CÁLCULO - PRÁCTICA II - CÁLCULO BÁSICO

PEDRO FORTUNY AYUSO

Se supone que ya habéis estudiado al menos algo de límites y algo de derivación, aunque no es ni mucho menos imprescindible, pues estos conceptos ya los conocéis.

Cada sección se realizará en un fichero aparte (un fichero `.m`) con el nombre del alumno y se subirá al campus virtual (o se hará lo que se pueda...).

1. Cálculo de límites

Se puede utilizar tanto la práctica anterior como la hoja de consulta rápida como cualquier otro material que se desee, incluyendo la ayuda de Matlab (`help` y `doc`, aunque esto último suele ser algo confuso al principio). Recordemos que para calcular límites es necesario declarar una variable como simbólica: `syms x y`, por ejemplo. El comando `limit` tiene la siguiente sintaxis:

```
> limit(expr, var, punto, 'left'/'right')
```

donde `expr` es una expresión simbólica, `var` indica la variable respecto de la cual se calcula el límite, `punto` es el lugar (que puede ser ±`inf`) y al final se puede indicar (no es imprescindible) si el límite es por la derecha (`right`) o por la izquierda (`left`).

1.1. Ejemplos. Calcúlense los siguientes límites:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8}{\sqrt{6x^6+1}}$$
$$2)\ \lim_{x\to0}(e^x-1)\log(x+1)$$
$$3)\ \lim_{x\to\pi}\operatorname{sen}(x)^{x-\pi}$$
$$4)\ \lim_{x\to0^-}|x|^{|x|}$$
$$5)\ \lim_{x\to0^+}x^{\operatorname{sen}(x)}$$
$$6)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{2}{n-1}\right)^n$$

2. Definición y representación de funciones

Recordemos que para esto se utilizaban las funciones anónimas. Por ejemplo, para representar con lineas verdes entre -4 y 2 con 500 puntos la función $f(u)=\operatorname{sen}(u)-\frac{1}{1+u^2}$, definiéndola anónimamente, podríamos utilizar la siguiente secuencia de comandos:

```
> f = @(t) sin(t) - 1./(1+t.^2);% cuidado: paréntesis y el '.'
> x = linspace(-4, 2, 500);% preparamos los puntos
> plot(x, f(x), '-g');
```

Fecha: 21 de octubre de 2014.

Para representar *sobre la misma gráfica* la función *cos*(t), se ha de "decir al sistema que no borre" al dibujar de nuevo:

```
> hold on% no borrar la ventana al dibujar
> plot(x, cos(x), '*r');% estrellas rojas
```

3. Derivadas, recta tangente, etc...

Se sabe que la *ecuación de la recta tangente* a la gráfica de una función $f(x)$ derivable en el punto a es:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y que la *ecuación de la recta normal* en ese punto es

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a).$$

Dada una función definida anónimamente, `P=@(x) x.^2-2*x+1`, por ejemplo, se puede calcular la función derivada utilizando `syms` de la siguiente manera. Primero se declara una variable simbólica

```
> syms u
```

y ahora se calcula la derivada de `P` evaluada en la variable simbólica, con respecto a dicha variable:

```
> diff(P(u), u)
```

lo que devuelve Matlab es una expresión simbólica. ¿Cómo se puede calcular ahora $P'(3)$, por ejemplo? Esto es lo más elaborado que vamos a hacer:

```
> P = @(x) x.^2 - 2*x + 1
> syms u
> Q = diff(P(u), u)
> Q(3)% da un error: no se puede evaluar algo simbolico
> Q_n = matlabFunction(Q)% esto define Q_n como anonima
> Q_n(3)% se puede evaluar
```

3.1. Ejemplos. **1.-** Calcular la derivada de las siguientes funciones, definiéndolas antes como funciones anónimas. Dibujar las gráficas de $h(x)$ y de su derivada $h'(x)$.

- $f(x) = e^{x+1}$. Evaluar la derivada en $x = 2$. Esto se hace así:
  ```
  > f = @(t) exp(t+1)
  > syms x
  > g = diff(f(x), x)
  > g_n = matlabFunction(g)
  > g_n(2)
  ```
- $g(x) = \tan(\mathrm{sen}(x))$. Evalular la derivada en $x = \pi$.
- $h(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Evaluar la derivada en $x = 0$.
- $m(x) = \cos(e^x)$. Evaluar la derivada en $x = \log(3)$.

2.- Calcúlese la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \cos(x^2)$ en el punto $x = 3$. Calcúlese la recta normal. Dibújense las tres funciones en la misma gráfica.

Esto se hace así:

```
> g = @(x) cos(x^2)
> syms t
> gp = diff(g(t), t)
```

Ahora gp es una expresión simbólica que es "la derivada de g." La convertimos en una función anónima:

```
> gp_n = matlabFunction(gp)
```
Calculamos el valor de la derivada en $x = 3$
```
> der = gp_n(3)
```
La recta tangente es $Y = g'(3)(X - 3) + g(3)$
```
> tang = @(X) der * (X-3) + g(3)
```
La recta normal es $Y = -\frac{1}{g'(3)}(X - 3) + g(3)$
```
> nor = @(X) - der * 1./(X-3) + g(3)
```
Ahora dibujamos cerca de $x = 3$
```
> I = linspace(2.5, 3.5, 1000);
> plot(I, g(I), 'k')
> hold on
> plot(I, tang(I), 'r')
> plot(I, nor(I), 'g')
```

3.2. Resolver ecuaciones. Finalmente, antes de pasar a los ejercicios, la resolución de ecuaciones simbólicas (por ejemplo, para calcular los ceros de la derivada, o de la derivada segunda) se realiza con `solve`. Como en todas las operaciones simbólicas, hace falta una variable. Devuelve una lista (un vector columna, cuyos elementos se pueden tomar con los paréntesis) con los resultados, bien exactos, bien numéricos, dependiendo de lo que se haya podido hacer. La ecuación siempre se pone de la forma $eq = 0$ sin el $= 0$:
```
> clear all; syms x
> raices = solve(x.^2 -2*x +1,x)% dos '1' pues es doble
> mas_r = solve(x.^6-2*x^2-1,x)% valores exactos
> otro = solve(log(x) - exp(x), x)% valores aprox.
```

4. Ejercicios

Se realizará cada ejercicio en un fichero denominado `ej_2_numero.m` (es decir, `ej_2_1.m`, `ej_2_2.m`, etc.). Si un ejercicio requiere varios cálculos, sepárense con un comentario, por favor (utilizar el % para ello).

1.- Calcúlense los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\tan(7x))}{\log(\tan(2x))}$$
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}\right)$$
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x-a}$$

2.- Realícense las siguientes tareas utilizando funciones anónimas. Recuérdense los comandos `hold on`, `clf` y `subplot`.

1. Definir la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Dibujarla entre $x = -3$ y $x = 3$ utilizando 300 puntos. Dibujarla entre 100 y 110 utilizando puntos separados 0,1.

2. Definir la función $P(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(t)$. Dibujarla entre $-\pi$ y π utilizando 1000 puntos. Definir ahora la función $Q(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t)$, dibujarla *en la misma gráfica* que la anterior pero con color verde y usando los mismos puntos.
3. Definir la función $r(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Dibujarla entre -10 y 10 usando 500 puntos.
4. Dibujar las funciones $f(x), P(x), Q(x)$ y $r(x)$ en la misma ventana (en cuatro gráficas) utilizando `subplot`. Los intervalos habrán de ser los mismos que arriba.

3.- Derivadas, tangentes y normales. Recuérdese `matlabFunction` para la segunda parte.

1. Defínase la función $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{20}{1+x^2})$. Represéntese gráficamente entre -20 y 20 utilizando 500 puntos.
2. Calcúlese la función derivada $f'(x)$ y represéntese *en el mismo gráfico que* $f(x)$.
3. Sobre la gráfica, dibújese la recta tangente a $f(x)$ sobre $x = 1$ y la recta normal sobre $x = -1$.

4.- Calcular los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{1 + x^2}$$

y dibujar la recta tangente en los puntos de inflexión para comprobar que a un lado es cóncava y al otro convexa.