular el valor de

$$(z-1)f(z) \text{ en } z=1, \text{ que es } \frac{\cos \pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

y el valor de

$$(z + 1)f(z) \text{ en } z = -1, \text{ que es } \frac{\cos(-\pi)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Así pues,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^3 - z} dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i.$$

### Ejemplo 17

Un ejemplo algo más complicado. Calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z - 1)^2} dz$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia de radio 2 centrada en 0, en sentido antihorario.

El único polo del integrando es  $z = 1$ , de orden 2. Para calcular el residuo, se ha de calcular el coeficiente del desarrollo de Taylor de

$$(z - 1)^2 f(z) = e^z$$

de grado  $2 - 1 = 1$  en  $z = 1$ . Recordemos que el desarrollo de Taylor de una función  $g(z)$  en  $z_0$  es

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots,$$

pero solo hace falta conocer el valor del coeficiente de grado 1, en este caso  $g'(z_0)$ , donde  $g(z) = e^z$  y  $z_0 = 1$ . Así pues,

$$g'(z_0) = e^1 = e.$$

Por tanto, el residuo en 1 de  $f(z)$  es  $e$ . Así que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi e i.$$

---

## Capítulo 5

# Ecuaciones diferenciales

---

La Ingeniería es, primariamente, la aplicación de la Física a los procesos (sobre todo a los de producción y construcción). La Física es la *ciencia de lo sujeto a cambio* (esto incluye la Estática, pues en esta se estudia lo sujeto a cambio cuando no cambia).

La formalización del cambio en el nivel infinitesimal, como se estudia en el Cálculo, se basa en el concepto de *derivada*: una de las interpretaciones naturales de la derivada  $f'(x)$  es justamente la *razón de variación* de la función  $f$  con respecto a la variable en el punto  $x$  (es decir, la comparación como cociente del incremento de la función  $f$  cerca del punto  $x$  y el incremento “infinitesimal” de la variable  $x$ ), por eso se escribe también

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

para indicar precisamente el cociente (“la razón”) de los incrementos.

La Física, en general, no se dedica a calcular valores de cosas sino a problemas más generales (o más interesantes), que pueden expresarse como una pregunta del tipo “¿cómo se *comporta* algo en determinadas circunstancias?” Es decir, la Física busca describir un “comportamiento”, la relación entre varios parámetros a lo largo de un periodo o en toda una parte del espacio. Para resolver este tipo de problemas, se ha de tener en cuenta que:

- El *comportamiento* de algo (digamos  $f$ ) respecto de otra cosa (digamos  $x$ ) se mide con la gráfica de  $f$  respecto de  $x$ .

- Las relaciones que da la Física, por lo general, entre cantidades, vienen descritas por derivadas (primeras, segundas o más allá).

Es decir, los problemas que plantea la Física son problemas en los que se busca conocer los valores que toma una cantidad dependiendo de otra. El ejemplo más simple es el tiro parabólico: ¿cuál es la trayectoria de un objeto lanzado en la superficie de la tierra? Se busca conocer la posición de una piedra (esto sería  $f$ ) en función del tiempo (esto sería  $x$ ). La relación es...

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\vec{g}$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria. Está claro que  $f$  es en realidad una colección de coordenadas  $x, y, z$  que dependen del tiempo  $x(t), y(t), z(t)$  y  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  (la gravedad solo afecta a la coordenada *vertical*). Si expresamos estas ecuaciones por separado (escribiendo  $\ddot{v}$  en lugar de la derivada segunda, como hacen los físicos), queda

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$\ddot{y}(t) = 0$$

$$\ddot{z}(t) = -g$$

que, en castellano, significa: la piedra no está sujeta a ninguna aceleración salvo la de la gravedad, que actúa en vertical exclusivamente. Es muy sencillo describir el movimiento a partir de estas ecuaciones, pero no es el lugar.

Por experiencia uno sabe que la trayectoria de una piedra está determinada con dos datos: el lugar desde el que se lanza y el momento inicial (o la velocidad inicial, son equivalentes): para que una piedra “vuele” hay que lanzarla...Esta obviedad se llama “condición inicial” (si no se lanza, no vuela).

## 5.1 Introducción por medio de ejemplos

La única manera razonable de motivar el estudio de las ecuaciones diferenciales es introducir algunos ejemplos para mostrar que, de hecho, son la manera precisa de expresar los problemas físicos.

### Ejemplo 18 (Enfriamiento de una taza)

Newton postuló (tras realizar experimentos sucesivos, *se supone*) que la manera de enfriarse un objeto en contacto con el medio ambiente se puede describir así: si  $A$  es la temperatura ambiente (que puede considerarse constante) y  $T$  es la temperatura del cuerpo (digamos temperatura “media”), entonces en cada instante,  $T$  disminuye de manera directamente proporcional a la diferencia

$T - A$ . Lo que se quiere conocer es  $T(t)$ , la temperatura en cada instante, así que la ley que Newton enunció es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - A), \quad (5.1)$$

donde  $k$  es una constante positiva que depende del cuerpo en cuestión.

Esta ecuación diferencial se puede resolver como sigue: llamemos  $y(t) = T(t) - A$ . Es obvio que  $y'(t) = T'(t)$ , así que la ecuación queda

$$y'(t) = -ky(t),$$

si suponemos que  $y(t) \neq 0$  (es decir, el cuerpo no está a la misma temperatura que el ambiente, en cuyo caso no hay transferencia de calor), podemos llevar  $y(t)$  al denominador del primer miembro y queda

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -k$$

pero el primer miembro es la derivada de  $\log(y(t))$ , así que se tiene que

$$(\log(y(t)))' = -k$$

de donde (integrando ambos miembros)

$$\log(y(t)) = -kt + c$$

donde  $c$  es una constante arbitraria así que  $y(t) = e^{-kt}e^c$ : una función exponencial. En este momento se ha de deshacer el cambio  $y(t) = T(t) - A$  y queda

$$T(t) = A + e^{-kt}e^c.$$

Téngase en cuenta que  $k > 0$  (porque suponemos que el cuerpo está más caliente que el medio ambiente).

La descripción  $T(t) = A + e^{-kt}e^c$  es correcta pero...¿qué es  $c$ ? Es la constante que se ha de calcular una vez se conoce la *condición inicial*: la temperatura a la que está el cuerpo *al principio*. Cuando  $t = 0$ , el cuerpo tendrá una cierta temperatura  $T_0$ . Entonces  $T_0 = A + e^c$ , así que  $c = \log(T_0 - A)$  (véase cómo  $T_0$  tiene que ser mayor que  $A$  para que esto tenga sentido): dada una condición inicial (la temperatura del cuerpo), solo hay una manera de que se enfríe y viene dada por una relación exponencial negativa.



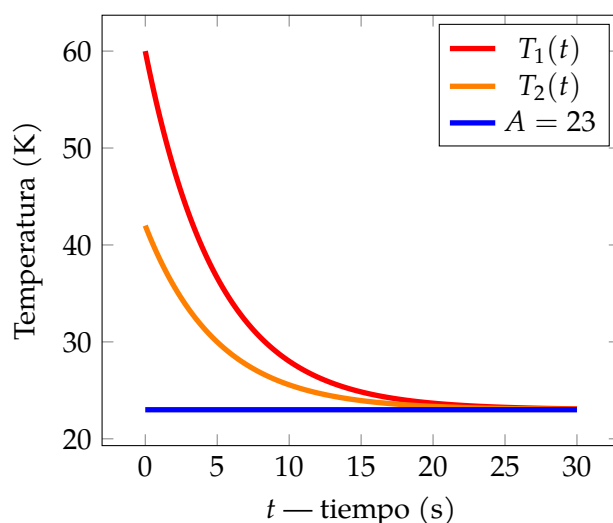


Figura 5.1: Dos ejemplos de enfriamiento (para el mismo cuerpo): temperatura ambiente (constante, en rojo):  $23^\circ$ ,  $k = 0.2$ . La temperatura inicial es de  $60K$  para la gráfica roja y  $42K$  para la naranja. Téngase en cuenta que, en realidad, las tres gráficas nunca se cortan.

### Ejemplo 19 (Inversión a interés compuesto continuo)

Una manera razonable de modelar el incremento de capital en una inversión a un tipo de interés fijo es suponer que el interés se aplica de manera continua (en realidad, los bancos lo suelen computar mes a mes). Con esta hipótesis, se puede enunciar el comportamiento del capital de la siguiente manera: “En cada instante, el crecimiento de capital es proporcional al capital presente en dicho momento.”

Por poner un ejemplo concreto, supongamos que se invierten 1000 Euros en un fondo que produce un 2% de interés anual (en tiempo continuo). Se desea saber cuál será el capital al cabo de 30 años.

Si se denomina  $c(t)$  al capital en el instante  $t$  (así que  $c(0) = 1000$ ), el comportamiento del capital tal como se describe arriba es una relación entre la derivada y el capital:

$$c'(t) = 0.02c(t).$$

Que es incluso más sencilla que la ecuación del enfriamiento. Si se lleva la  $c(t)$

al miembro izquierdo, queda

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = 0.02,$$

es decir, que la derivada logarítmica de  $c(t)$  es constante e igual a 0.02. Como arriba (pero más fácil), se tiene necesariamente que

$$c(t) = Ke^{0.02t}.$$

Para alguna constante  $K$ . Está claro que este valor ha de calcularse utilizando la condición inicial, pues el capital en tiempo  $t$  depende exclusivamente del capital al principio. Como se sabe que  $c(0) = 1000$ , queda

$$1000 = c(0) = Ke^0,$$

con lo que  $K = 1000$ . Así pues,  $c(t) = 1000e^{0.02t}$ . Para  $t = 30$ , queda  $c(t) \simeq 1822$ , que no es mucho. Pero una inversión que solo produce el 0.02 es (como cualquier comerciante sabrá) bastante mala. ¿Qué pasa si el tipo de interés es el 5%? ¿Y si encontramos un inversor que garantiza un 10%?

### Ejemplo 20 (Desintegración radiactiva)

Cada elemento de la Tabla Periódica posee una propiedad intrínseca relacionada con su estructura atómica: la velocidad a la que el núcleo se desintegra dando lugar a átomos de menor peso. Esta propiedad se resume en el dato "periodo de semidesintegración", que es el tiempo necesario para que una masa  $M$  de cierto elemento se haya transformado en una masa  $M/2$  de ese mismo elemento y otros elementos. Aunque la desintegración radiactiva es un proceso aleatorio (de naturaleza cuántica), de manera estadística puede comprobarse que *la velocidad a la que una masa  $M$  se desintegra es inversamente proporcional a  $M$* . Como se ve, se relaciona el *cambio* temporal de masa con la propia masa. Así que  $M$  es en realidad una función del tiempo  $M(t)$  y la ley de desintegración puede escribirse

$$\dot{M}(t) = -kM(t) \tag{5.2}$$

donde  $k$  es una constante positiva (de manera que el signo negativo indica que la masa *disminuye*, claro está).

El lector puede comprobar que esta ecuación es de la misma naturaleza que la (5.1), del enfriamiento de Newton (es la misma sin la temperatura ambiente). La solución de esta ecuación es aun más sencilla utilizando también la derivada logarítmica y queda

$$M(t) = e^c e^{-kt},$$

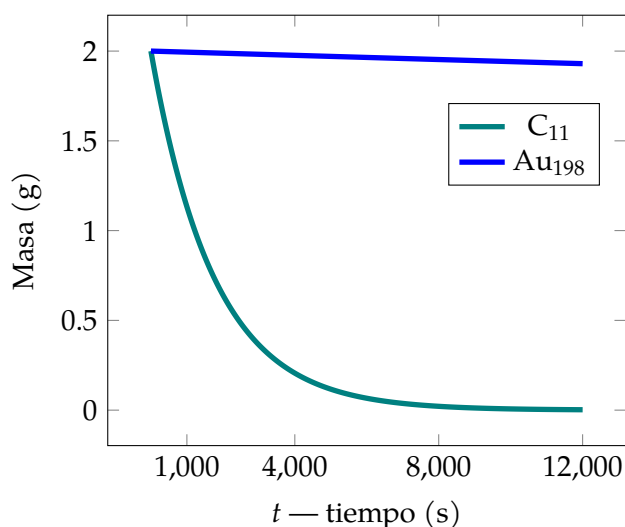


Figura 5.2: Dos ejemplos de desintegración radioactiva (bastante rápida). El  $C_{11}$  tiene periodo de semidesintegración de 1200s mientras que el  $Au_{198}$  lo tiene de 2.696 días.

donde  $e^c$  designa la masa inicial. Se puede escribir, por tanto,

$$M(t) = M(0)e^{-kt}.$$

Queda claro que  $k$  es la constante de desintegración, que puede calcularse a partir del periodo de semidesintegración<sup>1</sup>. Es obvio que en lugar de utilizar la masa, puede utilizarse el número de átomos: la gráfica solo variará en escala. Es obvio que, para conocer el desarrollo temporal de una masa de un elemento, hace falta (aparte del dato específico del periodo de semidesintegración), conocer *la masa inicial*. Si no hay masa inicial, no hay "evolución temporal de la masa": para tener una gráfica temporal hace falta especificar una condición inicial (en este caso, cuánta masa hay al inicio).

### Ejemplo 21 (Caída libre sin rozamiento)

Es este un ejemplo que está al alcance de la mano de todos y que motivó gran parte de las investigaciones de Galileo: describir el movimiento de un cuerpo al caer desde una altura  $h$ . En esta primera aproximación se supondrá que

<sup>1</sup>Sería interesante que el alumno realizara este sencillo cálculo.

el aire no afecta al movimiento en cuestión. Galileo descubrió experimentalmente que el espacio recorrido varía con el cuadrado del tiempo (es este uno de los descubrimientos más importantes de la historia). Sin embargo, en estos apuntes haremos la aproximación teórica, desde la Física de Newton.

La Segunda Ley de Newton asevera que la aceleración de un cuerpo está en proporción directa a la fuerza a la que está sujeto. Por otro lado, la Ley de la Gravitación Universal dice, en el caso de la Tierra y un cuerpo cercano a ella, que la fuerza atractiva que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es (aproximadamente) directamente proporcional a la masa del cuerpo y se sabe que la constante de proporcionalidad es (aprox.)  $-9.8\text{m/s}^2$ . Es decir,

$$F = ma, F = -9.8m$$

donde  $a$  indica la aceleración y  $m$  la masa. El signo negativo es porque suponemos que la coordenada  $y$  "crece" hacia arriba. Igualando ambas fuerzas  $y$ , suponiendo que el movimiento es exclusivamente en vertical (llamemos a la altura en cada instante  $t$ ,  $y(t)$ ), se obtiene

$$\ddot{y}(t) = -9.8,$$

que es una ecuación (se busca calcular  $y(t)$ ) en la que la función incógnita aparece derivada (dos veces, en este caso).

Lo primero que se puede hacer es, en lugar de tratar de calcular  $y(t)$ , plantear un problema indirecto más sencillo. Llámese  $v(t)$  a la velocidad  $v(t) = \dot{y}(t)$ . La ecuación anterior es obviamente equivalente a

$$\dot{v}(t) = -9.8,$$

que es resoluble de manera obvia,  $v(t) = -9.8t + K$ . Como se ve, hace falta dar una constante  $K$  que *determine de manera unívoca la evolución de la velocidad*. Por ejemplo, si se conoce la velocidad inicial  $v(0)$ , entonces  $K = v(0)$ . Es decir: *la velocidad de una partícula en movimiento vertical es la velocidad inicial más una constante por el tiempo*.

Ahora que se conoce la velocidad en función del tiempo, se puede escribir la ecuación de partida como

$$\dot{y}(t) = v(t) = -9.8t + v(0),$$

que es igualmente sencilla de resolver:  $y(t) = -4.9t^2 + v(0)t + L$ , donde  $L$  es otra constante. Si se conoce  $y(0)$  (la altura inicial), entonces  $L = y(0)$ .

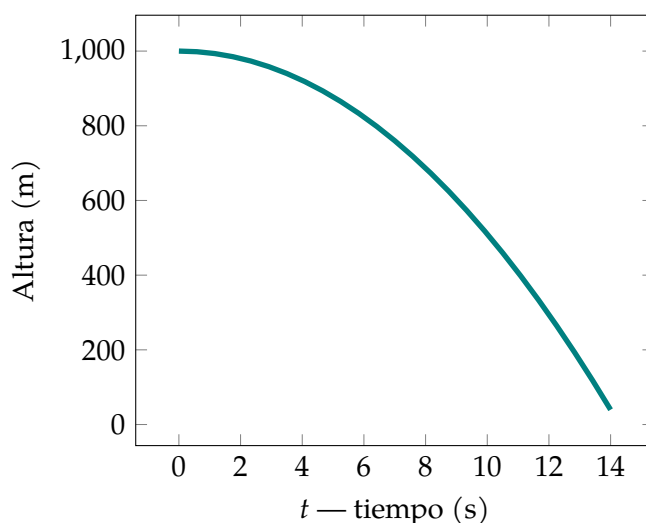


Figura 5.3: La caída libre sin rozamiento se describe con un arco de parábola. En la gráfica,  $v_0 = 0$ ,  $h_0 = 1000$ .

Es decir, si  $y(t)$  es la altura a que está la partícula,  $y(0)$  es la altura inicial y  $v(0)$  es la velocidad inicial, entonces  $y(t)$  viene descrita por  $4.9t^2 + v(0)t + y(0)$ , o lo que es lo mismo,  $y(t) = 4.9t^2 + \dot{y}(0)t + y(0)$ .

Nótese que la ecuación original era de segundo orden (derivada segunda) y han hecho falta dos constantes (la posición inicial y la velocidad inicial) para determinar de manera única la solución. Esto es general, como se verá.

#### **Ejemplo 22** (Caída libre con rozamiento)

El modelo del ejemplo anterior es irreal y poco preciso salvo para caídas de cuerpos densos desde poca altura y sin demasiado viento (“en el vacío una pluma y una piedra caen a la misma velocidad” es un adagio bien conocido pero que no refleja la realidad no vacía). Para dar un modelo más preciso, hace falta tener en cuenta el rozamiento del aire. Hay varias maneras de aproximar este efecto. En estos apuntes se utilizará la siguiente: la fuerza de rozamiento ejercida por el aire sobre un cuerpo se supondrá directamente proporcional a la velocidad del cuerpo. La constante de proporcionalidad dependerá, se supone, por ejemplo, de la masa del cuerpo, de su forma (no es lo mismo una plancha de acero que una bala), pero será constante a lo largo del movimiento. Llamemos  $y(t)$  a la posición del cuerpo en el instante  $t$ .

La Segunda Ley de Newton estipula que el producto masa por aceleración

$m\ddot{y}(t)$  es igual a la suma de las fuerzas: la gravedad  $-mg$ , con signo negativo porque suponemos que  $y = 0$  es el suelo y que  $y > 0$  es “hacia arriba”, y la del rozamiento, que va en sentido contrario al movimiento:  $-r\dot{y}(t)$ , donde  $r$  es un positivo y constante. Así pues,

$$m\ddot{y}(t) = -mg - r\dot{y}(t). \quad (5.3)$$

Cuidado con esta suma: la gravedad  $g$  tiene signo negativo porque  $y > 0$  es “hacia arriba” mientras que  $-r\dot{y}(t)$  está con ese signo porque  $\dot{y}(t)$  es la velocidad y el rozamiento *va en sentido contrario*.

Igual que antes, en la ecuación (5.3) aparecen  $\dot{y}$  y  $\ddot{y}$  pero no  $y$ , por lo que puede estudiarse el comportamiento de las velocidades y luego integrar otra vez. Si  $v(t) = \dot{y}(t)$ , entonces la ecuación (5.3) queda

$$m\dot{v}(t) = -mg - rv(t),$$

que es la misma ecuación del enfriamiento (5.1) pero con el signo cambiado. Llamando  $K = r/m$ , se obtiene

$$\dot{v}(t) = -g - Kv(t)$$

Operando, llegamos a la siguiente ecuación, que es la misma que la del enfriamiento:

$$\dot{v}(t) = -K \left( v(t) + \frac{g}{K} \right)$$

y que tiene por solución

$$v(t) = Ce^{-Kt} - \frac{g}{K}.$$

para cierta constante  $C$ . Si  $v(0)$  es la velocidad inicial, entonces  $C = v(0) + g/K$ . Así que

$$v(t) = \left( v(0) + \frac{g}{K} \right) e^{-Kt} - \frac{g}{K}$$

es la expresión de la velocidad con respecto al tiempo. Igual que en el caso del enfriamiento, hay una *velocidad límite* que no se sobrepasa (en valor absoluto, pues las velocidades van “descendiendo”, al ser cada vez más negativas). Recordando que  $K = r/m$ , la velocidad límite es, en valor absoluto,  $v = gm/r$ : depende, pues, de la masa del cuerpo y del coeficiente de rozamiento.

Aun no se ha terminado de calcular la *trayectoria* del cuerpo, solo se ha computado la velocidad. Para finalizar, basta integrar:

$$y(t) = \int v(t) dt = \int \left( v(0) + \frac{g}{K} \right) e^{-Kt} - \frac{g}{K} dt$$

es decir,

$$y(t) = -\frac{g}{K} \left( v(0) + \frac{g}{K} \right) K e^{-Kt} - \frac{g}{K} t + D$$

donde  $D$  es una constante de integración que puede calcularse a partir de la posición inicial  $y(0)$ :

$$y(0) = -\frac{g}{K} \left( v(0) + \frac{g}{K} \right) K + D.$$

**Ejemplo 23** (El movimiento armónico simple sin rozamiento)

Consideremos un muelle en reposo con una constante de Hooke  $k$ . Se supone que el origen de coordenadas (en una variable,  $x$ ) está en dicha posición de reposo. La Ley de Hooke establece que la fuerza ejercida por el muelle cuando está estirado (o contraído) una longitud  $l$ , es proporcional (con la constante  $k$ ) a dicha longitud y en la dirección contraria. En forma sucinta,

$$F(x) = -kx$$

donde  $x$  es la posición del extremo del muelle (respecto al reposo, como ya se ha dicho). Supóngase que  $k = 0.25$  y que la posición inicial del muelle es  $x = 0.1$ . Se desea conocer la evolución del muelle a lo largo del tiempo. ¿Está completamente determinado el problema? Veámoslo.

En ausencia de rozamiento, la única fuerza que actúa en este sistema es la de elasticidad, que sigue la ley de Hooke explicada antes. Por tanto, si  $x(t)$  denota la posición del extremo del muelle en tiempo  $t$ , por la Segunda Ley de Newton, ha de tenerse que

$$F = mx''(t) = -0.25x(t), \quad x(0) = 0.1.$$

Falta, claro, especificar la masa. Supongamos que es 1 (el problema no tiene unidades). Entonces queda

$$x''(t) = -0.25x(t), \quad x(0) = 0.1.$$

Que es una ecuación de segundo orden para la que se da una posición inicial. La ecuación

$$x''(t) = -0.25x(t)$$

se parece a la del calor, la semidesintegración y el interés compuesto continuo pero en lugar de la derivada primera aparece la segunda. En estas se tenía  $x'(t) = ax(t)$  y se razonaba utilizando la regla de la cadena para concluir que  $x(t) = Ke^{at}$ . En el caso que nos ocupa resulta que si  $x(t) = e^{at}$ , entonces  $x''(t) = a^2 e^{at} = a^2 x(t)$ . Pero resulta que  $k = -0.25$ , por lo que parece que basta

con que  $a^2 = -0.25$ , así que  $a = \pm 0.5i$  son los dos posibles valores deseado. Es decir,

$$x(t) = Ke^{0.5it}, x(t) = Me^{-0.5it}$$

deberían ser soluciones de esta ecuación...

Pero ¿no estamos trabajando con números reales? ¿Por qué han aparecido números complejos?

Porque realmente el problema es complejo. Se sabe (o ha de saberse) que

$$e^{ri} = \cos(r) + i(r)$$

(si no se sabe esto, puede encontrarse una explicación en cualquier sitio). Por tanto, las “soluciones” encontradas son

$$x(t) = K(\cos(0.5t) + i(0.5t)), x(t) = M(\cos(0.5t) + i(0.5t)).$$

Ahora bien (y esto es *crucial* en este razonamiento), como la ecuación es homogénea (es  $\ddot{x}(t) + 0.25x(t) = 0$ ), *la suma de dos soluciones es siempre una solución*. Por ello, las dos soluciones anteriores pueden componerse

$$x(t) = Ke^{0.5it} + Me^{-0.5it},$$

que, con senos y cosenos da

$$x(t) = (K \cos(0.5t) + M \cos(-0.5t)) + i(K(0.5t) + M(-0.5t)).$$

### Un breve inciso sobre la exponencial compleja

La definición que se ha dado arriba

$$e^{it} = \cos(t) + i(t),$$

es más natural de lo que parece.

Para empezar, es razonable pensar que la función

$$f(t) = \cos(t) + i(t)$$

se comporte, en la variable  $t$ , como una función de tipo  $a^t$  pues, por la fórmula de la suma de senos y cosenos, se tiene que

$$\begin{aligned} f(t+s) &= \cos(t+s) + i(t+s) \\ &= \cos(t)\cos(s) - (t)(s) + i((t)\cos(s) + \cos(s)(t)) \end{aligned}$$

y, recordando la fórmula del producto de números complejos, queda que

$$f(t+s) = (\cos(t) + i(t))(\cos(s) + i(s)) = f(t)f(s).$$



Es decir, que  $f(t)$  convierte sumas del parámetro en multiplicaciones. Por ello, debe existir una constante  $a$  tal que  $f(t) = a^t$ . El caso es demostrar que  $a = e^i$  (así que  $f(t)$  será  $e^{it}$ ). Una manera de comprobarlo es derivando. La función  $f(t)$ , que toma valores complejos para un parámetro real no es más que una curva, en concreto

$$f(t) = \cos(t) + i(t)$$

que es la circunferencia unidad. La derivada de  $f(t)$  —y aquí estamos haciendo una suposición razonable— debería indicar (a poco que la definición de derivada compleja sea consistente) el vector tangente a la curva. Pero la derivada de  $f(t)$  es

$$f(t)' = -(t) + i \cos(t)$$

que resulta ser  $if(t)$ . Así pues:

$$f(t)' = if(t),$$

lo cual solo puede ocurrir si  $f(t) = e^{it}$ .

En fin, se tiene necesariamente que

$$e^{it} = \cos(t) + i(t).$$

De aquí se deduce fácilmente que si  $a + ib$  es un número complejo,

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + ib) :$$

la exponencial de un número complejo es la exponencial (real) de la parte real multiplicada por el número complejo de módulo 1 cuyo argumento es la parte real del número. En resumen, un número complejo de módulo  $e^a$  y argumento  $b$ .

Siguiendo con el ejemplo del movimiento armónico simple, hemos llegado a la conclusión de que las soluciones generales de la ecuación homogénea de partida son del tipo

$$x(t) = Ke^{0.5it} + Me^{-0.5it},$$

que son funciones complejas. Ahora va a ocurrir algo *maravilloso*. Téngase en cuenta lo siguiente: en todo este razonamiento se ha partido de un problema *real*, físico, se ha establecido un modelo matemático razonable, este modelo ha debido aumentarse para incluir un aspecto no real (los números complejos imaginarios) y la solución que se ha encontrado es, en principio, del tipo

irreal: parecería que se ha llegado a un punto inútil, pues se ha creado una teoría que parece terminar en un punto sin sentido físico. Sin embargo, no hemos terminado...

La condición inicial del problema es  $x(0) = 0.1$ , lo que implica que

$$0.1 = x(0) = Ke^0 + Me^0,$$

es decir,  $K + M = 0.1$ . Con esto no determinamos las dos constantes, está claro. Pero sí que hay una relación lineal que las liga. Vistos todos los ejemplos anteriores, el hecho de que la ecuación sea de orden dos hace necesaria otra condición inicial (pues el muelle puede “soltarse” sin más o “lanzarse” en una u otra dirección). Pongamos por caso que se suelta a velocidad cero. La velocidad es la derivada con respecto a  $t$ , que ya se calculó arriba:

$$0 = \dot{x}(0) = 0.5iKe^0 - 0.5iMe^0 = 0.5K - 0.5M$$

por lo que  $K = M$ . Así pues,  $K$  y  $M$  son dos números complejos que cumplen que  $K = M$  y  $K + M = 0.1$ . Esto solo ocurre si  $K = 0.05$  y  $M = 0.05$ . De aquí se deduce que

$$x(t) = 0.05e^{0.5it} + 0.05e^{-0.5it},$$

que escrito en forma trigonométrica es

$$x(t) = 0.05(\cos(0.5t) + i(0.5t)) + 0.05(\cos(0.5t) - i(0.5t)),$$

lo cual, *maravillosamente*, da

$$x(t) = 0.1 \cos(0.5t),$$

que es justamente la ecuación de un *movimiento armónico simple* de amplitud 0.1 y longitud de onda  $4\pi$ .

Obsérvese el poder del formalismo: de un problema real se pasa a un “montaje” complejo con exponenciales imaginarias y, al aplicar las condiciones iniciales, se obtiene una solución que es, otra vez, real y que es, *de hecho*, la solución del problema. Esta es una de las paradojas más sorprendentes de la variable compleja: un andamio ajeno a la realidad que sirve para alcanzarla.

El alumno debería comprobar (es sencillo) que cualquier par de condiciones iniciales reales (posición inicial y velocidad inicial) genera una solución que es real.

#### **Ejemplo 24** (Movimiento armónico simple con rozamiento)

El problema anterior, sin rozamiento, da lugar a un movimiento oscilatorio

que no cesa. La realidad es, claramente, distinta y se hace necesario incluir un término que incorpore el rozamiento a la descripción del problema. Como en el caso de la caída libre, supondremos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y de sentido contrario. Por concretar, utilizaremos una constante de rozamiento de 0.05. La Segunda Ley de Newton queda

$$m\ddot{x}(t) = -0.1x(t) - 0.05\dot{x}(t).$$

En este problema vamos a utilizar una masa  $m = 2$  en las unidades adecuadas para percibir su influencia en el movimiento, si la tiene. Llevando todos los términos al mismo miembro se obtiene una ecuación lineal homogénea de orden 2:

$$2\ddot{x}(t) + 0.05\dot{x}(t) + 0.1x(t) = 0,$$

que ya no es tan sencilla de resolver como la anterior, por el término lineal de fricción. De hecho, esta es la primera ecuación que encontramos de segundo orden que tiene elementos de primer orden y la función (orden cero).

La manera de resolver esta ecuación, como se verá más adelante, es suponer que admite soluciones del tipo  $x(t) = e^{\lambda t}$ , estudiar qué condiciones impone esto sobre  $\lambda$  y, al final, comprobar que una combinación lineal de estas funciones es realmente solución.

Así pues, supongamos que hay una solución del tipo  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Sustituyendo, queda

$$2\lambda^2 e^{\lambda t} + 0.05\lambda e^{\lambda t} + 0.1e^{\lambda t} = 0$$

y sacando factor común  $e^{\lambda t}$ , que no se anula nunca, resulta que  $\lambda$  ha de cumplir la ecuación

$$2\lambda^2 + 0.05\lambda + 0.1 = 0.$$

Este polinomio se denomina *polinomio característico* de la ecuación diferencial. Tiene, claro, dos raíces

$$\lambda = \frac{-0.05 \pm \sqrt{0.0025 - 0.8}}{4} \simeq -0.025 \pm 0.89i,$$

que son conjugadas una de la otra y poseen término imaginario. Llamemos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  a cada una de ellas.

Tanto  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  como  $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$  resuelven la ecuación. Como esta es homogénea, cualquier combinación lineal de ambas es también solución. Puesto que ni  $x_1(t)$  ni  $x_2(t)$  son funciones reales (pues ambas dan valores complejos para valores reales de  $t$ ), la solución "real" de la ecuación será una

combinación de ellas con coeficientes presumiblemente complejos que dé una función real. Se pueden sustituir ambas por

$$X_1(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{-0.025t} \cos 0.89t,$$

$$X_2(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = e^{-0.025t} 0.89t$$

y utilizar estas dos funciones, *que son reales*, para calcular la solución general real de la ecuación:

$$x(t) = e^{-0.025t}(a \cos(0.89t) + b(0.89t)).$$

Si se parte de un problema de condiciones iniciales, estas proveerán las ecuaciones necesarias para calcular  $a$  y  $b$ . Por ejemplo, si  $x(0) = 1$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , entonces

$$1 = x(0) = a$$

$$0 = \dot{x}(0) = b$$

con lo que la solución de este problema de condición inicial es

$$x(t) = e^{-0.025t} \cos(0.89t).$$

Esta función es sumamente importante: es una senoide cuya amplitud queda multiplicada por una exponencial negativa. Representa, por tanto, un movimiento sinusoidal (correspondiente a la fuerza del muelle) que va perdiendo energía (a causa del rozamiento) de manera exponencial. Justamente una *amortiguación* de la solución sin rozamiento.

El efecto es claramente visible en la Figura 5.4.

### Ejemplo 25 (Inductancias)

Los circuitos eléctricos elementales (con solo resistencias) son muy sencillos de “resolver”. Los problemas aparecen cuando entre los componentes hay inductancias o condensadores (en general, cualquier componente que esté relacionado con un campo magnético, por las leyes de Maxwell). En la figura 25 se puede ver un circuito simple compuesto por una fuente de potencia (de voltaje), una bobina (inductancia) y una resistencia (estos circuitos se denominan RL por las letras utilizadas para designar la resistencia y la impedancia). Es conocido que la relación entre diferencia de potencial e intensidad en una

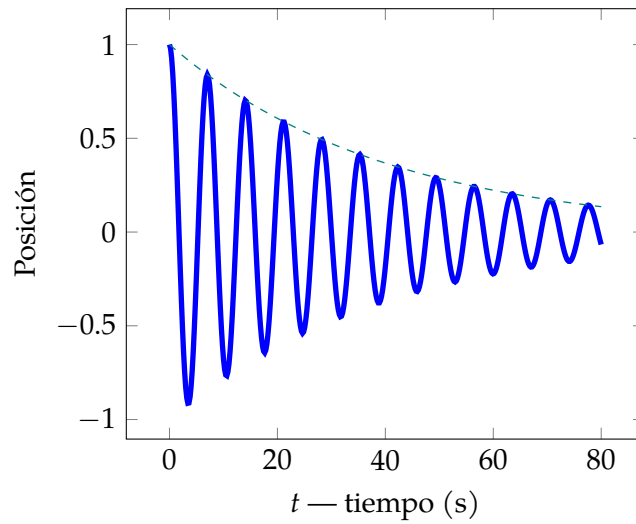


Figura 5.4: Movimiento armónico amortiguado. Se ha superpuesto la función exponencial para apreciar mejor su efecto.

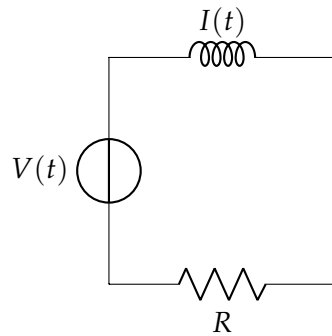


Figura 5.5: Ejemplo de circuito simple con una inductancia.

resistencia (ley de Ohm) es  $V_R = I_R R$ . En este circuito, la diferencia de potencial se tomará como “variable en el tiempo” (corriente alterna), así que la fórmula será para cada instante  $V_R(t) = R I_R(t)$  —suponemos una resistencia constante. Por otro lado, las leyes de Maxwell (en resumen, el hecho de que una corriente en una bobina *modifique* un campo magnético) describen la “inercia” que tiene una bobina —lo que cuesta generar corriente a lo largo de ella— como sigue:

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} \quad (5.4)$$

donde  $L$  es la impedancia de la bobina (relacionada directamente con su número de espiras). Por tanto, la diferencia de potencial total (la generada por la fuente) es (ley del voltaje de Kirchoff)

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) = R I_R(t) + L \frac{dI_L(t)}{dt}.$$

Pero la intensidad de corriente, por las leyes de la corriente de Kirchoff, es la misma en todos los puntos de este circuito, por lo que  $I_L(t) = I_R(t)$  y queda

$$V(t) = R I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = R I(t) + L \dot{I}(t),$$

que es una ecuación diferencial para la intensidad si se conoce el voltaje.

Supóngase que el voltaje es constante  $V(t) = V$  (así que la corriente no es alterna). Entonces la ecuación es

$$V = R I(t) + L \dot{I}(t)$$

que ya se ha encontrado muchas veces... (es la misma que el enfriamiento con signos cambiados). La solución general es

$$I(t) = \frac{V}{R} + K e^{-\frac{R}{L}t}$$

donde  $K$  es una constante de integración *que depende de la intensidad inicial*. Si se supone que  $I_0 = 0$  (lo “normal”), entonces  $K = -V/R$ , así que es negativa y la gráfica de la intensidad tiene la forma de la figura 25

**Ejemplo 26** (Un ejemplo multivariable: modelos de predador-presa)

Un modelo de ecosistema muy sencillo puede consistir en dos especies, una de las cuales depreda a la otra (se denomina a este modelo “predador-presa”).

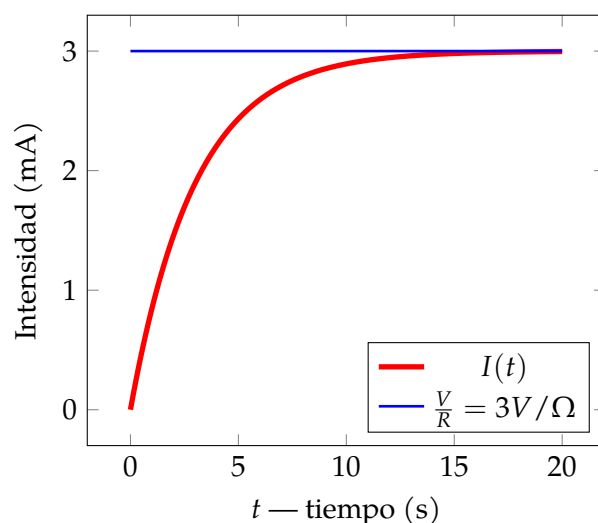


Figura 5.6: Intensidad en la bobina del circuito 5.5 para ciertos valores de la resistencia y la inductancia. El comportamiento es similar al enfriamiento pero con tendencia opuesta: hay una intensidad máxima a la que se tiende y que se alcanza “en el infinito”.

Supóngase un territorio con un área fija y que la variable  $x$  denota la densidad de población de la especie *presa* mientras que  $y$  denota la de la especie *predador*.

Una manera muy simplificada de relacionar ambas especies es suponer lo siguiente:

- La especie *presa* se multiplica “espontáneamente” con una probabilidad  $\alpha$ . Es decir, en cada instante de tiempo, el crecimiento de la densidad de la presa por su propia reproducción es  $\alpha x$ .
- La especie *predador* tiende a morir “espontáneamente” con una probabilidad  $\beta$ . Es decir, en cada instante de tiempo, la densidad de los predadores por su propia naturaleza *desciende*  $\beta y$ .
- Cada vez que un predador y una presa “coinciden”, el predador se alimenta y la presa muere. Esto significa que  $x$  disminuye a una velocidad proporcional a la densidad conjunta  $xy$ . Llamemos a este factor de proporcionalidad  $\delta$ .
- La alimentación de los predadores favorece su reproducción. Así que  $y$  aumenta a una velocidad proporcional a la densidad conjunta  $xy$ . Llamemos a este factor  $\epsilon$ .

Con estas condiciones, es fácil escribir las ecuaciones diferenciales que relacionan  $x$  e  $y$  (ambas son dependientes del tiempo):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \delta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \epsilon xy.\end{aligned}\tag{5.5}$$

que es una ecuación diferencial *de dos variables* (i.e. un sistema de ecuaciones diferenciales). Como las derivadas son ambas respecto a una sola variable independiente (ya se ha dicho que  $x$  e  $y$  son funciones de  $t$ ), el sistema es de ecuaciones diferenciales *ordinarias*. Si utilizáramos la notación física, podría escribirse así

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \delta xy \\ \dot{y} &= -\beta y + \epsilon xy\end{aligned}$$

y está claro que, para dar una descripción completa del comportamiento del sistema hace falta conocer las densidades *iniciales*.

Esta ecuación no es tan sencilla de resolver como las anteriores (de hecho las soluciones en función del tiempo no pueden calcularse en términos de funciones elementales), pero es sencillo comprobar que las soluciones son periódicas (es decir, el ecosistema tiene un comportamiento repetitivo a lo largo del tiempo). Esto hace ver que el modelo es irreal (ningún ecosistema es exactamente cíclico) pero cercano a la realidad (las poblaciones tienen un comportamiento de ese estilo).

Uno de los mayores problemas de este modelo hipersimplificado es que con frecuencia sus soluciones llegan a valores de  $10^{-6}$  individuos por hectárea o menos en algún momento y el modelo es absurdo. Esto es conocido como el problema del “atto-zorro” (atto es el prefijo del Sistema Internacional para indicar  $10^{-18}$ ).

### **Ejemplo 27** (Un fluido “plano” en estado estacionario)

El *estado estacionario* de un sistema es aquel estado que no varía en el tiempo. Esto no significa que los elementos del sistema estén quietos sino que su comportamiento solo depende de su posición en el sistema, no del tiempo.

Por ejemplo, un fluido está en estado estacionario cuando partículas que inician su movimiento en el mismo punto describen trayectorias iguales. Se puede entender un sistema así como un sistema en el que las velocidades de las partículas *en cada lugar* son constantes: un fluido en estado estacionario se



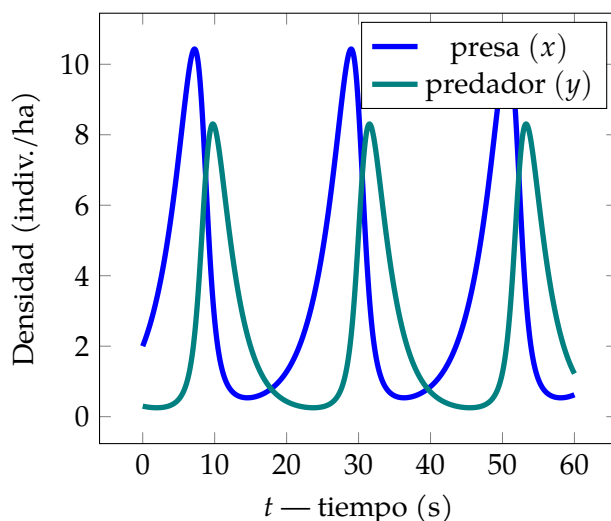


Figura 5.7: Modelo simplificado de ecosistema con predador y presa. Los parámetros son  $\alpha = .3$ ,  $\beta = .4$ ,  $\delta = .13$  y  $\epsilon = .12$ .

describe, por tanto, como una familia de vectores *velocidad* en cada punto del plano.

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ . Dar una velocidad en cada punto no es más que asignar un valor a  $\dot{x}$  y a  $\dot{y}$  en cada punto del plano, es decir, un sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y)\end{aligned}$$

para cualquier  $(x, y)$  del plano. Igual que en el Ejemplo 26, este sistema describe una ecuación diferencial ordinaria.

Está claro que una manera de representar dicha ecuación consiste en “dibujar” en cada punto  $(x, y)$  del plano una flecha que indique la dirección y la magnitud del vector  $(X(x, y), Y(x, y))$ . Esta representación es por lo general muy útil para —sin resolver la ecuación diferencial— hacerse *una idea* del movimiento de las partículas del fluido.

Un punto  $(x, y)$  del sistema en el que tanto  $X(x, y) = 0$  como  $Y(x, y) = 0$  —es decir, un punto en el que la *velocidad* es nula— se llama punto de equilibrio. Es un lugar en el que, si se soltara una partícula, quedaría quieta. Un ejemplo es

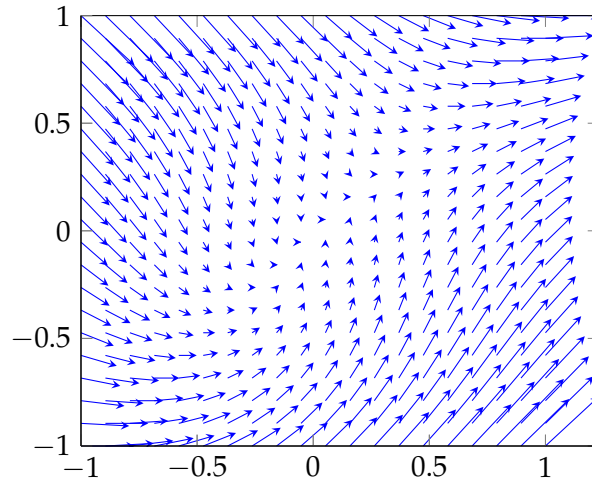


Figura 5.8: Un ejemplo de campo de vectores en el plano.

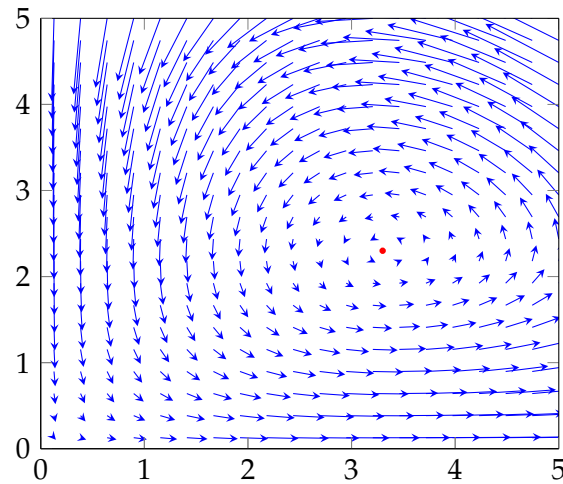


Figura 5.9: El sistema predador-presa de la figura 5.7 como campo de vectores. La periodicidad de las soluciones (las trayectorias *tangentes* a las flechas) debe ser visible y también la existencia de un punto de equilibrio (en rojo) cerca de (3, 2).

el centro de un vórtice. Otro no tan obvio es un par de densidades  $(x, y)$  que hacen que la ecuación del sistema predador-presa defina un sistema “quieto” (en el que no varía ninguna de las dos densidades). Puede apreciarse esto en la figura 5.9.

**Ejemplo 28** (Ecuación de difusión en una dimensión)

Este es uno de los pocos ejemplos que se tratarán de ecuaciones en derivadas parciales, pero quizás el más importante de todos desde el punto de vista físico: la ecuación de difusión (que coincide con la ecuación del calor y otras muchas).

Supóngase un fluido unidimensional (o, por dar una idea más gráfica, un fluido en un tubo homogéneo) en el que se ha introducido una cierta cantidad de soluto (y este no está totalmente disuelto). Se estipula (para simplificar) que la distribución de moléculas en el tubo depende solo de la coordenada longitudinal.

La *Primera Ley de Fick de la difusión* postula que el flujo de la concentración (es decir, el cambio de concentración en el tiempo) va de regiones de más concentración a regiones de menos concentración y que es proporcional al gradiente de la concentración. Es decir, si  $\phi(x, t)$  es la concentración de soluto en la coordenada  $x$  en el instante  $t$  y  $J(x, t)$  es el flujo, entonces

$$J(x, t) = -D \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.6)$$

(todo con las magnitudes adecuadas). El flujo se mide, por ejemplo, en  $\frac{\text{mg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ .  $D$  es una constante positiva (coeficiente de difusión, que depende del fluido, temperatura, soluto...).

La *Segunda Ley de Fick* se deduce de la primera utilizando el principio de conservación de la masa (no se va a explicar aquí), calculando el cambio total de masa en cualquier segmento en un instante. Se llega a la conclusión de que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (5.7)$$

Esta ecuación determina la evolución de una cierta concentración de soluto en un fluido.

Como es obvio, para estipular una condición *de comienzo* del problema, no basta con dar un número. Hace falta (como en la realidad) fijar un valor de la concentración  $\phi(x, 0)$  en el primer instante para cada punto del tubo. Por ejemplo: no se desarrolla de la misma manera la disolución de una gota de tinta si se deja caer en un vaso que si esa misma cantidad de tinta se distribuye como un “hilo fino transversal” o como un “anillo”.

## 5.2 Definiciones esenciales

La definición más importante es la siguiente:

**Definición 42.** Una *ecuación diferencial* es una ecuación en la que la incógnita es una función y aparece derivada.

Hay dos tipos esenciales de ecuaciones diferenciales: aquellas en que la función que se busca depende de una sola variable y aquellas en que depende de varias:

**Definición 43.** Una *ecuación diferencial ordinaria* es aquella en que la función incógnita (o las incógnitas) depende (dependen) de una sola variable.

Una *ecuación en derivadas parciales* es aquella en que la incógnita (o las incógnitas) depende (dependen) de varias variables.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son todos los de la Sección 5.1 salvo el (5.7) —la ecuación de difusión, que es en derivadas parciales.

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

Este curso solo se dedica a estudiar en detalle las ecuaciones diferenciales ordinarias (a partir de ahora EDO), (las EDP solo se introducen). En esta sección, las definiciones y resultados son exclusivos para EDO.

*Nota 3.* A partir de ahora distinguiremos la siguiente notación

- Una ecuación diferencial ordinaria será una ecuación diferencial de la forma  $f(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ , en la que solo hay una incógnita (la  $y$ ) que depende de  $x$ .
- Un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* será una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(u) &= \frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2(u) &= \frac{dx_2}{du} = f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(u) &= \frac{dx_n}{du} = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde  $u$  es la variable independiente (que puede ser una de las  $x_i$ , cuidado).

Veremos cómo muchas EDO pueden escribirse como sistemas (y de hecho así pueden entenderse mejor, a veces).

Dada una EDO, su *orden* es el mayor orden de derivación de la función incógnita que aparece en la ecuación.

**Definición 44.** Dada una EDO de orden  $n$  con variable independiente  $x$ , se llama *problema de condiciones iniciales* para dicha ecuación a la ecuación junto con una especificación de valores para  $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  para cierto  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Definición 45.** Dado un sistema de EDO como (5.8), un *problema de condiciones iniciales* para dicho sistema dicha ecuación junto con la especificación de  $n$  valores  $x_1(u_0), x_2(u_0), \dots, x_n(u_0)$  —un punto de  $\mathbb{R}^n$ — para cierto valor  $u = u_0$ .

**Definición 46.** Una *solución particular* de un problema de condición inicial de una EDO es una función  $y(x)$  que cumple la condición inicial y que resuelve la ecuación al sustituir  $y$  por  $y(x)$ .

Una *solución particular* de un problema de condición inicial de un sistema de EDO es una colección de  $n$  funciones  $x_1(u), \dots, x_n(u)$  que verifican las condiciones iniciales y tales que al derivarlas con respecto a  $u$ , satisfacen el sistema.

En el caso de una EDO, la solución particular describe una gráfica que pasa por el punto de la condición inicial y cuyas derivadas satisfacen en cada punto la ecuación.

En el caso de un sistema de EDO, la solución es una colección de funciones que dependen de *un parámetro*: es decir, es una *curva* en  $\mathbb{R}^n$  cuyo *vector tangente* es, en cada punto, igual a los valores de las funciones  $f_i$  en él. Así, puede pensarse (correctamente) que un sistema de EDO es un “problema de calcular curvas conocidos los vectores tangentes”.

Nótese que también se puede hablar de *solución particular* de una EDO o un sistema sin hacer mención de las condiciones iniciales. En este caso se entiende implícitamente que las condiciones iniciales son los valores que toman  $y$  y sus derivadas (o las  $x_i$ ) en uno de los puntos del dominio de la variable independiente.

En general, siempre se busca resolver un *problema de condiciones iniciales*, casi nunca se intenta “resolver una ecuación diferencial en general”. Sin embargo, conviene conocer lo que es una “solución general” de una EDO y de un sistema.

**Definición 47.** Dada una EDO de orden  $n$ , una *solución general* es una función  $\bar{y}(x, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  que depende de  $x$  y de  $n$  parámetros tal que:

- Si  $a_0, \dots, a_{n-1}$  se sustituyen por números, entonces se obtiene una solución particular.
- Si  $y(x)$  es una solución particular, entonces existen ciertos valores de las constantes  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tales que  $y(x) = \bar{y}(x, a_0, \dots, a_{n-1})$ .

Es decir, una solución general es una "expresión" de todas las soluciones de todos los problemas de condiciones iniciales<sup>2</sup>.

**Definición 48.** Dado un sistema de EDO de  $n$  incógnitas, una *solución general* es una colección de funciones  $x_1(u, a_1, \dots, a_n), \dots, x_n(u, a_1, \dots, a_n)$ , que dependen de  $n$  parámetros, tales que:

- Si  $a_1, \dots, a_n$  se susituyen por números, entonces se obtiene una solución particular.
- Cualquier solución particular se obtiene a partir de ciertos parámetros  $a_1, \dots, a_n$ .

### Ecuaciones como sistemas

Una nota importante es que, mediante una sencilla reescritura, cualquier EDO que pueda escribirse de la forma siguiente:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.9)$$

donde  $f$  es una función diferenciables, puede transformarse en un sistema de ecuaciones.

Llámesese  $x = t, y = x_0, y' = x_1, \dots, y^{(n-1)} = x_{n-1}$ . Las variables  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , si se consideran como funciones de  $t$ , no son independientes, están relacionadas por

$$\dot{x}_0 = x_1, \dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-2} = x_{n-1}$$

y, finalmente la ecuación diferencial (5.9) impone una condición a  $x_{n-1}$ :

$$\dot{x}_{n-1} = f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}).$$

por lo que la ecuación diferencial (5.9) deviene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1 \\ \dot{x}_1(t) &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2}(t) &= x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Se está haciendo un abuso de lenguaje notable porque se está obviando el problema de las soluciones singulares, de los puntos críticos, etc... No es el lugar de entrar a estas florituras.

y, cualquier condición inicial  $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  se transforma en las condiciones  $t_0 = x_0$  y la lista

$$\begin{aligned}x_0(x_0) &= y(x_0) \\x_1(x_0) &= y'(x_0) \\&\vdots \\x_{n-2}(x_0) &= y^{(n-2)}(x_0) \\x_{n-1}(x_0) &= f(x_0, y(x_0), \dots, y^{(n-2)}(x_0))\end{aligned}$$

### 5.3 Resolución: ecuaciones lineales sencillas

La idea más importante que hay que tener en cuenta a la hora de tratar de resolver una ecuación diferencial “en la vida real” (si es que esto ocurre...) es que

## Las ecuaciones diferenciales no se resuelven simbólicamente sino numéricamente

Esto, que parece contradecir todo lo que se va a explicar ahora, es primordial tenerlo claro: prácticamente nunca va a encontrar una ecuación diferencial que pueda resolverse analíticamente (los ejemplos que se han puesto al comienzo de este capítulo son todos, como se habrá dado cuenta el lector, sumamente sencillos y modelos de la realidad extremadamente simplificados).

Aun así, conviene conocer los métodos fundamentales para las ecuaciones más sencillas porque:

- Permiten hacerse una idea del comportamiento de sistemas más complejos (p.ej. el modelo de caída con rozamiento ilustra la realidad, aunque sea mucho más compleja).
- Las técnicas que se utilizan pueden dar una idea de cómo desarrollar algoritmos de solución numérica aproximados.

Es decir, no es un esfuerzo inútil, lo que se va a explicar ahora, antes al contrario.

## Ecuaciones lineales de órdenes uno y dos

Los casos generales más simples de ecuaciones diferenciales ordinarias son los que corresponden a las ecuaciones *lineales*:

**Definición 49.** Una *ecuación diferencial lineal* es una ecuación diferencial ordinaria que tiene la forma

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde  $f(x)$  y  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  son funciones diferenciables<sup>3</sup>

En concreto, la ecuación diferencial lineal de orden 1 tiene la forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x),$$

mientras que la de orden dos es

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x) = f(x).$$

Se denominan lineales porque, si se elimina el término independiente (la  $f(x)$  del miembro de la derecha) y se consideran las soluciones de la ecuación homogénea (i.e.  $f(x) = 0$ ), cualquier combinación lineal de dos soluciones es también una solución.

También puede comprobarse fácilmente que, si  $y(x)$  es una solución particular de la ecuación lineal no homogénea y  $s(x)$  es la solución general de la homogénea, entonces la solución general de la ecuación no homogénea es  $y(x) + s(x)$ .

### Resolución de la edo lineal de orden 1

Una edo lineal de orden 1 es muy sencilla de resolver.

**La ecuación homogénea:** Supongamos que se parte de una ecuación homogénea

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0. \tag{5.10}$$

Es obvio que esta ecuación equivale a

$$\frac{d}{dx} (\log(y(x))) = -a(x),$$

de manera que, integrando, se obtiene

$$y(x) = ce^{-\int a(x)}.$$

Que es la solución general de la (5.10).

<sup>3</sup>Basta con que sean continuas, pero en estas notas trabajamos en los casos “normales”.



**La ecuación general no homogénea:** Si en lugar de partir de una ecuación homogénea, se parte de una general

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (5.11)$$

se razona como sigue: tómesese la solución general de la homogénea  $y_0(x) = ce^{-\int a(x)}$ . Esta función, salvo cuando  $c = 0$ , es siempre diferente de 0. Por tanto, puede suponerse que cualquier solución de (5.11) será un producto de  $e^{-\int a(x)}$  por otra función  $c(x)$ <sup>4</sup>. Es decir, se podrá escribir la solución general de (5.11) de la forma

$$y(x) = c(x)e^{-\int a(x)}.$$

Sustituyendo en la propia ecuación (5.11), queda

$$\left(c(x)e^{-\int a(x)}\right)' + a(x)\left(c(x)e^{-\int a(x)}\right) = f(x),$$

que, tras operar y teniendo en cuenta que  $y_0(x)$  resuelve la homogénea, da

$$c(x)'e^{-\int a(x)} = f(x),$$

es decir, que  $c(x)$  es

$$c(x) = C + \int f(x)e^{\int a(x)}$$

por tanto, la solución general de (5.11) es

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)} + e^{-\int a(x)} \int f(x)e^{\int a(x)}$$

donde  $\int$  indica una primitiva cualquiera de lo que siga al signo.

Este es el caso más sencillo de ecuación diferencial resoluble por métodos elementales.

### La ecuación de orden 2 con coeficientes constantes

La ecuación general lineal de orden dos tiene la forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x). \quad (5.12)$$

De momento no vamos a tratar de resolver esta ecuación en este caso tan general (de hecho, "no se puede").

---

<sup>4</sup>Es decir, en lugar de dejar  $c$  constante, se le hace "variar". De aquí el nombre del método: *variación de las constantes*.

Consideremos el caso más simple, aquel en el que los coeficientes y el término independiente son constantes, es decir

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c. \quad (5.13)$$

Para resolver esta ecuación se calcula primero la solución general de la homogénea y después una solución particular variando las constantes. La suma de ambos objetos es la solución general.

**La ecuación homogénea de orden 2:** Se tiene la ecuación

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

De *manera mágica* se sabe que una solución tiene la forma  $ce^{\lambda x}$ , para cierto  $\lambda$ . Sustituyendo en la propia ecuación, queda

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

y como  $e^{\lambda x} \neq 0$ , tiene que ser  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , que es una ecuación de segundo grado. Así pues,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Aquí se ha de tener cuidado con los casos posibles:

- Si  $a^2 - 4b > 0$ , existen dos números reales  $\lambda_1, \lambda_2$  que resuelven la ecuación cuadrática y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- Si  $a^2 - 4b < 0$ , entonces las raíces del polinomio son dos complejos conjugados  $\lambda_1 = r + si$  y  $\lambda_2 = r - si$ . La solución general se escribe entonces

$$y(x) = c_1 e^{(r+si)x} + c_2 e^{(r-si)x}$$

que es

$$y(x) = e^{rx} \left( c_1 e^{six} + c_2 e^{-six} \right),$$

que, haciendo uso de la identidad de Euler (y trabajando un poco), queda

$$y(x) = k_1 e^{rx} \cos(x) + k_2 e^{rx}(x),$$

para constantes arbitrarias  $k_1, k_2$ .

- Finalmente, si  $a^2 - 4b = 0$ , el polinomio tiene una raíz doble  $\lambda$  y se puede comprobar que la solución general es

$$y(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 x e^{\lambda x}.$$

**La ecuación no homogénea de orden 2:** En este caso, al tener la ecuación coeficientes constantes, una solución particular de

$$y''(x) + ay'(x) + by = c$$

es muy sencilla de encontrar. Si  $y(x) = K$  (cierta constante), entonces, sustituyendo se obtiene

$$0 + a0 + bK = c,$$

así que  $K = c/b$ . Por tanto, la función constante  $y(x) = c/b$  es una solución particular de la ecuación (5.13). Así que, la solución general es la suma de esta constante con las soluciones generales dadas en el párrafo anterior.

Obviamente, si  $b = 0$ , el razonamiento anterior no sirve. Pero entonces la ecuación es

$$y''(x) + ay'(x) = c,$$

que, haciendo  $u = y'$  queda

$$u'(x) + au = c,$$

que se sabe resolver (es de primer orden). Si  $u(x)$  es una solución, integrando sin constantes queda  $y(x) = \int u(x) dx$ , solución particular.

Finalmente, si  $a$  también es 0, entonces la ecuación es

$$y''(x) = c$$

que se resuelve de manear elemental:  $y(x) = \frac{c}{2}x^2$ .

### El caso general: variación de las constantes

El caso de una ecuación lineal con coeficientes constantes de orden  $n$  se hace siguiendo un método análogo a los de las anteriores. Hay que realizar tres pasos (para dar la solución general):

1. Resolver la ecuación homogénea asociada.
2. Dar una solución particular.
3. Combinar las soluciones.

Se parte de una ecuación diferencial ordinaria lineal

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x). \quad (5.14)$$

**Resolución de la ecuación homogénea** Se supone que las soluciones de la ecuación homogénea asociada (la que proviene de sustituir  $f(x)$  por 0) son de la forma  $y = e^{\lambda x}$ . Se sustituye en (5.14):

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

sacando factor común,  $\lambda$  es una de las soluciones de

$$P(T) = T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 = 0.$$

Además, una verificación sencilla comprueba que si  $\lambda$  es una de dichas soluciones, entonces  $e^{\lambda x}$  es, de hecho, solución de la ecuación homogénea.

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  las raíces de  $P(T)$ . Las funciones siguientes:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

forman un sistema completo de soluciones de la ecuación homogénea<sup>5</sup>.

Por tanto, cualquier combinación lineal  $b_1 y_1(x) + \cdots + b_n y_n(x)$  es también solución de la homogénea.

**Cálculo de una solución particular** Para calcular una solución particular de la ecuación (5.14), se postula que es de la forma  $b_1(x)y_1(x) + \cdots + b_n(x)y_n(x)$  (es decir, que es “una de la homogénea con las constantes cambiadas por funciones.” Llamemos  $p(x)$  a una tal combinación. Como hay  $n$  grados de libertad en los coeficientes, se van imponiendo condiciones. La primera es sobre la derivada de  $p(x)$ , que es:

$$p'(x) = b_1(x)y_1'(x) + \cdots + b_n(x)y_n'(x) + b_1'(x)y_1(x) + \cdots + b_n'(x)y_n(x).$$

La condición que se impone es que “la parte en que las derivadas de las  $b_i(x)$  aparecen se hace igual a 0.” Así que

$$b_1'(x)y_1(x) + \cdots + b_n'(x)y_n(x) = 0. \quad (5.15)$$

Si ahora se calcula  $p''(x)$ , con la condición (5.15) queda

$$p''(x) = b_1(x)y_1''(x) + \cdots + b_n(x)y_n''(x) + b_1'(x)y_1'(x) + \cdots + b_n'(x)y_n'(x).$$

La segunda condición es análoga: “la parte de las derivadas de las  $b_i$  que sea 0.” Así:

$$b_1'(x)y_1'(x) + \cdots + b_n'(x)y_n'(x) = 0. \quad (5.16)$$

<sup>5</sup>Salvo en el caso en que haya soluciones repetidas, que dejamos para más tarde.

Y se sigue hasta que aparece la derivada  $n - 2$  de las  $y_i$ :

$$b'_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + b'_n(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0. \quad (5.17)$$

(Téngase en cuenta que si  $n = 1$  —ecuación de orden 1— entonces  $n - 2 < 0$  y no hay ninguna condición del tipo (5.15), ... Si  $n = 2$  —ecuación de orden 2— entonces la única condición que aparece es la (5.15), en la que las  $y_i$  no aparecen derivadas).

Finalmente, la última condición que se impone es que  $p(x)$  resuelva la ecuación (5.14). Pero todas las condiciones anteriores unida a esta terminan dando como resultado:

$$b'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + b'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \quad (5.18)$$

Todas estas condiciones (5.15), (5.16), ..., (5.17), (5.18) dan un sistema de ecuaciones lineales en  $b'_1(x), \dots, b'_n(x)$ , que resulta ser compatible determinado. Así que pueden calcularse, sin mayores problemas, las derivadas de  $b_1(x), \dots, b_n(x)$ . Integrando sin poner constantes se obtiene una solución particular  $p(x)$ .

**La solución general** La solución general de la ecuación (5.14) es, entonces, la suma de  $p(x)$  con la combinación lineal general de las  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ :

$$Y(x) = p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

**La solución de un problema de condición inicial** Si se parte de un problema de condición inicial y no de una ecuación lineal general, basta imponer las condiciones sucesivamente para obtener un sistema de ecuaciones lineales en las  $c_1, \dots, c_n$  y resolverlo.

Téngase en cuenta que *las constantes pueden ser perfectamente complejas*, pues las funciones  $e^{\lambda x}$  no son necesariamente reales y puede requerirse algún coeficiente no real para eliminar sus partes imaginarias.

**Senos y cosenos** Si se parte de una ecuación diferencial lineal con coeficientes reales entonces el polinomio característico tiene raíces reales y *pares de raíces complejas conjugadas*: si  $\lambda = a + ib$  es una raíz compleja, entonces  $\bar{\lambda} = a - ib$  también es una raíz. Por tanto, las funciones

$$y_1(x) = e^{(a+ib)x}, y_2 = e^{(a-ib)x}$$

son parte de un sistema fundamental. Pero como es sabido,

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{ax}(\cos bx + ibx) \\y_2(x) &= e^{ax}(\cos bx - ibx)\end{aligned}$$

y, tomando  $(y_1 + y_2)/2$  e  $(y_1 - y_2)/(2i)$ , resulta que las siguientes dos funciones son también parte de un sistema fundamental:

$$Y_1(x) = e^{ax} \cos bx, Y_2(x) = e^{ax} bx.$$

Por ello, por cada par de raíces complejas conjugadas  $a \pm ib$ , en lugar de tomarse las exponenciales correspondientes, suelen tomarse las funciones  $e^{ax} \cos bx$  y  $e^{ax} bx$ , que facilita los cálculos a la hora de encontrar la solución a un problema de condiciones iniciales, pues los parámetros que hay que encontrar son números reales, no complejos.

**Raíces repetidas** Finalmente, puede ocurrir que una raíz del polinomio característico aparezca repetida (tenga multiplicidad mayor que 1). Hay dos casos:

- Si  $\lambda$  es real y tiene multiplicidad  $m$ , entonces no solo  $e^{\lambda x}$  es solución de la homogénea, sino que lo son todas las siguientes funciones:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, \dots, y_m(x) = x^{m-1}e^{\lambda x},$$

y todas ellas forman parte del sistema fundamental de soluciones.

- Si  $\lambda = a + ib$  es complejo, entonces también  $\bar{\lambda} = a - ib$  es raíz del polinomio. De manera análoga al caso anterior y utilizando senos y cosenos, se tiene que todas las siguientes funciones son solución de la homogénea:

$$\begin{aligned}u_1(x) &= e^{ax} \cos bx, u_2(x) = xe^{ax} \cos bx, \dots, u_m(x) = x^{m-1}e^{ax} \cos bx \\v_1(x) &= e^{ax} bx, v_2(x) = xe^{ax} bx, \dots, v_m(x) = x^{m-1}e^{ax} bx\end{aligned}$$

y todas ellas forman parte de un sistema fundamental.

Al final se tienen tantas funciones independientes como raíces contadas con multiplicidad.

**Resumen del método** En fin, el método se puede resumir (para ecuaciones con coeficientes reales):

1. Calcúlense las raíces del polinomio característico. Serán  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , cada una con su multiplicidad.

2. Para cada raíz real  $\lambda$ , considérense las funciones

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda x},$$

donde  $m$  es la multiplicidad.

3. Para cada par de raíces complejas conjugadas  $a \pm ib$ , considérense las funciones

$$e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \cos bx$$

$$e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \sin bx$$

donde  $m$  es la multiplicidad.

4. Si  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  son todas las funciones de 2. y 3., plantéese el sistema de ecuaciones

$$c'_1(x)u_1(x) + \dots + c'_n(x)u_n(x) = 0$$

$$c'_1(x)u'_1(x) + \dots + c'_n(x)u'_n(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$c'_1(x)u_n^{(n-2)}(x) + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-2)}(x) = 0$$

$$c'_1(x)u_n^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)u_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

donde  $f(x)$  es el término independiente de la ecuación original. Este sistema permite calcular  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ . Para obtener  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  basta integrar cada función sin constantes de integración. Llámese

$$p(x) = c_1(x)u_1(x) + \dots + c_n(x)u_n(x).$$

5. La solución general de la homogénea es

$$p(x) + b_1u_1(x) + \dots + b_nu_n(x).$$

6. Si el problema era de condiciones iniciales, ahora se han de calcular las constantes  $b_1, \dots, b_n$  para adecuarlas a las condiciones.

### La ecuación de segundo orden como problema mecánico

Cualquier ecuación de segundo orden

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x),$$

se puede entender como la formalización de un sistema mecánico *sencillo*. Si  $y(x)$  denota la posición de una partícula en un sistema unidimensional en el

instante  $t$ , entonces  $y'(x)$  es su velocidad instantánea e  $y''(x)$  su aceleración. Si  $m$  es la masa de la partícula, la Segunda Ley de Newton estipula que

$$my''(x) = F$$

donde  $F$  es la suma de las fuerzas que actúan en la partícula. En la ecuación anterior, se tiene un sistema en que:

- Hay una fuerza ejercida continuamente (de una manera que depende del tiempo),  $h(x)$ ,
- Hay una fuerza que depende de la posición del cuerpo (de manera proporcional),  $y(x)$ ,
- Por último, hay una fuerza que depende de la velocidad (i.e. del momento),  $f(x)y'(x)$ .

Puede pensarse (es un buen ejercicio) en un módulo enviado a un determinado planeta, en los momentos previos al aterrizaje. Está sujeto a la fuerza de la gravedad (que depende de la altura, pues no está necesariamente *muy* cerca del suelo), a una fuerza de rozamiento (si hay atmósfera), que depende del momento de inercia  $y$ , presumiblemente hay otra fuerza actuando (los cohetes de frenado, por ejemplo), que solo depende del tiempo (p.ej. si la emisión es constante). ¿Cuál sería la ecuación correspondiente?

## 5.4 Los teoremas fundamentales

Las ecuaciones diferenciales se han utilizado desde el principio de la Física moderna (y desde su invención) para describir procesos físicos y elementos geométricos con variación respecto de parámetros (digamos “elementos en movimiento”). Hay dos principios claves de la Física clásica (que hacen, entre otras cosas, que la ciencia física tenga sentido como ciencia determinista) que pueden enunciarse como sigue (esta nomenclatura es nuestra):

**Identidad:** El resultado de un experimento físico solo debe depender de las condiciones iniciales. Una vez estipuladas estas, debe haber un único comportamiento del sistema.

**Regularidad:** El resultado *a corto plazo* de dos realizaciones del mismo experimento físico llevadas a cabo en condiciones *similares* (no iguales) debe ser *similar*. Nótese el “a corto plazo”.

La primera propiedad es esencial: si un experimento físico no da los mismos resultados bajo las mismas condiciones es que *no se conocen todas las condiciones de dicho experimento*<sup>6</sup>. La segunda es la que permite “realizar experimentos

<sup>6</sup>Cuidado: no se habla en este curso de experimentos cuánticos sino clásicos.



parecidos" y obtener resultados parecidos: uno espera, por ejemplo, que los cálculos de  $g$ , la constante gravitatoria, realizados en un laboratorio "malo" den entre 8 y 10 m/s<sup>2</sup>, no 300 ni  $-4$ .

Estas dos propiedades son satisfechas por las soluciones de las ecuaciones diferenciales: una vez impuestas las condiciones iniciales, una ecuación diferencial "normal" tiene una única solución. Por otro lado, si las condiciones iniciales varían poco, la nueva solución se parece (al menos "durante un rato") a la anterior.

El primer resultado, enunciado para EDO es el siguiente:

**Teorema 27** (De existencia y unicidad de Cauchy). *Supóngase que una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  puede escribirse*

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (E)$$

Donde  $f$  es una función diferenciable en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene el punto  $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ . Existe una y solo una solución particular  $y(x)$  de la ecuación (E) que satisface las condiciones iniciales

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Además, esta función es derivable  $n$  veces.

Es decir, toda ecuación diferencial ordinaria que se escriba como (E) tiene una única solución una vez que se especifican condiciones iniciales para  $y$  y sus derivadas hasta orden  $n - 1$ .

Para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene un resultado análogo:

**Teorema 28** (De existencia y unicidad de Cauchy). *Sea*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(u) &= \frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2(u) &= \frac{dx_2}{du} = f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(u) &= \frac{dx_n}{du} = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (S)$$

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las  $f_i$  son funciones definidas en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  diferenciables con continuidad. Si  $(a_1, \dots, a_n, u_0) \in D$  es un punto de  $D$  entonces existe una y solo una curva (donde  $r > 0$  es un número real)

$$\gamma : [u_0, u_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

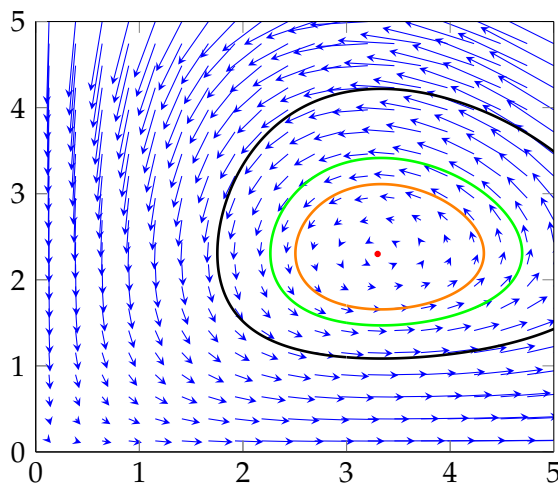


Figura 5.10: El sistema predador-presa de la figura 5.7 con varios vectores y tres *curvas solución* o *trayectorias* (que se ven son cíclicas). El punto crítico (en rojo) da lugar a una solución *constante*.

dada por  $\gamma(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u))$ , derivable, que cumple la condición  $\gamma(u_0) = (a_1, \dots, a_n)$  y que resuelve el sistema (S).

La interpretación geométrica de este resultado es clara: dado un sistema como (S), que no es más que una colección de vectores en cada punto de  $D$ , una vez que se estipula uno de los puntos  $a$  de  $D$ , existe *una única curva* que pasa por  $a$  y cuyo vector tangente en cada punto viene es el que determinan las  $f_i$  (el “dibujado” por el sistema).

En el enunciado del Teorema 28 no se impone ninguna condición sobre las funciones  $f_1, \dots, f_n$ . Sin embargo, si se presta atención a la Figura 5.10, se observa que el punto “rojo” (el punto en el que el vector descrito por las funciones del sistema es  $(0, 0)$ ) es *especial*. Si uno intenta trazar una curva cuyo vector tangente sea  $(0, 0)$  resulta que lo que sale es un “punto fijo”. De hecho, esto es lo que ocurre cuando se aplica el mencionado teorema: si  $(a_1, \dots, a_n, u_0)$  es tal que  $f_i(a_1, \dots, a_n, u_0) = 0$  para todo  $i$ , entonces la curva solución por ese punto es  $\gamma(u) = (a_1, \dots, a_n)$  —una curva que “no se mueve”. Un punto así se denomina *punto crítico* del sistema de ecuaciones y son justamente los *puntos extraños* de un campo de vectores (en la ecuación de Lotka-Volterra, un punto de equilibrio, en un sistema que describa el campo gravitatorio, un punto de

masa, etc.). En concreto:

**Definición 50.** Si en el sistema (S) se tiene que  $f_i(a_1, \dots, a_n, u_0) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , se dice que el punto  $(a_1, \dots, a_n, u_0)$  es un *punto de equilibrio* o *punto singular* de (S).

Si las funciones  $f_i$  no dependen de  $u$  (en cuyo caso, el sistema se denomina *autónomo*), también se llaman singulares los puntos  $(a_1, \dots, a_n)$  en los que todas las  $f_i$  se anulan.

Los puntos singulares son aquellos en que la dinámica del sistema descrito por las ecuaciones diferenciales en cuestión *no es fácilmente describible*. En realidad, lo que ocurre fuera de los puntos singulares es que el sistema de ecuaciones diferenciales es *muy regular*:

**Teorema 29.** [Teorema de la caja de flujo] Sea (S) un sistema de ecuaciones diferenciales en el que las  $f_i$  se suponen derivables. Sea  $(a_1, \dots, a_n, u_0)$  un punto no singular de (S). Existe un abierto  $V \in \mathbb{R}^n$  y un cubo  $C = (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$  tales que:

- Hay una aplicación diferenciable biyectiva  $\phi : C \rightarrow V$ ,
- Dada cualquier curva en  $C$  de la forma  $\gamma \equiv (y_1, \dots, y_{n-1}, t)$ , donde  $y_i$  son constantes y  $t \in (c_n, d_n)$ , la curva

$$\phi(\gamma(t)) = (\chi_1(t), \dots, \chi_n(t))$$

es una solución del sistema (S),

- Cualquier solución del sistema (S) dentro de  $V$  es de la forma anterior.

En resumen, este teorema dice que, *cerca de un punto no singular*, las trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales como (S) se comportan “como si fueran curvas paralelas unas a otras que rellenan todo el espacio alrededor del punto”.

En los puntos singulares no puede enunciarse nada parecido. De hecho, el estudio de los sistemas de ecuaciones tipo (S) cerca de los puntos singulares es uno de los campos más activos de las matemáticas hoy día (y más fructíferos).

Se dan ejemplos de cajas de flujo de campos de vectores variados en las figuras 5.11 y 5.12.

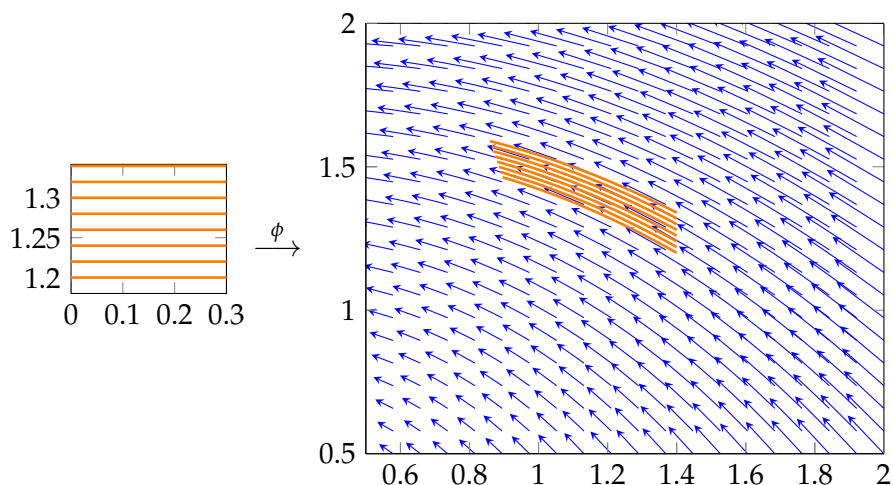


Figura 5.11: Una caja de flujo fuera de un punto singular. Las rectas naranjas paralelas ( $x = t, y = cte$ ) se transforman por  $\phi$  en las trayectorias “paralelas” correspondientes (la orientación cambia, como se puede apreciar). Téngase en cuenta que el abierto  $V$  (en el espacio de fases) *no será en general un rectángulo*, sino que será “curvo”.

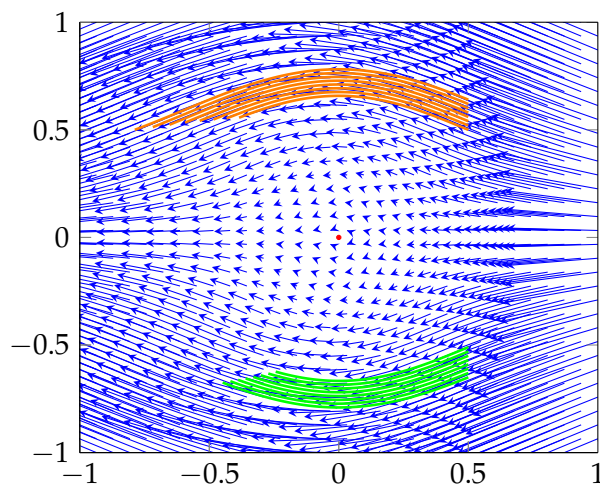


Figura 5.12: Dos cajas de flujo de un campo de vectores con una singularidad en el origen. No hay *ninguna* caja de flujo que contenga al origen (puesto que este es un punto fijo).

## 5.5 Resolución (II): la transformada de Laplace

Es obvio que no se pueden resolver ecuaciones diferenciales de modo general con *trucos* específicos para cada una. La *técnica general* más útil (una de ellas) es transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica (estas podrían ser más sencillas de resolver que las diferenciales), resolver esta ecuación algebraica y, *de alguna manera*, “deshacer la transformación”. En esto consiste el método de la *transformada de Laplace*.

La transformada de Laplace puede verse como una *reescritura* de una función continua a trozos con ciertas propiedades. De alguna manera, es una transformación análoga a la de pasar un número en notación decimal a su equivalente en binario (o, realmente a su equivalente como fracción continua, este es un ejemplo mejor): lo que se representa es *lo mismo*, pero la representación es totalmente distinta.

La idea es partir de una función  $f(t)$  que siempre se entiende como una *función del tiempo* (en el dominio temporal) y construir otra función  $g(s)$  que se entiende como una función de otra variable distinta (*el dominio s*) que *representa el mismo objeto mirado de otra manera*.

Del mismo modo que *pasar de decimal a binario* consiste en preguntar cada vez “¿cuántas potencias de 2 contiene el número en cuestión?” y realizar la operación necesaria hasta conseguir escribir, por ejemplo 1001.1 en lugar de 9.5, para funciones  $f(t)$  se utiliza una familia de funciones especial,  $e^{-st}$  (una función para cada  $s$ ) y uno se pregunta “¿cuánto hay de  $e^{-st}$  en la función  $f(t)$ ?” para cada  $s$ . Así, se obtiene, para cada  $s$ , un valor; es decir, se obtiene una función  $g(s)$  que *representa* de manera distinta la  $f(t)$  inicial.

La cuestión es cómo se mide “cuánto hay de  $e^{-st}$  en  $f(t)$ ”. Utilizando el producto escalar:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Si la función inicial es continua para  $t \geq r$  y *moderada* (en el sentido del crecimiento), la integral anterior tiene un valor numérico para todos los  $s$  mayores que alguna constante positiva. La colección de todos estos valores (un valor para cada  $s$ ) es una función de la variable  $s$  que se denomina la *transformada de Laplace de  $f(t)$* .

**Definición 51.** Sea  $f : [r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua salvo quizá en un número finito de puntos tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} f(t) = 0$ <sup>7</sup> para cierto  $a \geq 0$  Entonces la función

$$g(s) : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

<sup>7</sup>Se llamará a estas funciones *subexponenciales*.

dada por

$$g(s) = \int_r^\infty f(t)e^{-st} dt$$

está definida para todo  $s > a$  (y posiblemente para  $s = a$ ) y se denomina la *transformada de Laplace de  $f(t)$* . Se denota  $\mathcal{L}(f)$ .

### Ejemplo 29

Cualquier función polinómica de una variable  $P(x)$  es obviamente subexponencial, pues

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} t^n = 0$$

para cualquier  $a > 0$ . Por tanto, cualquier función racional  $P(x)/Q(x)$  también lo es, pues  $|P(x)/Q(x)| < |P(x)|$  para  $x$  suficientemente grande.

### Ejemplo 30

Integrando directamente, se observa que

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \mathcal{L}(t) = -\frac{1}{s^2}, \dots, \mathcal{L}(t^n) = (-1)^n \frac{1}{s^{n+1}}.$$

Las propiedades más importantes de la transformada de Laplace son (se supone que las funciones son subexponenciales desde 0):

1. Es *lineal*: si  $f(t)$ ,  $g(t)$  son subexponenciales (y continuas salvo en un número finito de puntos) y  $a, b \in \mathbb{R}$  son dos números reales, entonces

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$

2. La transformada de la derivada tiene una forma especial sin derivación:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0),$$

suponiendo que  $f$  es subexponencial desde 0.

3. Si dos funciones *continuas y subexponenciales*  $f(t)$  y  $g(t)$  tienen la misma transformada, entonces  $f(t) = g(t)$ . Esto se denomina *Teorema de Lerch*.

La propiedad 2, al iterarse, puede permitir (se verá en breve) eliminar la derivada al realizar la transformada de Laplace de ecuaciones diferenciales ordinarias. De esta manera, puede llegarse a tener un *sistema de ecuaciones algebraicas* en que la incógnita es la transformada  $\mathcal{L}(y)$ . Si se resuelve este sistema algebraico y usando el *Teorema de Lerch* se puede “volver al dominio temporal”, entonces puede resolverse la ecuación diferencial.

Sin embargo, la mayor utilidad de la transformada de Laplace es para ecuaciones lineales con coeficientes polinomiales o constantes y, sobre todo, con términos independientes no constantes.

### Casos particulares

Unas cuantas funciones tienen transformadas elementales. Es sencillo comprobar toda esta lista:

$$\begin{array}{ll}
 f(t) & \mathcal{L}(f) \\
 1 & \frac{1}{s} \\
 t^n & \frac{(n+1)!}{s^{n+1}} \\
 e^{at} & \frac{1}{s-a} \\
 \frac{t^n}{n!} e^{at} & \frac{1}{(s-a)^n} \\
 \frac{f(t)}{a} & \frac{\mathcal{L}(f)}{(s^2+a^2)} \\
 \cos at & \frac{s}{(s^2+a^2)} \\
 \frac{1}{a} \sin at & \frac{1}{s^2+a^2} \\
 \cosh at & \frac{s}{s^2-a^2}
 \end{array} \tag{5.19}$$

y, por otro lado, también es fácil verificar la siguiente colección, donde  $\delta(t)$  es la *delta de Dirac* y  $H_\alpha(t)$  es la función de Heaviside en  $\alpha$ :

$$\begin{array}{ll}
 \frac{f(t)}{\delta(t)} & \frac{\mathcal{L}(f)}{1} \\
 H_\alpha(t) & \frac{e^{-\alpha s}}{s} \\
 f(t-\alpha)H_\alpha(t) & e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f) \\
 f'(t) & s\mathcal{L}(f) - f(0) \\
 f^{(n)}(t) & s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\
 af(at) & \mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{a}\right) \\
 e^{at}f(t) & \mathcal{L}(f)(s-a)
 \end{array} \tag{5.20}$$

Recuérdese que la función de Heaviside en  $\alpha$  es “el escalón de altura 1” en  $\alpha$  y que la función  $\delta$  de Dirac es un “pulso de energía puntual” en 0.

La transformación inversa no se estudiará en estas notas.

### Ejemplo 31

Tómese la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = \delta(x)$$

que puede representar un circuito eléctrico con una bobina y un condensador —un circuito RLC, por ejemplo— en el que la fuerza electromotriz es un

solo pulso *de energía infinita* (una delta de Dirac). ¿Cómo sería la curva de la intensidad  $y(x)$ ?

Desde luego, este problema no se puede resolver como se hizo la EDO de segundo orden con coeficientes constantes en la página 99 puesto que la solución particular no puede calcularse como allí. Utilicemos la transformada de Laplace.

Llamemos  $F(s) = \mathcal{L}(y)$  a la transformada de una solución de la ecuación. Utilizando las tablas y el hecho de que  $\mathcal{L}$  es una aplicación lineal, se ha de cumplir que:

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + a(sF(s) - sy(0)) + bF(s) = 1,$$

es decir, despejando,

$$F(s)(s^2 + as + b) = 1 + (s + a)y(0) + y'(0)$$

y por tanto

$$F(s) = \frac{1 + (s + a)y(0) + y'(0)}{s^2 + as + b}.$$

Llegados a este punto, se ha de *descomponer*  $F(s)$  en *fracciones simples*, por ejemplo

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} + \frac{sy(0)}{s^2 + as + b} + \frac{ay(0)}{s^2 + as + b} + \frac{y'(0)}{s^2 + as + b}$$

y reescribir  $s^2 + as + b$  como  $(s + \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})$  (completar el cuadrado). A partir de esta escritura, utilizando las tablas (5.19) y (5.20), puede calcularse la solución (dejando como parámetros las condiciones iniciales  $y(0)$  e  $y'(0)$ ). Si los parámetros son, por ejemplo,  $a = 0.3$  y  $b = 0.2$ , entonces la solución es aproximadamente

$$y(x) = (3.157(0.421x) + 2 \cos(0.421x))e^{-0.15x},$$

cuya gráfica puede verse en la figura



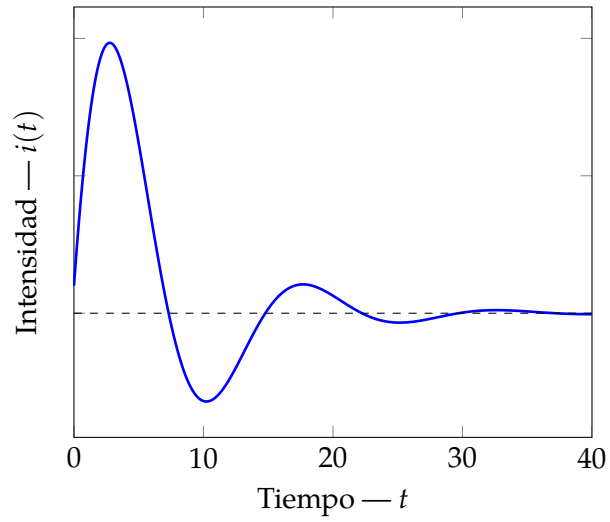


Figura 5.13: Gráfica típica de un circuito RLC sometido a una delta de Dirac.