# USOS DE LAS MATRICES

P. FORTUNY AYUSO

*Nota preliminar*[1]: Todos estos ejemplos y ejercicios están pensados para que el alumno estudi por su cuenta y los haga con la ayuda de un programa. El que se utilizará en las clases es Matlab, pero todos pueden llevarse a cabo con Octave (que puede descrgarse gratuitamente de `https://www.gnu.org/software/octave/`). Lo importante es el trabajo personal y comprender el uso de las Cadenas de Markov.

La primera clase es meramente introductoria al programa, a la nomenclatura de matrices y vectores de Matlab y a las operaciones principales.

## 1. Cadenas de Markov

**Ejemplo 1** Un agricultor posee una cierta cantidad de hectáreas de tierra, que dedica a cebada, trigo o deja en barbecho, según el año. Se sabe lo siguiente:

- Si una hectárea ha estado un año en barbecho, al año siguiente no lo estará. Además, la probabilidad de que la dedique a cebada es de 2/5 y de que la dedique a trigo es de 3/5.
- Si una hectárea ha estado dedicada a cebada, la probabilidad de que la deje en barbecho al año siguiente es de 1/3, la de que la dedique a cebada es 2/3 y seguro que no la dedica a trigo.
- Finalmente, si ha estado dedicada a trigo, seguro que al año siguiente no se dedica a cebada y hay una probabilidad de 1/3 de que se deje en barbecho (y, por tanto, de 2/3 de que se dedique a trigo otra vez).

Se quieren estudiar los siguientes problemas:

1. Si una hectárea está en una de las tres posibles dedicaciones, ¿cómo se espera que esté dentro de dos años? ¿dentro de 5? ¿dentro de 20?
2. Si el agricultor dedica, en un año determinado, 36ha a trigo, 42ha a cebada y tiene 60 en barbecho, ¿cuál será la distribución esperada dentro de un año? ¿dentro de dos? ¿dentro de 5? ¿dentro de 10?

Este problema, que parece un largo ejercicio de estadística, puede enunciarse y resolverse muy simplemente con álgebra matricial.

Dispongamos en una tabla, *por columnas*, los valores de probabilidades dados arriba.

La tabla ha de leerse, como se ha dicho, *por columnas*: por ejemplo, la columna primera representa que el barbecho no seguirá en barbecho y tendrá tres quintos de posibilidades de dedicarse a trigo y dos quintos a cebada, etc.

El esquema de distribución de un año al siguiente puede explicarse así, yendo tipo a tipo:

*Fecha*: julio 2015.

| | B | T | C |
|---|---|---|---|
| B | 0 | 1/3 | 1/3 |
| T | 3/5 | 2/3 | 0 |
| C | 2/5 | 0 | 2/3 |

CUADRO 1. Probabilidad de pasar de un estado a otro.

**Barbecho:** Si el agricultor posee $b$ hectáreas en barbecho en un año determinado, al año siguiente tendrá $3b/5$ha de trigo y $2b/5$ha de cebada, y ninguna en barbecho (de esas $a$).

**Trigo:** Si posee $t$ hectáreas de trigo en un año determinado, al siguiente, esas $t$ se distribuirán así: $t/3$ha para barbecho y $2/3$ha para trigo.

**Cebada:** Si posee $c$ hectáreas de cebada en un año, al siguiente, esas $c$ se distribuirán así: $c/3$ha serán de barbecho y $2c/3$ seguirán con cebada.

Por tanto, si se considera el vector $(b, t, c)$ de un año como la distribución en barbecho, trigo y cebada, al año siguiente se tendrán distribuidas las hectáreas según el vector $(t/3 + c/3, 3b/5 + 2t/3, 2b/5 + 2c/3)$, donde la primera componente es el barbecho, la segunda el trigo y la tercera la cebada.

Una mera inspección muestra que

$$\begin{pmatrix} t/3 + c/3 \\ 3b/5 + 2t/3 \\ 2b/5 + 2c/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ t \\ c \end{pmatrix}$$

así que la distribución de las hectáreas al año siguiente puede calcularse con una simple multiplicación matricial. Es decir, si denominamos $A$ a la matriz de probabilidades, $v_0$ al vector de distribución de hectáreas en el año 0 y $v_1$ al del siguiente, entonces

$$v_1 = Av_0.$$

Si ahora quiere calcularse la distribución $v_2$ correspondiente al segundo año, es

$$v_2 = Av_1 = A \cdot (Av_0) = A^2 v_0$$

y, de manera similar, la distribución al cabo de $n$ años será

$$v_n = A^n v_0$$

entendiendo siempre que $v_0$ es el estado inicial, la distribución de hectáreas con que se comenzó. Ahora, responder a las preguntas iniciales es bien sencillo. Para el caso de una hectárea de barbecho:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/5 \\ 4/15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.247 \\ 0.452 \\ 0.301 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

que signfica que, tras cinco años, la probabilidad de que esa hectárea esté dedicada a barbecho es aproximadamente un cuarto; de que esté dedicada a trigo es un poco menos de la mitad y de que esté dedicada a cebada, cerca de un tercio. Como se ve, al cabo de veinte años es prácticamente la misma distribución de probabilidades; este fenómeno es habitual en procesos de este tipo con ciertas características que no mencionaremos ahora.

Por responder a alguna de las preguntas del segundo apartado, visto que la distribución inicial es $(36, 42, 60)$, al cabo de cinco años será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 3/5 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 36 \\ 42 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24691 & 0.25103 & 0.25103 \\ 0.45185 & 0.50206 & 0.37037 \\ 0.30123 & 0.24691 & 0.37860 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 42 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.494 \\ 59.575 \\ 43.931 \end{pmatrix}$$

que da una idea aproximada (se supone que el agricultor no subdivide cada hectárea) del reparto final.

Un caso más sencillo, en el que solo hay dos estados posibles, es el siguiente.

**Ejemplo 2** El comportamiento de un alumno de la Universidad de Oviedo, en la asignatura de Historia del Álgebra, es el siguiente: cada día (con clase de esa asignatura) asiste a esa clase o no, dependiendo de sí ha ido o no el día anterior. En concreto:

- Si un día ha asistido, la probabilidad de que asista al día siguiente es 0.75, mientras que la probabilidad de que no lo haga es 0.25.
- Si un día no ha asistido, la probabilidad de que asista al día siguiente es 0.1, y la de que no asista es 0.9.

(Como se ve, la Historia del Álgebra no genera mucha adicción). En este ejemplo, hay dos estados posibles: *asistir* y *no asistir*. El estado siguiente depende exclusivamente del anterior, según la ley de probabilidades (por columnas) que se muestra en la tabla:

| | Sí | No |
|---|---|---|
| Sí | 0.75 | 0.1 |
| No | 0.25 | 0.9 |

CUADRO 2. Asistencia a clases de Historia del Álgebra.

En lugar de escribir la tabla, llamamos directamente $A$ a la matriz de "paso" de un estado al siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que hay 200 matriculados en Historia del Álgebra y el primer día asisten 180 (porque los repetidores ya se conocen el percal). ¿Cuál es la distribución probable al día siguiente? ¿y al cabo de 10 días? ¿y al final del curso, si tiene 40 horas lectivas?

Igual que antes, si $(s, n)$ es el vector de "sí asisten", "no asisten", la distribución al cabo de un día será

$$A \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75s + 0.1n \\ 0.25s + 0.9n \end{pmatrix}$$

y, del mismo modo que en el Ejemplo 1, si se comienza con un vector $v_0$, la distribución esperada al cabo de $n$ días es (llamamos $v_0$ al "primer" día y lo tratamos de manera especial para no complicarnos, como si no contara):

$$v_n = A^n v_0.$$

Por tanto, las distribuciones esperadas al cabo de 1 día, 10 y 40 son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 \\ 63 \end{pmatrix}, \; v_{10} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58.8 \\ 141.2 \end{pmatrix}$$

$$v_{40} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 \\ 0.25 & 0.9 \end{pmatrix}^{40} \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57.14 \\ 142.86 \end{pmatrix}$$

Se aprecia que $v_{40}$ es muy parecido a $v_{10}$. Esto, que ya ocurría en el Ejemplo de las hectáreas de tierra dedicadas a cultivos, se enuncia diciendo que el sistema tiende a un *estado estacionario*: llega un momento en que el estado siguiente es muy parecido al presente, para cualquier estado inicial.

**Ejemplo 3** El tiempo en Gijón sigue un patrón más o menos parecido al que se enuncia:

- Si un día llueve, la probabilidad de que llueva al día siguiente es de 0.6, la de que haga sol es 0.3 y la de que esté nublado es 0.1.
- Si un día está nublado, la probabilidad de que al día siguiente esté nublado es 0.6, la de que haga sol es 0.15 y la de que llueva es 0.25.
- Si un día hace sol, la probabilidad de que al día siguiente haga sol es 0, la de que llueva es 0.4 y la de que esté nublado es 0.6.

Un día determinado hizo sol. Calcular la distribución de probabilidades del tiempo al cabo de dos, cinco y siete días.

¿Hay alguna distribución estable a largo plazo del tiempo?

La matriz correspondiente a este problema es

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}$$

(nótese que hay que ordenar correctamente las columnas). Si comienza haciendo sol, quiere decir que se comienza con el vector

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y para calcular los (posibles) estados correspondientes a dos, cinco y siete días se procede así:

$$v_2 = A^2 v_0 \simeq \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.40 \\ 0.21 \end{pmatrix}, \; v_5 = A^5 v_0 \simeq \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.39 \\ 0.18 \end{pmatrix}, \; v_7 = A^7 v_0 \simeq \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.39 \\ 0.18 \end{pmatrix}.$$

Parece que se estabiliza la distribución posible de estados. De hecho, si calculamos $A^{20}$, queda

$$A^{20} \simeq \begin{pmatrix} 0.428 & 0.428 & 0.428 \\ 0.386 & 0.386 & 0.386 \\ 0.186 & 0.186 & 0.186 \end{pmatrix}$$

una matriz con todas las columnas iguales. Multiplicar esta matriz por cualquier vector $(x, y, z)^T$ da

$$\begin{pmatrix} 0.428 & 0.428 & 0.428 \\ 0.386 & 0.386 & 0.386 \\ 0.186 & 0.186 & 0.186 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + y + z) \begin{pmatrix} 0.428 \\ 0.386 \\ 0.186 \end{pmatrix},$$

lo cual significa: se empiece con la distribución de días que se empiece, a la larga, la distribución será de 43 % de días de lluvia, 38 % de días nublados y 19 % de días de sol (aproximadamente). Esta es, como bien se sabe, la distribución más o menos general del tiempo en Gijón (quizás incluso demasiado optimista).

La explicación sobre las matrices con todas las columnas iguales es la siguiente. Supongamos que una matriz de transición $A$ puede escribirse

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

donde todas las columnas suman 1, es decir: $a_1 + \dots + a_n = 1$ —esto es necesario para que sea una matriz de transición, pues las columnas son distribuciones de probabilidad. Con esta hipótesis, si el estado inicial (o la distribución inicial de estados) viene dado por un vector

$$v_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

resulta que

$$Av_0 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

que quiere decir que la distribución de estados siguientes es la descrita por cualquiera de las columnas de $A$, ponderada por el número de elementos considerados. Y, por tanto, lo mismo ocurre tras cada iteración. Nótese que la suma total de elementos en el vector $Av_0$ es la misma que la de los de $v_0$, que es $x_0 + \dots + x_n$. Esto ocurre, como es evidente, en cualquier iteración de un proceso de este tipo.

**Ejemplo 4** La playa de San Lorenzo, de Gijón se subdivide, para mejor gestión de los socorristas, en diez áreas. Suponemos, para simplificar, que la marea siempre está baja (de otro modo, como es bien sabido, nueve de esas diez áreas desaparecen bajo el agua…). Se divide el tiempo en intervalos de 1 minuto. En las ocho áreas "internas" (las que no están en los extremos), la gente permanece dentro con una probabilidad de 0.8 y sale hacia una de dos adyacentes con una probabilidad de 0.2. En las zonas de los extremos, la probabilidad de permanecer es 0.85 y la de salir es 0.15. La matriz de transición es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}$$

que, en Matlab, puede generarse de manera sencilla así:

```
> A = 0.8*eye(10) + 0.1*diag(ones(1,9),1) + 0.1*diag(ones(1,9),-1)
> A(1,1) = 0.85
> A(2,1) = 0.15
> A(9,10) = 0.15
> A(10,10) = 0.85
```

La primera línea utiliza los comandos siguientes:

1. `eye(10)`: construye una matriz cuadrada $10 \times 10$ con 1 en la diagonal y 0 fuera. Al multiplicarla por 0.8, queda este valor en la diagonal.
2. `ones(1,9)`: genera una matriz de 1 fila y 9 columnas (un vector con nueve componentes) con unos.
3. `diag(v, 1)`: genera una matriz cuadrada cuyo vector en la "diagonal 1" (es decir, la diagonal que está uno más arriba que la principal) contiene el vector `v`.
4. `diag(v, -1)`: lo mismo que el anterior pero en la diagonal que está uno por debajo de la principal (la $-1$).

Y luego se ajustan los valores de los cuatro elementos diferentes de la regla general.

Si se comienza con una distribución de los bañistas como

$$\begin{bmatrix} 90 & 100 & 150 & 200 & 150 & 90 & 80 & 110 & 210 & 200 \end{bmatrix}$$

para calcular la distribución tras 15 minutos habría que calcular $A^{15}v$, siendo $v$ el vector correspondiente a dicha distribución. Esto da, aproximadamente,

$$\begin{bmatrix} 87.2 & 135.1 & 142.0 & 143.9 & 136.7 & 128.2 & 132.1 & 154.4 & 184.9 & 135.0 \end{bmatrix}$$

entendiendo que los decimales son consecuencia de que no es un cálculo exacto sino una expectativa probabilística. Como puede verse, los valores máximos disminuyen y los mínimos han subido.

Tras media hora, la situación esperada será $A^{30}v$, que da

$$\begin{bmatrix} 90.6 & 136.7 & 137.9 & 138.2 & 138.3 & 140.6 & 147.7 & 159.5 & 171.5 & 118.4 \end{bmatrix}$$

que sigue mostrando una disminución de los máximos y un aumento de los mínimos. Los dos extremos van haciéndose menores que los valores intermedios.

¿Tiene este sistema un estado estacionario? Es decir: ¿llega un momento a partir del cual el sistema permanece en el mismo estado? Para que ello ocurra, tendría que existir un vector $w$ tal que, cuando $n$ tiende a infinito,

$$A^n v \to w.$$

Si esto pasa, es fácil comprobar que

$$Aw = w.$$

Es decir, si $A$ (el sistema cuya matriz de transición es $A$) tiene un estado estacionario entonces existe un vector $w$ no nulo tal que $Aw = w$. Un vector así se denomina un "autovector" del "autovalor" 1. El sistema

$$Aw = w$$

tiene por solución cualquier múltiplo del vector

$$w = \begin{pmatrix} 0.072 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.107 \\ 0.072 \end{pmatrix}$$

que, como puede comprobarse, es un vector la suma de cuyas componentes es 1 (así que representa una distribución de probabilidades). A la larga, dado cualquier estado inicial con N bañistas, se tiende a la distribución proporcional a esa: 0.107N en las zonas internas y 0.072N en las de los extremos.

Para visualizar la evolución del sistema puede utilizarse la siguiente secuencia de comandos:

```
for k=1:15:300
bar(A^k * v)
axis([1 10 0 1]);
pause(0.3)
end
```

que mostrará la distribución (esperada) como un diagrama de barras, a intervalos de 15 minutos (eso es lo que significa el `1:15:300`).

**Ejemplo 5** Este ejemplo no posee un estado estacionario.

En una máquina con 6 cajetines, hay piezas distriubidas en ellos, que se pasan de un cajetín a otro. La transición es como sigue: todas las que están en el cajetín $i$ pasan al $i+1$ para $i = 1, \dots, 5$ y las que están en el 6 pasan las 1.

La matriz de transición es, claramente, la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se empieza con una distribución de piezas $v_0 = (20, 10, 4, 30, 5, 2)^T$, la distribución en el siguiente instante es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 4 \\ 30 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 10 \\ 4 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}$$

, que no es más que "rotar" los elementos del vector inicial. Al cabo de 6 iteraciones resulta $v_6 = A^6 v_0$, pero (como se puede comprobar fácilmente), $A^6$ es la identidad, así que $v_6 = v_0$: se tiene un ciclo de longitud 6. Esto impide que haya un estado estacionario, ¿por qué?

¿Cómo puede comprobarse que el ciclo no es de longitud más corta?

La matriz A de este ejemplo se construye fácilmente en Matlab:

```
A = diag(ones(5,1), -1)
A(1,6) = 1
```

Nótese que ha de usarse `ones(5,1)`, con un `5`, pues la primera diagonal inferior tiene $6-1=5$ elementos. El segundo comando pone el 1 que hay en la primera fila, última columna.

Para atisbar cómo el modelo no tiene un estado estacionario, puede dibujarse un ejemplo:

```
v = [200 300 100 150 50 20]';
for k=1:100
bar(A^k*v);
axis([0 6 0 300]);
pause(0.3);
end
```

se observa que los individuos pasan de un estado a otro de manera cíclica, sin acercarse a una distribución fija.

$\boxed{\textbf{Ejemplo 6}}$ (Una simplificación del sistema de puntos de los conductores). Un conductor posee, al obtener su carnet, 14 puntos, que puede ir perdiendo por infracciones o ganando haciendo cursillos en los que se le pide dinero (curioso...). Se sabe que, de mes a mes, el estado de puntos de un conductor sigue las siguientes reglas:

1. Los que tienen entre 7 y 14 puntos, siguen con su misma cantidad con una probabilidad de 0.9. Pasan a tener un punto menos con una probabilidad de 0.08 y pasan a tener un punto más con una probabilidad de 0.02 (a estos les importa poco tener más puntos, pues “tienen muchos”). Los de 14 solo pasan a tener un punto menos con 0.1.
2. Los que tienen entre 3 y 6 puntos, siguen con su misma cantidad con una probabilidad de 0.95. Pasan a tener un punto menos con una probabilidad de 0.025 (conducen con más cuidado) y pasan a tener un punto más con una probabilidad de 0.025 (están más dispuestos a hacer cursos).
3. Los que tienen 1 ó 2 puntos, siguen con su misma cantidad con una probabilidad de 0.9. Pasan a tener un punto menos con una probabilidad de 0.01 (muy cuidadosos) y pasan a tener un punto más con una probabilidad de 0.09 (ponen mucho dinero para salir de la zona de riesgo).
4. Los que tienen 0 puntos se quedan en 0 con una probabilidad de 0.1 (muy poca gente puede permitírselo, aunque si los puntos los regaló la abuelita Susana, entonces...), pasan a tener 7 con una probabilidad de 0.6 y pasan a tener 14 con una probabilidad de 0.3 (hay gente muy dispuesta a dejarse timar por la DGT).

Queremos tratar este problema con un modelo de Markov, pues encaja precisamente en él (es un sistema con un número finito de estados y la evolución de un individuo depende únicamente del estado en que se encuentra). La matriz de transición, tal como está descrita, es (téngase en cuenta que la matriz es $15 \times 15$ pues hay desde 0 hasta 14 puntos):

$$
A = \left(\begin{array}{c|cc|cccc|cccccccc}
0.10 & \mathbf{0.01} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
\hline
0.00 & 0.90 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.09 & 0.90 & \mathbf{0.025} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
\hline
0.00 & 0.00 & \mathbf{0.09} & 0.95 & 0.025 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.025 & 0.95 & 0.025 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.025 & 0.95 & 0.025 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.025 & 0.95 & \mathbf{0.08} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
\hline
\mathbf{0.60} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & \mathbf{0.025} & 0.90 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.08 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.08 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90 & 0.10 \\
\mathbf{0.30} & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.02 & 0.90
\end{array}\right)
$$

Esta matriz es un buen ejemplo para aprender a utilizar índices en Matlab. Se han añadido líneas que dividen $A$ en zonas más o menos regulares. Hay cuatro submatrices cuadradas en la diagonal, de tamaños sucesivos 1, 2, 4 y 8. Además, se han indicado en negrita los valores no nulos que hay fuera de dichas matrices, que introduciremos *a mano*.

Para empezar, construyamos una matriz $15 \times 15$ llena de ceros:

```
A = zeros(15);
```

Modifiquemos ahora la casilla $A_{1,1}$:

```
A(1,1) = 0.1;
```

La submatriz de tamaño $2 \times 2$ está en las filas $2, 3$ y en las columnas $2, 3$. Como solo tiene cuatro elementos, la escribimos completa:

```
A([2 3], [2 3]) = [0.9 0.01; 0.09 0.9];
```

La siguiente submatriz, de tamaño $4 \times 4$, la generamos de la siguiente manera: primero los elementos de la diagonal, que valen 0.95,

```
A([4:7], [4:7]) = A([4:7], [4:7]) + 0.95*eye(4);
```

y a continuación las dos diagonales arriba y abajo:

```
A([4:7],[4:7])=A([4:7],[4:7])+diag(0.025*ones(3,1),1);
A([4:7],[4:7])=A([4:7],[4:7])+diag(0.025*ones(3,1),-1);
```

La construcción de la última matriz es similar a la recién hecha

```
A([8:15],[8:15])=A([8:15],[8:15])+0.9*eye(8);
A([8:15],[8:15])=A([8:15],[8:15])+diag(0.08*ones(7,1),1);
A([8:15],[8:15])=A([8:15],[8:15])+diag(0.02*ones(7,1),-1);
```

Salvo el elemento $A_{14,15}$ que es 0.1:

```
A(14,15)=0.1;
```

Finalmente, hay que dar su valor a los elementos en negrita:

```
A(1,2) = 0.01;
A(8,1) = 0.6;
A(15,1) = 0.3;
A(3,4) = 0.025;
A(4,3) = 0.09;
A(7,8) = 0.08;
A(8,7) = 0.025;
```

Hecho esto, se puede proceder al estudio del sistema.

1. Un conductor comienza con 14 puntos. ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos puntos al cabo de un año?

   ```
   v = zeros(15,1);
   v(15) = 1;
   ```

```
p = A^12*v;
p(14)
```

da más o menos 0.33 de que siga con 14, así que la probabilidad de que tenga menos es aproximadamente 0.67.

2. Cuál es la probabilidad de que un conductor con 6 puntos tenga 5 al cabo de dos años.

```
v = zeros(15,1);
v(7) = 1;
p=A^24*v;
p(6)
```

da más o menos 0.24.

3. Se comienza el sistema con 1000 conductores con 6 puntos y 2000 con 14 puntos. Calcular la distribución esperada al cabo de 5 años.

```
v=zeros(15,1);
v(7)=1000;
v(15)=2000;
p=A^60*v
```

en horizontal, este vector es, más o menos,

```
p' = [0 1 13 63 139 276 473 268 253 313 361 350 274 163 53]
```

así que, por ejemplo, se espera que haya 473 conductores con 5 puntos, 361 con 10, etc.

**Ejemplo 7** Si se derrama una gota de tinta en un recipiente con agua, la tinta tiende a difundirse (disolverse) homogéneamente por todo el volumen. Este proceso puede modelarse con una ecuación en derivadas parciales, la *ecuación de difusión*, que es la misma que la *ecuación del calor*. Si se considera el problema en una dimensión (piénsese en la concentración de tinta en la superficie, proyectada en el eje OX, por ejemplo), es posible construir un modelo discreto bastante simple basado en las cadenas de Markov. Una manera de hacerlo es así:

- Se discretiza la anchura del recipiente en, digamos 300 elementos.
- Se postula que la concentración de tinta cumple la ley siguiente: una partícula tiene probabilidad 0.8 de quedarse en su lugar, 0.1 de ir hacia la derecha y 0.1 de ir hacia la izquierda.
- En las dos casillas de los bordes, la probabilidad de quedarse es 0.8 y la de ir a la contigua es 0.2.

Con estos tres principios, se tiene un proceso de Markov. La situación inicial vendrá dada por el vector $v_0$, sea el que sea.

La matriz de transición es sencilla de construir: 0.8 en la diagonal principal y 0.1 en las dos diagonales contiguas, excepto en los lugares $A_{2,1}$ y $A_{299,300}$ que es 0.2:

```
A = 0.8*eye(300);
A = A + 0.1*diag(ones(299,1),1) + 0.1*diag(ones(299,1),-1);
A(2,1)=0.2;
A(299,300)=0.2;
```

La evolución del sistema (que es muy lenta, pues la ley que hemos impuesto hace que la tinta tarde mucho en disolverse) puede observarse como se indica a continuación. Partimos de una mancha de tinta que llena solo la primera casilla:

```
v = zeros(300,1);
v(1) = 1000;
for k=1:100:10000
```

```
plot(A^k*v);
axis([0 300 0 80]);
pause(0.1);
end
```

se observa cómo la tinta se distribuye poco a poco homogéneamente. Al cabo de un millón de pasos, la cosa queda más clara:

```
bar(A^1000000*v);
```

Puede comenzarse con una distribución diferente, por ejemplo con varias manchas de tinta en diversos lugares:

```
w = zeros(300,1);
w(3)=1000;
w(100)=5000;
w(200)=7000;
w(295)=1000;
for k=1:1000:100000
plot(A^k*w);
axis([0 300 0 80]);
pause(0.1);
end
```

Esta manera de entender la difusión es moralmente la misma que Einstein describió en su trabajo de 1905 sobre el movimiento Browniano. La diferencia estriba, más que nada, en la ley de transición, que para él era más compleja —la que hemos descrito nosotros en una simplificación muy elemental pero que posee propiedades similares a la suya.

**Ejemplo 8** Un sistema algo más complejo que 5 sin estado estacionario es el dado por la matriz de transición

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se comienza con el vector $v = (200, 300, 150, 400)$, la sucesión de estados termina siguiendo un patrón similar a

$$\begin{pmatrix} 118.75 \\ 487.50 \\ 231.25 \\ 212.50 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 237.50 \\ 243.75 \\ 462.50 \\ 106.25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 118.75 \\ 487.50 \\ 231.25 \\ 212.50 \end{pmatrix} \to \cdots$$

que, como se ve, no es estacionario. Puede comprobarse que el sistema tiene un comportamiento similar si se comienza con cualquier otro vector $v_0$.