PRÁCTICAS DE AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

P. FORTUNY AYUSO

1. Introducción

Las prácticas que se realizarán este curso en los grupos del profesor Fortuny se centrarán en el cálculo de parametrizaciones utilizando algunas herramientas gratuitas disponibles en Internet (alguna incluso con aplicaciones instalables en móviles).

- La primera es Desmos, una calcudora gráfica cuya página web es `desmos.com` y cuya utilización es elemental: pueden introducirse tanto expresiones solo en la variable x, que se sobreentienden como funciones cuya gráfica quiere representarse, ecuaciones en x y en y, que dan lugar a la curva correspondiente y desigualdades, que se representan como un área del plano. Hay una aplicación descargable para móviles.
- La segunda herramienta es Wolfram|Alpha, una calculadora simbólica desarrollada por la misma empresa que produce Mathematica. Su página web es `wolframalfa.com` y hay una aplicación para móviles y para ordenadores.
- Una aplicación gratuita que es capaz de dibujar dos superficies implícitas. El autor no es conocido. Hay una copia (por si el autor borra su programa original) en la página web del profesor: `http://pfortuny.net/2surfaces.html`. Su utilización es algo más pesada pero también elemental.

Esas tres aplicaciones se utilizarán como herramientas en los ejercicios que se propondrán en cada sesión.

Date: Curso 22-23.

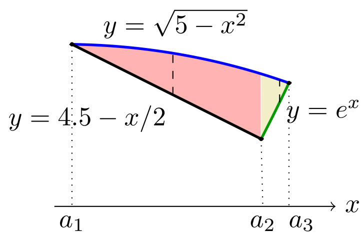
2. Primera sesión: parametrizaciones elementales

En esta primera sesión se espera que los alumnos se familiaricen con Desmos y con Wolfram|Alpha y realicen (sobre un papel) las *parametrizaciones en coordenadas cartesianas*, en la dirección (x, y) y en la (y, x) de los siguientes conjuntos:

(1) El área del plano delimitada por las siguientes desigualdades: $x^2 + y^2 \leq 5$, $x + 2y - 4 > 1/2$ y $e^x < y$.
(2) El área delimitada por: $y < x^2$ y $x^4 - 2 < y$.
(3) El área contenida en el círculo de centro $(1, 2)$ y radio 0.5 que queda por encima de la gráfica de $f(x) = x^3$.
(4) El área delimitada por: $y > \cos(x) - 0.3$, $x - y > 0.5$ y $x + y < 4$.

Se incluyen a continuación algunas de las soluciones.

(1) El área del plano delimitada por las siguientes desigualdades: $x^2 + y^2 \leq 5$, $x + 2y - 4 > 1/2$ y $e^x < y$. En la figura se puede observar el conjunto. La



parametrización en "segmentos verticales" comienza en $x = a_1 \simeq 0.0282$ y termina en $a_3 \simeq 0.7458$. El valor a_2, donde se cortan la recta y la exponencial, es $a_2 \simeq 0.6539$. Como se ve, hay que dividir el conjunto en dos partes: la rellena en rojo, que llamaremos P_1, y la rellena en amarillo, que llamaremos P_2. En todas las ecuaciones de los bordes hay que despejar la y en función de la x *para esta parametrización en segmentos verticales.* Visto esto, se tiene que si el conjunto es C, entonces

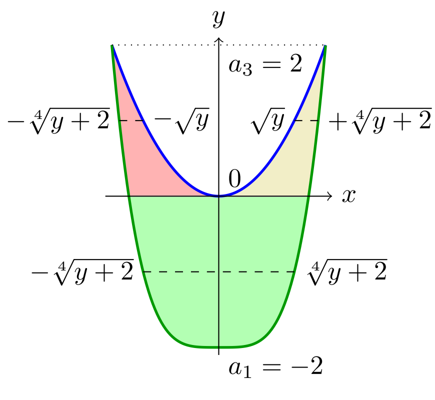
$$C = P_1 \cup P_2$$

donde

$$P_1 \equiv \begin{cases} 0.0282 \leq x \leq 0.6539 \\ 4.5 - x/2 \leq y \leq \sqrt{5 - x^2} \end{cases} \qquad P_2 \equiv \begin{cases} 0.6539 \leq x \leq 0.7458 \\ e^x \leq y \leq \sqrt{5 - x^2} \end{cases}$$

y con esta descripción se termina.

(2) El área delimitada por: $y < x^2$ y $x^4 - 2 < y$.



Esta la resolvemos en segmentos horizontales. Obsérvese cómo la figura comienza en $y = a_1 = -2$ y termina en $y = a_3 = 2$. Hay una primera parte, llamémosla P_1, en verde, delimitada por la curva $y = x^4 - 2$, que comienza en $y = 2$ y termina en $y = 0$. Encima hay *dos partes* (que sean simétricas no tiene ningún interés ni valor). La de la izquierda, que llamaremos P_2 y la de la derecha, P_3.

Como trabajamos en segmentos horizontales, se ha de despejar la x en función de la y. Las raíces pares siempre tienen dos signos, así que queda $x = \pm\sqrt[4]{y + 2}$, y habrá que ver luego cómo se escogen (en la figura ya está claro). Para la parábola, queda $x = \pm\sqrt{y}$.

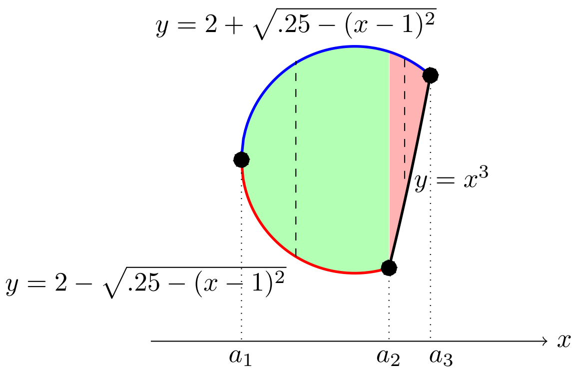
Con todo esto, ya podemos escribir el conjunto C como $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, donde

$$P_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 0 \\ -\sqrt[4]{y+2} \leq x \leq \sqrt[4]{y+2} \end{array} \right.$$

y los conjuntos P_2 y P_3 son:

$$P_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} -0 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt[4]{y+2} \leq x \leq -\sqrt{y} \end{array} \right. \qquad P_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} -0 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt[4]{y+2} \end{array} \right.$$

(3) El área contenida en el círculo de centro $(1, 2)$ y radio 0.5 que queda por encima de la gráfica de $f(x) = x^3$.



La ecuación de dicho círculo es $(x-1)^2 + (y-2)^2 = .25$. De nuevo es necesario dividir el conjunto es subconjuntos. Si hacemos la parametrización en segmentos verticales, los límites del conjunto C son: para la x, $a_1 = 0.5$, $a_3 \simeq 1.334$ y necesitamos el valor $a_2 \simeq 1.151$ para la subdivisión. Despejando la y en función de x, se obtiene que

$$y = 2 \pm \sqrt{.25 - (x-1)^2},$$

donde como siempre el menor valor corresponde al signo negativo y el mayor, al positivo.

Si la parte izquierda la llamamos P_1 y la derecha P_2, se tiene que $C = P_1 \cup P_2$, con las siguientes descripciones, *con cuidado con las raíces cuadradas*:

$$P_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0.5 \leq x \leq 1.151 \\ 2 - \sqrt{.25 - (x-1)^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{.25 - (x-1)^2} \end{array} \right.$$

$$P_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 1.151 \leq x \leq 1.334 \\ x^3 \leq y \leq 2 + \sqrt{.25 - (x-1)^2} \end{array} \right.$$

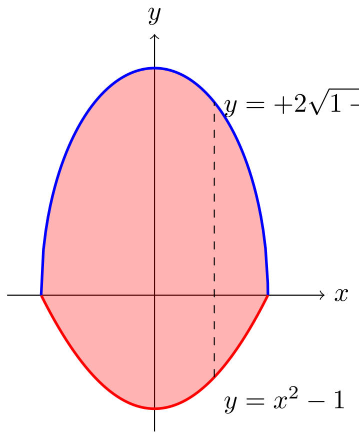
y así se concluye esta parametrización.

3. Segunda sesión: más parametrizaciones elementales

Seguimos realizando parametrizaciones de conjuntos planos para adquirir práctica.

(1) Parametrizar la parte interior de la elipse con centro $(0,0)$ y radios 1 y 2 que está por encima de la parábola $y = x^2 - 1$.
(2) Parametrizar en polares el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1.
(3) Parametrizar en polares la parte del círculo de centro $(1,0)$ y radio 1 que está incluida en la parte interna de la parábola $x = y^2$ (nótese que está en horizontal, esta parábola).
(4) Parametrizar en polares la parte del círculo restante del ejercicio anterior.
(5) Parametrizar en polares el conjunto que cumple que $x > 0, y > 0$ y
$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} < 2.$$
(6) Parametrizar (como se pueda) la parte que queda en el semiplano $x > 0$ y es interna a la curva
$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} = 2.$$

(1) Parametrizar la parte interior de la elipse con centro $(0,0)$ y radios 1 y 2 que está por encima de la parábola $y = x^2 - 1$.



Lo único difícil aquí es calcular la ecuación de tal elipse. Una elipse con centro (x_0, y_0) y radios a, b (en el orden de las variables x, y) tiene por ecuación:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

En nuestro caso, $x^2 + (y/2)^2 = 1$.

El conjunto C que nos piden parametrizar se puede describir directamente en segmentos verticales, *sin subdividirlo*. Claramente, la x varía entre -1 y 1, mientras que la y va desde la parábola $y = x^2 - 1$ hasta la elipse. Despejando en la ecuación de esta, se obtiene que

$$y = \pm 2\sqrt{1-x^2}.$$

Como la elipse hace de extremo superior, la parametrización de C requiere tomar el signo positivo. Por tanto

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

y se ha terminado.

En segmentos horizontales hay que dividir el conjunto en dos partes (bajo el eje y sobre él), pero no tiene más complicación.

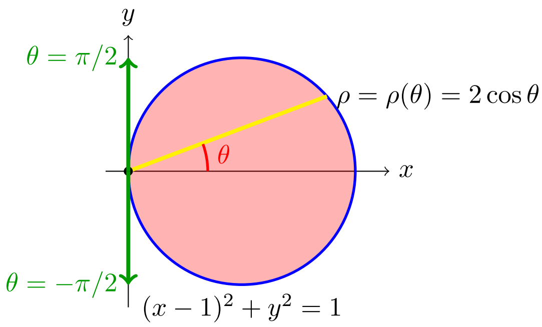
(2) Parametrizar en polares el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1. Este es el primer ejercicio interesante en coordenadas polares, que ilustra algunas ideas importantes, sobre todo para *delimitar los ángulos*. La ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Como se aprecia en la figura, las rectas que pasan por $(0,0)$ cortan a la circunferencia para determinados ángulos. En polares:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{es decir} \quad (\rho\cos\theta - 1)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 1$$

que, tras operar, da $\rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0$. Sustituyendo:

$$\rho = 2\cos\theta.$$

Y *este es el punto clave para calcular los límites.* Del dibujo puede deducirse que θ varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ (los semiejes verticales) pero también puede deducirse de esta condición: Puesto que los ángulos de las polares son, si

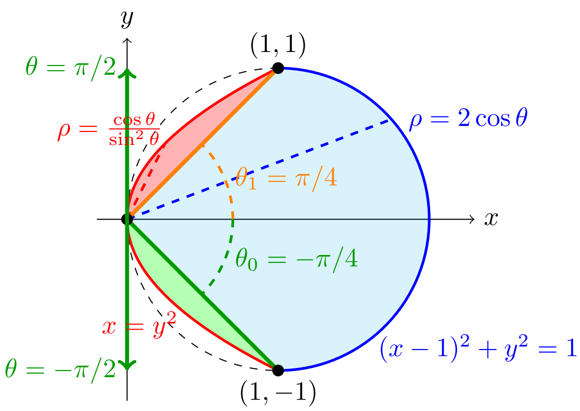


los medimos desde $-\pi$: $\theta \in [-\pi, \pi]$, se tiene que $\rho = 2\cos\theta$. *Pero* ρ es siempre *positiva*. Así que solo valen los ángulos para los que

$$2\cos\theta > 0,$$

es decir, $\cos\theta > 0$, que es: $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Insisto: he escogido el intervalo de ángulos $[-\pi, \pi]$, que mide un periodo entero porque así la parametrización me sale con un solo intervalo de θ. Si usara el intervalo $[0, 2\pi]$, tendría que dividir la parametrización en dos partes: $\theta \in [0, \pi/2]$ (primer cuadrante) y $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$ (cuarto cuadrante). La ρ no cambiaría.

(3) Parametrizar en polares la parte del círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1 que está incluida en la parte interna de la parábola $x = y^2$ (nótese que está en horizontal, esta parábola).



Antes de parametrizar, se han de hallar los puntos de corte de la parábola y la circunferencia: $(1, -1)$ y $(1, 1)$, como se ve en la figura. Claramente, hay una zona en la que los segmentos que salen del origen barren el conjunto *hasta la circunferencia*. Esta zona corresponde a los ángulos entre $\theta_0 = -\pi/4$ y $\theta_1 = \pi/4$. Llamémosla C_1. Hay además dos zonas, una arriba y otra abajo, delimitadas por la parábola $x = y^2$. Si pasamos esta ecuación a polares:

$$\rho\cos\theta = \rho^2\sin^2\theta$$

tras despejar ρ, se obtiene:

$$\rho = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Como las distancias ρ son positivas, esto solo puede valer para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, como en el ejercicio anterior. Puesto que la zona $[-\pi/4, \pi/4]$ es el conjunto

C_1 (en azul claro), si llamamos C_2 a la parte inferior y C_3 a la superior, ya tenemos el conjunto parametrizado $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$:

$$C_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \rho \in [0, 2\cos\theta] \end{array} \right. \qquad C_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [-\pi/2, -\pi/4] \\ \rho \in [0, \cos\theta/\sin^2\theta] \end{array} \right.$$

$$C_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [\pi/4, \pi/2] \\ \rho \in [0, \cos\theta/\sin^2\theta] \end{array} \right.$$

(4) Parametrizar en polares la parte del círculo restante del ejercicio anterior.

Ya en la figura del ejercicio anterior se observa que lo que resta (la zona blanca del círculo, delimitada por la parábola y la parte de la circunferencia rayada discontinuamente) tiene dos partes, una inferior y otra superior, llamémoslas I y S. Los ángulos que delimitan a I van desde $-\pi/2$ hasta $-\pi/4$, y los que delimitan a S desde $\pi/4$ hasta $\pi/2$. Tanto la parábola como la circunferencia están descritas en polares en el ejercicio anterior. Si T es el conjunto total, entonces $T = I \cup S$ y:

$$I \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [-\pi/2, -\pi/4] \\ \rho \in [\cos\theta/\sin^2\theta, 2\cos\theta] \end{array} \right. \qquad S \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [\pi/4, \pi/2] \\ \rho \in [\cos\theta/\sin^2\theta, 2\cos\theta] \end{array} \right.$$

4. Tercera sesión

Parametrizar los siguientes conjuntos:

(1) La parte del plano que está dentro del pétalo orientado hacia la derecha de $\rho = \cos 5\theta$ por encima de la recta $y = x/10$.

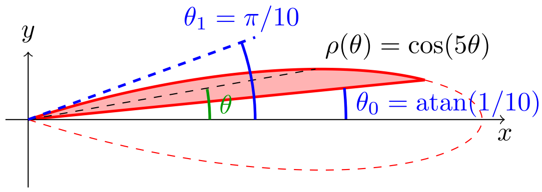
(2) La intersección del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2 con el círculo $x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$. En cartesianas y en polares.

(3) Un pentágono regular con un vértice en $(0,1)$ y con centro geométrico en el origen de coordenadas. En polares. ¿En cuántas partes dividirías el conjunto?

(4) La parte del plano acotada por $x^2 - y^2 = 1$ y las rectas $y = 1$, $y = -1$. En cartesianas y en polares.

(1) La parte del plano que está dentro del pétalo orientado hacia la derecha de $\rho = \cos 5\theta$ por encima de la recta $y = x/10$.

Antes de nada, dibujemos el conjunto.



Se nos pide el pétalo que se dibuja (el de la "derecha", como se ve si se hace todo el dibujo en desmos): este es el que corresponde a los ángulos cercanos a 0 hasta el primer valor de θ en el que ρ sea igual a 0. Es decir,

$$\cos(5\theta) = 0$$

que quiere decir que $5\theta = \pm\pi/2$, es decir, $\theta = \pm\pi/10$. El pétalo entero es desde que θ vale $-\pi/10$ hasta $\pi/10$. Se especifica que el conjunto está *por encima* de $y = x/10$, que es una recta *que pasa por* $(0, 0)$, así que su dirección en el primer cuadrante corresponde a un ángulo: en concreto, $\theta_0 = \mathrm{atan}(1/10) \simeq 0.0997$ (ojo, ¡en radianes!). Lo que queda por encima de ella *en el primer cuadrante* pertenece a semirrectas cuyo ángulo con el eje OX es mayor que θ_0.

Por tanto: los ángulos que delimitan la figura son $\theta_0 = 0.0997$ y $\theta_1 = \pi/10 \simeq 0.31416$. Para cada ángulo, los límites de ρ van desde 0 (el origen de coordenadas) hasta el pétalo (como se ve en la línea negra rayada): $\rho(\theta) = \cos(5\theta)$. Ya tenemos el conjunto, llamémoslo C, parametrizado:

$$C \equiv \begin{cases} 0.09967 \leq \theta \leq 0.31416 \\ 0 \leq \rho \leq \cos(5\theta) \end{cases}$$

Este conjunto, en cartesianas es *muy difícil* de parametrizar, pues necesitaríamos despejar la y de la x, o al revés, utilizando las relaciones:

$$x = \cos 5\theta \cos\theta, \quad y = \cos 5\theta \sin\theta$$

que vienen de la condición $\rho = \cos 5\theta$. Pero despejar de esas ecuaciones la x en función de la y o al revés es un esfuerzo inútil.

(2) La intersección del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2 con el círculo $x^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$. En cartesianas y en polares.

Este ejercicio en cartesianas ya debería ser bien sencillo. Lo hago en polares para mostrar la complicación que puede surgir si no se tiene cuidado (si uno solo mira "el dibujo", sin fijarse).

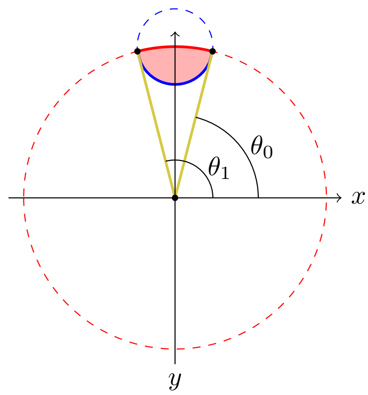
Primero hacemos un diagrama pequeño.

Según la figura que se muestra, con las circunferencias grande y pequeña, *parece* que solo hay que calcular los puntos de corte de ambas para obtener los ángulos θ_0 y θ_1 entre los que el conjunto está definido, y luego despejar la ρ en función de θ en ambas ecuaciones de las circunferencias para obtener una parametrización del tipo (llamado C al conjunto):

$$C \equiv \begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \end{cases}$$

donde $\rho_1(\theta)$ corresponde a la circunferencia azul y $\rho_2(\theta)$ a la roja. Pero el dibujo está mal hecho.

Si se hace el dibujo *bien grande* se observa que los ángulos θ_0 y θ_1 indicados arriba *no cubren todo el conjuto*: hay dos partes, una con ángulos



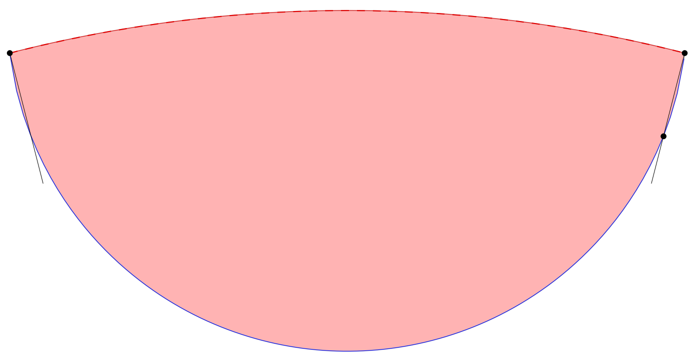
Cuando se hace mal un dibujo, se sacan conclusiones erróneas.

menores que θ_0 y otra con ángulos mayores que θ_1 que quedan fuera. ¿Cómo se delimita entonces C?

La respuesta es: *hay que buscar bien los límites en los ángulos.* El conjunto C comenzará en el *primer ángulo que lo toque.* Como la recta que corresponde a θ_0 corta a la circunferencia superior en dos puntos, lo que hay que buscar es: *el ángulo α cuya recta correspondiente es tangente a la circunferencia superior.* Para ello, se despeja ρ en función de θ para dicha circunferencia:

$$\rho = \frac{4\sin(\theta) \pm \sqrt{16\sin^2\theta - 15}}{2}$$

y se estudia para qué ángulos esta solución es única: es decir, cuándo la raíz cuadrada es 0:



Hay tres zonas diferentes...

$$\sin^2\theta = \frac{15}{16}$$

que da:

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{15}{16}} \Rightarrow \theta \simeq 1.3181,\ \tan\theta \simeq 3.87298$$

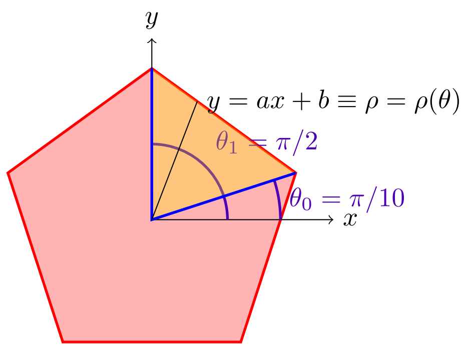
Es decir: la circunferencia superior es tangente a las rectas $y = \pm 3.87298x$. Los puntos de corte de las dos circunferencias son, aproximadamente, $(0.4960, 1.9375)$ y $(-0.4960, 1.9375)$, que están en las rectas de pendiente ± 3.9062. Como

$3.9062 > 3.87298$, obtenemos el resultado seguro: el conjunto C ha de dividirse en 3 partes: desde el ángulo $\alpha \simeq 1.3181$ hasta el ángulo θ_0, desde θ_0 hasta θ_1 y desde θ_1 hasta $\beta = \pi - \alpha$ (por simetría respecto del eje OY). Los ángulos son $\theta_0 = \mathrm{atan}(3.90625)$ y $\theta_1 = \pi - \mathrm{atan}(3.90625)$ (por la misma simetría).

Ahora ya podemos parametrizar $C = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, pues en P_1 y P_3 los límites de ρ son los de despejar como se ha hecho, y en P_2 son la raíz pequeña y $\rho = 2$. Los ángulos $\alpha, \theta_0, \theta_1$ y β se han calculado arriba:

$$P_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \theta \leq \theta_0 \\ \frac{1}{2}(4\sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta - 15}) \leq \rho \leq \frac{1}{2}(4\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta - 15}) \end{array} \right.$$
$$P_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \frac{1}{2}(4\sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta - 15}) \leq \rho \leq 2 \end{array} \right.$$
$$P_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \leq \theta \leq \beta \\ \frac{1}{2}(4\sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta - 15}) \leq \rho \leq \frac{1}{2}(4\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta - 15}) \end{array} \right.$$

(3) Un pentágono regular con un vértice en $(0, 1)$ y con centro geométrico en el origen de coordenadas. En polares. ¿En cuántas partes dividirías el conjunto?



Estructura básica del pentágono.

Como el centro geométrico es el origen de coordenadas, lo que haré será dividirlo en las cinco partes dadas por los triángulos de la figura (entre dos radios consecutivos) y parametrizar solo uno de ellos (el resto es igual). Hagamos la zona amarilla. Claramente, el ángulo inicial es $\theta_0 = \pi/10$ (¿por qué es esto *claro*?) y el final es $\theta_1 = \pi/2$. La recta correspondiente al lado es $y = a(x - 0) + 1$, donde

$$a = \frac{\sin(\pi/10) - 1}{\cos(\pi/10)} \simeq -0.7265$$

así que la ecuación concreta es $y = -0.7265x + 1$. Hemos de pasar esto a polares. Haciendo el cambio

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$$

obtenemos la ecuación

$$\rho\sin\theta = -0.7265\rho\cos\theta + 1,$$

y despejando ρ en función de θ:

$$\rho = \frac{1}{\sin\theta + 0.7265\cos\theta}.$$

Ya tenemos parametrizado el triángulo en polares, pues las distancias ρ obviamente comienzan todas en 0:

$$\begin{cases} \pi/10 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{\sin\theta + 0.7265\cos\theta} \end{cases}$$

5. Cuarta Sesión

Calcúlense, hoy sí:

(1) La longitud de un arco de espiral logarítmica, dada por $\rho = 2e^{3t}$, con $t \in [\alpha, \beta]$.
(2) La longitud de la cardioide $\rho = 2(1 - \cos t)$, para $t \in [0, 2\pi]$.
(3) El área delimitada por la cardioide anterior.
(4) En cartesianas y en polares (haciendo las parametrizaciones correspondientes), el área delimitada por las circunferencias siguientes: la de centro $(0, 0)$ y radio 6 y la de centro $(0, 6)$ y radio 3.