Ejercicios y Problemas del Curso de Métodos Numéricos para ingenieros

Pedro Fortuny Ayuso

Curso 2022/23, EPIG, Gijón. Universidad de Oviedo
Email address: `fortunypedro@uniovi.es`

CAPÍTULO 1

Aritmética finita y análisis del error

Ejercicio 1. La distancia de la Tierra a la Luna varía en la actualidad (2012) entre 356400 y 406700 km. Acótese el error absoluto y el error relativo cometido al utilizar cualquiera de los valores de ese intervalo como "distancia real".

SOLUCIÓN. Supongamos que la distancia exacta en un momento dado es d. Según el enunciado, $d \in [356400, 406700]$ (en unidades de km). Si se usa uno de los dos extremos del intervalo como valor, digamos E, se tiene que

$$|d - E| \leq 406700 - 356400 = 50300$$

y esa es la cota del error absoluto (no puede ser mayor que ese valor).

Para el error relativo,

$$\frac{|d-e|}{d} \leq \frac{50300}{d}$$

y, como $d \geq 356400$ (por los datos del problema), el error relativo es

$$\frac{|d-e|}{d} \leq \frac{50300}{356400} \simeq 0.1411$$

(como mucho el 14%). Como se ve, la luna varía de distancia *bastante*, a lo largo de un año.

Ejercicio 2. Una regla que supuestamente mide 1m posee un error relativo de 0.05%. Si se usa para medir 10m, ¿Cuál es el error relativo que se comete?

Ejercicio 3 (El calendario Gregoriano)**.** Explíquese el algoritmo del Calendario Gregoriano, teniendo en cuenta que

- La duración de un año "real" es de 365.242374 días.
- Se quiere que el desfase entre el equinoccio de primavera y el día 21 de marzo no pase en ningún caso de *un día*.

SOLUCIÓN.[Solución (no desarrollada)] El error que se produce al usar 365 días en lugar de 365.242374 es, obviamente, 0.242374 *días* por año. Al cabo de 4 años el error es de 0.969496 (aun menor que 1) y al cabo de 5 es ya mayor que 1, así que hay que corregir el calendario como mucho cada cuatro años. Si cada 4 años (de calendario, que es el tiempo que rige la vida humana) se añade un día, al cabo de 4 años se tienen

$$4 \times 365 + 1 = 1461$$

días "de calendario", mientras que días reales son

$$4 \times 365.242374 = 1460.969496$$

que da un error de 0.030504 días (de más que se cuentan). Por tanto, se puede mantener este error (0.0340504 días cada cuatro años) durante como mucho $1/030504 \simeq 32.7$ ciclos de 4 años. Como esto es un lío ($32 \times 4 = 128$), se elige cambiar cada 25 ciclos de 4 años (i.e. cada 100 años). Así pues, cada 100 años de calendario hay que evitar sumar un día (i.e. el bisiesto no lo es). Esto produce que, a los 100 años se tienen

$$1461 \times 4 - 1 = 36524$$

días de calendario, mientras que los reales son

$$36524.2374$$

lo que da un error de 0.23 días (de menos) cada 100 años. Se puede mantener este error unos $100/0.23$ años (más o menos 4.34): por tanto, cada 4 años hay que corregir este error y, por tanto, contar un día más.

En fin: cada 4 años se suma un día, excepto cada 100, excepto cada 400. (El siguiente error ocurre ya más lejos y posiblemente se esté arreglando usando "segundos bisiestos").

Ejercicio 4. Se calcula la integral siguiente

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

utilizando el desarrollo limitado de Taylor de orden 4 del integrando, que es:

$$T(e^{-x^2}, x = 0, 4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Calcúlense aproximadamente los errores absolutos y relativos cometidos sabiendo que el valor exacto de la integral es 0.74682413+. ¿Son notables?

SOLUCIÓN. La integral utilizando la aproximación es, obviamente

$$\int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\, dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 23/30 \simeq 0.7666$$

Si el valor exacto es 0.74682+, el error absoluto es 0.019846 aprox. y el error relativo es $0.019846/0.74682 \simeq 0.02657+$, es decir, el 2.65% que no parece demasiado para un desarrollo tan corto.

Ejercicio 5. Un reloj digital de laboratorio comete un error de 0.0000101 segundos por cada *pulso*. Dicho reloj da un pulso cada 3 segundos. ¿Cuánto tardará en desfasarse 1s? ¿Qué error relativo comete?

SOLUCIÓN. **Nota:** este ejercicio estaba mal resuelto en una versión anterior. Me avisó un alumno de ello.

Una mera regla de 3. Un pulso son 3 segundos. Trabajaremos en segundos en todos los apartados, así que:

$$\begin{array}{lcr} 3\mathsf{s} & \rightarrow & 0.0000101\mathsf{s} \\ x(\mathsf{s}) & \rightarrow & 1\mathsf{s} \end{array}$$

que da $x = 3/0.0000101 \simeq 297000$ segundos que tardará el aparato en desfasarse 1s. El error relativo es, puesto que 3 segundos los mide como 3.0000101 (o bien 2.9999899), es, entonces:

$$\frac{0.0000101}{3} \simeq 3.37 \times 10^{-6}.$$

Obsérvese que el error (relativo o absoluto) no depende de si adelanta o retrasa.

Ejercicio 6. Se tiene un registro A que almacena valores en coma flotante de 64 bits y otro registro B que almacena valores enteros sin signo y tiene 16 bits. En determinado proceso solo interesa el valor entero de A, no su parte decimal ¿Es razonable simplemente "traspasar" la parte entera de A al registro B? ¿Cuál es el valor máximo que puede almacenar B?

SOLUCIÓN. No es razonable en absoluto porque A puede almacenar valores muchísimo más grandes que los de B. En B solo caben valores hasta $2^{16} - 1 = 65.535$.

Ejercicio 7. El cambio Euro-peseta era, en su día, (supongamos) 1 Eu = 166.386 pts, pero la ley obligaba a que al realizar una transacción se *redondeara* a la unidad monetaria más cercana (a pesetas si se cambia a pesetas, a céntimos si se cambia a Euros). Calcular:

- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 Euro por 166 pesetas.
- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 peseta por su "equivalente" en Euros.
- Los errores absolutos y relativos al cambiar 1 céntimo por su "equivalente" en pesetas.

SOLUCIÓN. Al cambiar 1 euro por 166 pesetas, el error absoluto es 0.386 pesetas, y el error relativo es $0.386/166.386 \simeq 0.00231$ (un 0.2%).

Al cambiar 1 peseta por su equivalente en euros debería hacerse lo siguiente. Una peseta es $1/166.386$ euros, es decir, $0.00601+$ euros, que es algo más de medio céntimo. Como hay que *redondear*, se ha de cambiar por 1 céntimo. Así pues, el error absoluto es $0.0039898+$. El error relativo es

$$\frac{0.0039898}{0.00601} = 0.66387+$$

(un 66%, una auténtica salvajada). Por eso estaba prohibido cambiar pesetas por euros "de una en una").

Al cambiar un céntimo a pesetas, un céntimo serían $0.01 \times 166.386 = 1.66386$ pesetas, que tendría que redondearse a 2 pesetas. El error absoluto es 0.33614 y el error relativo es

$$\frac{0.33614}{1.66386} \simeq 0.20$$

(un 20%, otra burrada). Por lo mismo, estaba prohibido cambiar de céntimo en céntimo.

Ejercicio 8. El cuentakilómetros de una bicicleta calcula la distancia recorrida computando el número de vueltas de la rueda, usando como aproximación $\pi \simeq 3.1$. Un amigo nos dice que es importante utilizar $\pi \simeq 3.14$ al menos. Se sabe que el diámetro de la rueda (por la presión, desgaste, etc.) es $0.8\text{m} \pm 0.02\text{m}$. ¿Tiene razón nuestro amigo?

Solución. La longitud de la rueda no se conoce, pero se sabe que puede tener un error de hasta 0.02 m por 0.8 m. Su error relativo es, por tanto, de hasta

$$\frac{0.02}{0.8} = 0.025.$$

El error relativo de utilizar 3.1 en lugar de $3.1415\ldots$ es, aproximadamente,

$$\frac{0.0415}{3.1415} = 0.013+$$

que es menor que el error relativo de la longitud de la rueda. No tiene sentido preocuparse (no vamos a arreglar nada, pues la fuente del error es mayor que nuestra hipotética corrección). Lo que hace falta es una rueda cuya longitud pueda medirse con más precisión, si queremos medir distancias con ella. En las circunstancias en las que está la bicicleta, lo que hay que hacer es ser conscientes del error de medición cometido (hasta un 2.5%). Lo demás es hilar sin aguja.

CAPÍTULO 2

Solución de ecuaciones no lineales

Ejercicio 9. Utilizar el algoritmo Babilónico para calcular raíces cuadradas para calcular $\sqrt{600}$ y $\sqrt{1000}$ de manera que el error al elevar al cuadrado sea menor que 0.1.

SOLUCIÓN. Hacemos el caso de $\sqrt{600}$, el otro es exactamente igual.

Como no nos dicen con qué valor comenzar, lo hacemos con uno razonable, por ejemplo, $x_0 = 20$. Llamamos al error absoluto al elevar al cuadrado, e_i. Se tiene que $e_0 = 200$. Ahora

$$x_1 = \frac{20+30}{2} = 25, e_1 = |600 - 625| - 25.$$

Seguimos

$$x_2 = \frac{25 + 600/25}{2} = 24.5, e_2 = |600.25 - 600| = 0.25$$

El siguiente valor es

$$x_3 = \frac{24.5 + 24.489}{2} = 24.49489, x_3^2 = 600.000002+$$

así que terminamos tras tres iteraciones. El valor exacto es $\sqrt{600} \simeq 24.4948974+$, que es prácticamente igual a x_3. Este algoritmo es muy rápido.

Ejercicio 10. Relacionar de alguna manera el algoritmo babilónico de la raíz cuadrada con el algoritmo de Newton-Raphson.

SOLUCIÓN. Si se trata de calcular $\sqrt{a}$, el algoritmo babilónico, en el paso n, transforma x_n en

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

mientras que el algoritmo de Newton-Raphson, utilizando $f(x) = x^2 - a$, transforma x_n en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{a + x_n^2}{2}$$

que es lo mismo. Es decir, son el mismo algoritmo.

Ejercicio 11. Se quiere calcular $\sqrt[3]{a}$. Escríbase cuánto vale x_{n+1} en función de x_n si se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para ello. Compárese con el algoritmo babilónico para la raíz cuadrada.

Solución. El el mismo ejercicio que el 10.

Ejercicio 12. ¿Qué ocurre si se ejecuta el algoritmo de Newton-Raphson con la función $f(x) = x^3 - x$ y el valor inicial $x_0 = \sqrt{1/5}$?

Solución. Si se calcula el siguiente elemento, sale

$$x_1 = \sqrt{1/5} - \frac{\sqrt{1/125} - \sqrt{1/5}}{3/5 - 1} = (...) = -\sqrt{1/5}.$$

Se recomienda hacer el cálculo entero que hay en los puntos suspensivos. Si ahora se calcula el siguiente elemento

$$x_2 = -\sqrt{1/5} - \frac{\sqrt{1/5} - \sqrt{1/125}}{3/5 - 1} = (...) = \sqrt{1/5}.$$

Y se retorna a la semilla. El algoritmo de Newton-Raphson, en este caso, es totalmente inútil porque va alternando dos valores y nunca se acerca a ninguna raíz (las raíces son $-1, 0, 1$).

Ejercicio 13. Se quiere calcular $\sqrt[4]{2}$ con 6 cifras decimales exactas. Se pide:

(1) Usando la semilla $x_0 = 1$, calcular el valor de x_1 usando el algoritmo de Newton-Raphson.
(2) ¿Cuántos pasos harán falta para conseguir dichas 6 cifras decimales exactas?

Solución. Para utilizar el algoritmo de Newton-Raphson, necesitamos una función. En este caso, está claro que $f(x) = x^4 - 2$ es una buena elección. Si $x_0 = 1$, entonces, como $f'(x) = 4x^3$,

$$x_1 = 1 - \frac{1^4 - 2}{4 \cdot 1^3} = 1 - \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

Para saber cuántos pasos hacen falta para conseguir 6 cifras exactas, necesitamos dos cosas: un intervalo en el que sepamos que hay una raíz y acotar las derivadas primera y segunda en dicho intervalo.

Sabemos que $1.25^4 = 2.44+ > 2$, mientras que $1.15^4 = 1.74+ < 2$. Por tanto, en el intervalo $[1.15, 1.25]$ (de anchura 0.1) hay una raíz con certeza. En ese intervalo, $f'(x)$ y $f''(x)$ son ambas crecientes, así que:

- $|f''(x)| < 12 \times 1.25^2 = 18.75 = K$,
- $|f'(x)| > 4 \times 1.15^3 = 6.0835 = L$.

Según el teorema de convergencia cuadrática del algoritmo de Newton-Raphson, por tanto, si r es la raíz en dicho intervalo, como $\sqrt{K/(2L)} < 1.3$, obtenemos que

$$|x_2 - r|(1.3 \times 0.1)^2 < 0.0169$$

y a partir de ahora

$$|x_n - r| \leq (0.13)^{2^{n-1}}.$$

Para asegurar que el error es menor que 10^{-6}, basta con conseguir que

$$2^{n-1} > \frac{\log(10^{-6})}{\log(0.13)} = 6.77+$$

y, por tanto, basta con que $n-1=3$. Por tanto, tras $n=4$ iteraciones, ya se tienen 6 cifras decimales exactas.

Ejercicio 14. Calcular, utilizando dos pasos del algoritmo de Newton-Raphson, el radio de una esfera cuyo volumen sea π (centímetros cúbicos). ¿Cuántos pasos hacen falta para asegurar que el error absoluto sea menor que 10^{-10}?

Solución. Para resolver este problema, hay que resolver la ecuación $\frac{4}{3}\pi x^3 - \pi = 0$, que simplificando, es $\frac{4}{3}x^3 - 1 = 0$. Así, pues, si se toma $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 1$, se ha de encontrar una raíz de esta función. Comenzando con $x_0 = 1$ (pues está por ahí), obtenemos

$$x_1 = 1 - \frac{4/3-1}{4} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

Se sabe que $4/3 \times (11/12)^3 > 1$, mientras que $4/3 \times (10/12)^3 < 1$, así que hay una raíz en el intervalo $[10/12, 11/12]$, de anchura $1/12$. La derivada $f'(x) = 4x^2$ y la segunda derivada $f''(x) = 8x$ son ambas crecientes cuando $x > 0$, así que

(1) $|f'(x)| > 4 * (10/12)^2 = 10/3 = L$.
(2) $|f''(x)| < 8 * 11/12 = 22/3 = K$.

Por tanto, si r es la única raíz en $[10/12, 11/12]$ (única porque la función es creciente en él), entonces

$$|x_2 - f| < \left(\sqrt{22/20} \times 1/12\right)^2 \simeq 0.0874^2.$$

Para obtener un error menor que 10^{-10}, basta con conseguir que

$$2^{n-1} > \frac{\log(10^{-10})}{\log(0.0874)} > 9.5,$$

con lo que basta que $n-1=4$, es decir, tras $n=5$ iteraciones se garantiza ese error (posiblemente antes, pero necesitaríamos un estudio más detallado).

Ejercicio 15. Se quiere calcular el punto de corte de las gráficas de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x$, utilizando el algoritmo de Newton-Raphson. Sea r la coordenada x de dicho punto de corte. Utilizando la semilla $x_0 = 1/2$:

(1) Calcular x_1,
(2) Sin calcular x_2, ¿puede asegurarse de alguna manera que $|x_2 - r| < 0.001$?

Solución. Para calcular el corte de dos gráficas, se igualan las dos funciones

$$\frac{1}{1+x^2} = 2x$$

y ahora puede decidirse restar o bien despejar de otra forma. Como parece más sencillo eliminar los denominadores desde el principio, despejamos así:

$$2x^3 + 2x - 1 = 0,$$

y tomamos la función $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$ para aplicar el método de Newton-Raphson. La derivada es $f'(x) = 6x^2 + 2$. Si $x_0 = 1/2$, entonces

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}+1-1}{\frac{3}{2}+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Para hacer la segunda parte, se razona como en el ejercicio 13. Hay que verificar que $f'(x)$ y $f''(x)$ son ambas crecientes, para poder hacerlo, o decrecenties, claro.

Ejercicio 16. Se quiere calcular el punto de corte, en el primer cuadrante, de las gráficas de $f(x) = 2/x^2$ y $g(x) = x^3$.

- ¿Cómo aplicarías el algoritmo de Newton-Raphson?
- Si la semilla es $x_0 = 1$, ¿Cuántas iteraciones del algoritmo hacen falta para asegurar (sin conocer la solución exacta) que el error sea menor que 10^{-6}? (Para esto quizás haya que calcular una o dos iteraciones)

Solución. Es exactamente igual que el ejercicio 15

Ejercicio 17. Compárese la velocidad de convergencia del algoritmo de bisección en el intervalo $[0,1]$ y el de Newton-Raphson con semilla 0.9 para la función $f(x) = x^7 - 0.9$.

Solución. No se trata más que de hacer unas cuantas iteraciones (no es un ejercicio teórico). Hagamos simplemente dos pasos de cada uno.

- Bisección: obviamente, $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, así que se puede aplicar. Tomamos $c = 0.5$. Se tiene que $f(0.5) < 0$, así que el nuevo a es $a = 0.5$ y el intervalo nuevo es $[0.5, 1]$. Se toma entonces $c = 0.75$, etc. Nótese que ni siquiera nos hemos acercado a la semilla.
- Newton-Raphson con semilla $x_0 = 0.9$. El siguiente valor es

$$x_1 = 0.9 - \frac{0.9^7 - 0.9}{7 \times 0.9^6} = 1.01335+.$$

El siguiente valor es (tras hacer las cuentas) $x_2 = 0.98732+$.

El valor exacto es 0.98506. Si se empezara (para ser más "justos") el algoritmo de bisección con el intervalo $[0.9, 1]$, tampoco se ganaría demasiado.

Ejercicio 18. Explicar qué ocurre si se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson con semilla $x_0 = 3$ para la función $f(x) = \mathrm{atan}(x) - 0.3$. ¿Se puede remediar?

Solución. La derivada de $f(x)$ es

$$(\mathrm{atan}(x) - 0.3)' = \frac{1}{1+x^2},$$

Tomando $x_0 = 3$, el siguiente valor es

$$x_1 = 3 - \frac{\mathrm{atan}(3) - 0.3}{1/(1+x^2)} \simeq -6.4904.$$

Que tiene un valor absoluto muy grande. Si se dibuja la función $f(x)$, (aprox. como en la Figura 2), se observa que la pendiente de la recta tangente en puntos lejanos al origen es muy horizontal (y cada vez más): de hecho, cada punto de corte está más lejos del origen que el anterior, con lo cual el algoritmo de Newton-Raphson no sirve para nada en este ejemplo. En realidad, deberían hacerse las cuentas con detalle pero lo dejamos como

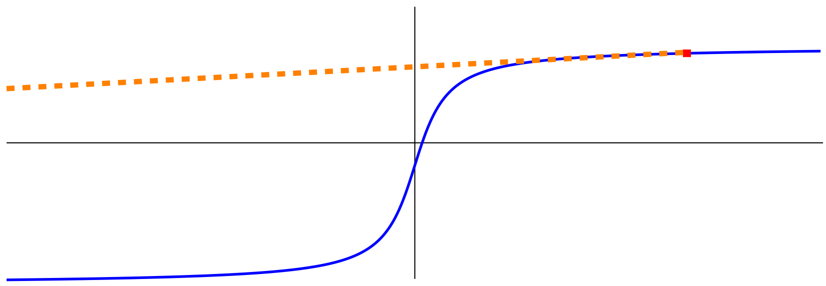

Figura 1. Gráfica de $\mathrm{atan}(x) - 0.3$.

un ejercicio para casa. El hecho de que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, que es una función que "decrece" según uno se aleja del origen, y que está muy próxima a cero, es la clave.

Ejercicio 19. Calcular con 5 dígitos de precisión (utilizando el algoritmo de Newton-Raphson) una raíz de $\cos(3x) - x$. ¿Tiene sentido este enunciado si no se saben calcular las funciones trigonométricas con exactitud? ¿Qué puede hacerse?

Solución. El ejercicio es exactamente igual que el 13. Es importante para acotar tener en cuenta que $\cos'(3x) = 3\,\mathrm{sen}(3x)$, cuyo valor absoluto es como mucho 3.

No tiene sentido utilizar Newton-Raphson si las funciones trigonométricas no se conocen con precisión absoluta (cosa cierta): para funciones trascendentes, solo puede usarse *teóricamente* el algoritmo de la secante (y ni siquiera). En realidad, no importa mucho pero es la respuesta adecuada.

Lo que puede hacerse es ir con mucho cuidado y acotar muy bien el error que se puede ir cometiendo en cada paso. Las funciones exponenciales y trigonométricas son muy buenas por sus características de convergencia.

Ejercicio 20. Considérense las funciones que verifican la siguiente propiedad:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 3x.$$

Sin resolver esa ecuación diferencial, explicar qué ocurre con el algoritmo de Newton-Raphson para dichas funciones.

Solución. Supongamos que se está en el paso n del algoritmo, se ha llegado a calcular x_n y se quiere calcular x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

pero según el enunciado, se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n - 3x_n = -2x_n.$$

Por tanto, si se comenzó con x_0, el siguiente elemento será $-2x_0$, el siguiente $4x_0$, el siguiente $-16x_0$, etc.: se obtiene una sucesión que va teniendo valor absoluto cada vez más grande y el algoritmo no converge. Es muy similar a lo que pasa en el ejercicio 18.

Ejercicio 21. Se consideran las funciones $g(x) = \pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$ y $f(x) = g(x) - x$. Se pide:

- Comprobar que f tiene una única raíz real c y que está entre 0 y 2π.
- Calcular un valor aproximado de c utilizando el algoritmo de Newton-Raphson garantizando que se han obtenido al menos 5 cifras decimales exactas.

***Completar**

Solución. Es* exactamente igual que el Ejercicio 13.

Ejercicio 22. De manera informal, se define el algoritmo de *regula falsi* como aquél que, para buscar una raíz de una función continua f en un intervalo $[a, b]$ en que $f(a)f(b) < 0$ comienza con a y b y en cada paso sustituye uno de los dos por el punto de corte de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje OX. Se pide describirlo con precisión (es decir, enunciarlo como un algoritmo de los apuntes, indicando la entrada, la salida, los pasos, cómo se itera, etc...).

Solución. Se pude enunciar como sigue:

Entrada: Una función $f(x)$ continua, un intervalo $[a, b]$ en que $f(x)$ tenga signos opuestos en a y b, y una tolerancia ”.

Salida: Un valor c que es, supuestamente, una raíz aproximada de $f(x)$ en $[a, b]$.

1. Tómese el punto de corte c de la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ y el eje OX.
2. Si $|f(c)| <$ ”, entonces devuélvase c.

3. Si $f(a)f(c) < 0$ entonces sustitúyase b por c. Si no, sustitúyase a por c.
4. Repetir desde 1. hasta que se termine.

El hecho de que termina se debe a que el conjunto de los números reales es completo (no entro en detalles). Por eso no hace falta (si no se quiere) un número máximo de iteraciones. Se deja como ejercicio enunciar el algoritmo si la entrada incluye este número máximo.

Ejercicio 23. En el algoritmo de Newton Raphson, ¿puede ocurrir que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-7}$ pero que $f(x_{n+1}) > 1$? ¿Por qué?

Solución. En general, puede ocurrir siempre cualquier cosa rara. Nadie garantiza que una función no pueda ser súper-extraña. Considérese $f(x) = 2x^k$, para $k > 1$, cuya derivada es $f'(x) = 2kx^{k-1}$. El algoritmo de Newton-Raphson nos dice que, en el paso n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^k}{2kx_n^{k-1}} = x_n - \frac{x_n}{k}.$$

Si $x_n = 1$, entonces $|x_{n+1} - x_n| = 1/k$ pero $f(x_{n+1}) = 2x_{n+1}^k$. Si $k > 10^7$, entonces es muy fácil probar que $f(x_{n+1}) > 1$ (se deja esto como ejercicio).

Ejercicio 24. Explíquese por qué el algoritmo de Newton-Raphson aplicado a la función $f(x) = \text{atan}(x)$ *siempre diverge* si se toma $|x_0| > 10$. *Idea:* se tiene que $\text{atan}(10) > \sqrt{2}$.

Solución. Es igual* que el ejercicio 18. ***Completar**

CAPÍTULO 3

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 25. Se considera una matriz cuadrada $n \times n$ como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Calcular su determinante.
- Explicar qué matrices intermedias iría dando el algoritmo de Gauss.
- Calcular la descomposición LU de A.
- Resolver el sistema $Ax = b$ de una manera más inteligente que esa, para cualquier b.

Solución. Vayamos por partes.

- Para calcular el determinante de esta matriz lo más sencillo es desarrollar por la primera fila. Llamemos A_n a A (para hacer explícito que tiene tamaño $n \times n$):

  $$|A_n| = (-1)^2 \times 1 \times |B_1| + (-1)^3 \times (-1) \times |A_{n-1}|$$

  donde

  $$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

  y A_{n-1} es la misma matriz A_n pero con una fila y una columna menos. El determinante de B es 0 porque tiene una fila entera de 0 (la de abajo), así que queda:

  $$|A_n| = 0 + |A_{n-1}| = |A_{n-1}|$$

  y, si repetimos el argumento, llegamos a que $|A_n| = |A_2|$ y

  $$|A_2| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Por tanto, el determinante de A es 1.

- El algoritmo de Gauss comenzará anulando los elementos de la primera columna. Para ello, se resta de la fila i, la fila 1, desde $i = 2$ hasta n. Vista la estructura de A, la siguiente matriz una vez hechos ceros todos los elementos de la primera columna debajo de la diagonal, queda

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

y, como se ve, ahora hay que hacer la misma operación pero en la matriz recuadrada, que es igual que A pero de tamaño $n-1$. Y así irían siendo todas las matrices, hasta llegar a

$$A_n = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

- El apartado anterior nos dice quién es U (la última matriz) y la L se obtiene sabiendo que todos los multiplicadores son -1, así que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, U = A_n.$$

- En lugar de utilizar el algoritmo de Gauss, es mucho más razonable darse cuenta de que la última ecuación del sistema, si $b = (b_1, \dots, b_n)$, es

$$x_1 = b_n,$$

y la ecuación anterior es

$$x_1 - x_{n-1} = b_{n-1},$$

y que todas las ecuaciones son del tipo

$$x_1 - x_i = b_i,$$

de manera que el sistema es totalmente trivial mirándolo “de abajo arriba”.

Ejercicio 26. Explicar qué ocurre si se aplica el método de Gauss con pivotaje parcial a una matriz $n \times n$ singular (es decir, a un sistema incompatible o compatible indeterminado). ¿Y si se aplica el método de Gauss sin pivotaje?

Solución. Como la matriz es singular, en algún momento del algoritmo de Gauss habrá, seguro, un 0 en la diagonal principal (si no, el determinante de la matriz no sería 0). A partir de ese momento, el algoritmo de Gauss no puede continuar (porque habría que dividir por 0).

El algoritmo de Gauss con pivotaje parcial encontrará un 0 en la diagonal principal. Como se puede hacer pivotaje, o bien esa columna será ya de ceros por debajo (en cuyo caso se pasa a la siguiente), o bien se intercambia el pivote y se sigue. En cualquier caso, el algoritmo de Gauss con pivotaje puede continuar siempre pero, como la matriz tiene determinante 0, en un momento dado habrá quedado un 0 en la diagonal principal.

Ejercicio 27. Si en la descomposición LU de una matriz A, la matriz L es

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

¿es posible que A sea igual a L?

Solución. Por supuesto, basta hacer que $U = Id$ (la identidad), entonces

$$A = LU = L.$$

Ejercicio 28. Se parte de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se intenta realizar el algoritmo de Gauss *con pivotaje parcial* y resulta que aparece un 0 en la diagonal. Responder razonadamente:

(1) ¿Quiere esto decir que el sistema es incompatible?
(2) ¿Qué se puede decir de la columna en que aparece dicho 0?

Solución. Por partes.

(1) No, en absoluto. En estos argumentos siempre se ha de tomar el caso más simple (un sistema 2×2 y ver qué puede pasar). Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones compatible (indeterminado) que ya está en forma de Gauss y tiene un 0 en la diagonal principal.

(2) Como es con pivotaje parcial, si la columna de U tiene un 0 en la diagonal principal, entonces todos los multiplicadores de esa columna son 0, pues el elemento de la diagonal principal de U es el que tenía mayor valor absoluto.

Ejercicio 29. La descomposición LU de una matriz A ha dado como U la siguiente matriz:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Se sabe que la primera columna de L está llena de 1. ¿Qué valores de A se pueden conocer con certeza?

SOLUCIÓN. La matriz L tendrá la siguiente forma (donde las $*$ son elementos desconocidos):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ 1 & * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ 1 & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

y, tal como es L, esto quiere decir que la primera fila de A es igual a $(1\ 2\ 3\ 4)$, la segunda fila de A es $(1\ 7\ 9\ 11)$ (la suma de la primera y la segunda de U) y los dos últimos elementos de la primera columna también son 1. No se puede saber nada más.

Ejercicio 30. Se tiene una matriz "triangular rara", como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cómo resolverías un sistema que la tuviera como matriz de coeficientes? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. Está claro que antes de hacer Gauss, uno debe considerar que la matriz no es muy complicada. De hecho, si $b = (b_1 \ \cdots \ b_n)$ es el vector de términos independientes, entonces la última fila significa la ecuación

$$a_{n1}x_1 = b_n,$$

que se resuelve $x_1 = b_n/a_{n1}$. La fila anterior es

$$a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 = b_{n-1},$$

de donde se puede despejar ya x_2, y así sucesivamente, se obtiene x_i en función de las ya calculadas $x_1, \dots, x_{i-1}$, usando la fila i.

Ejercicio 31. Tras realizar el algoritmo de Gauss, se ha obtenido la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se ha realizado pivotaje?

Solución. No se ha realizado pivotaje porque, cuando se realiza, el valor absoluto de los multiplicadores es siempre menor o igual que 1, y aquí hay uno que vale 2.

Ejercicio 32. La matriz correspondiente a una convolución con un núcleo de tamaño 5×5, ¿cuántos números diferentes de cero puede tener en una fila?

Solución. Como mucho tendrá $5 \times 5 = 25$ elementos diferentes de 0 en cada fila (tantos como tenga el núcleo diferentes de 0, que no tienen por qué ser todos).

Ejercicio 33. ¿De qué dimensión es el espacio vectorial que representa las imágenes de tamaño 800×600 en escala de grises? Se considera, en dicho espacio, la convolución con núcleo:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿Cuántos elementos distintos de 0 hay en cada fila de la matriz correspondiente a dicha convolución?

Solución. Las imágenes tienen $800 \times 600 = 480000$ píxeles y cada píxel es un dato (un parámetro libre), así que el espacio vectorial tiene esa dimensión: 480000.

La convolución tiene núcleo de tamaño 3×3, así que en cada fila habrá como mucho 9 elementos diferentes de 0. En este caso, realmente solo hay 4: los dos 6 y los dos -6, puesto que los otros cinco son 0.

Ejercicio 34. Se trabaja con imágenes digitales en escala de grises de 1920×1080 píxeles y se lleva a cabo una convolución con núcleo de tamaño 3×3. Contestar a las siguientes preguntas.

- ¿Qué dimensión tiene el *espacio vectorial* en el que se está trabajando?
- ¿Qué tamaño tiene la matriz de la convolución?
- ¿Cuántos elementos hay distintos de cero, como mucho, en cada fila de la matriz anterior?

Solución. Igual que en el ejercicio 33, el espacio vectorial tiene dimensión $1920 \times 1080 = 2073600$. La convolución tiene tamaño (aproximadamente, depende de si se incluye el borde exterior o no): 2073600×2073600

(es una transformación lineal del espacio vectorial en sí mismo). Finalmente, en cada fila de la matriz de la convolución, los únicos elementos que pueden ser diferentes de 0 son los que corresponden al núcleo, en este caso $3 \times 3 = 9$ elementos.

Ejercicio 35. Se quiere calcular la factorización LU de una matriz usando el algoritmo de Gauss (sin pivotaje). En un momento dado, hay que realizar la operación siguiente: sustituir la fila 7 por la fila 7 menos 0.5 veces la fila 2. ¿Qué puedes decir sobre algún elemento de L?

Solución. Aparte de lo obvio (que L es triangular superior y tiene la diagonal llena de 1), lo único que puede decirse es que, si sus elementos son l_{ij}, $l_{72} = 0.5$ (el elemento de la fila 7, columna 2 es 0.5), que es lo que corresponde a esa operación en el algoritmo de Gauss.

Ejercicio 36. Se ha calculado la descomposición LU de una matriz A y ha quedado:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde los $*$ son números cualesquiera. Dar un ejemplo de matriz A para la que dicha factorización sea posible.

Solución. Siempre se busca lo más sencillo. En este caso, nada impide que $L = Id$ (la identidad), pues Id es triangular inferior y su diagonal son todo 1. Así pues, $A = U$ cumple las condiciones.

CAPÍTULO 4

Interpolación

Ejercicio 37. Se tienen cuatro puntos y se quiere construir un spline de grado dos que los interpole de tal manera que la derivada en los puntos intermedios sea continua. Calcular las ecuaciones que describen este problema y explicar si el sistema que se obtiene es determinado o indeterminado. Si es indeterminado, dar más condiciones para que sea determinado.

SOLUCIÓN. Llamemos a los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Hay tres polinomios que considerar: $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$, cuyos coeficientes son las variables que se han de calcular. Escribamos

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \\ P_1(x) &= a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \\ P_2(x) &= a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 \end{aligned}$$

donde, repetimos, las incógnitas son las $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$: hay 9. Veamos las ecuaciones que aparecen dadas las condiciones:

(1) Primero, cada polinomio debe pasar por los dos extremos de su intervalo:

$$\begin{aligned} &P_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow a_0 = y_0 \\ &P_0(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = y_1 \\ &P_1(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 = y_1 \\ &P_1(x_2) = y_2 \Leftrightarrow a_0 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = y_2 \\ &P_2(x_2) = y_2 \Leftrightarrow a_2 = y_2 \\ &P_2(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_2 + b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2 = y_2 \end{aligned}$$

que son 6 ecuaciones.

(2) Las derivadas deben coincidir en los puntos intermedios:

$$\begin{aligned} P_0'(x_1) = P_1'(x_1) &\Leftrightarrow b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) = b_1 \\ P_1'(x_2) = P_2'(x_2) &\Leftrightarrow b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) = b_2 \end{aligned}$$

que son dos ecuaciones más.

Y no hay más. Por tanto, se obtienen 8 ecuaciones (que se puede verificar que son independientes) en las 9 variables: hace falta una más para que el sistema sea compatible determinado. Esta ecuación extra se debe elegir.

Ejercicio 38. Se sabe que una tabla de datos representa el movimiento browniano unidimensional de una partícula. ¿Usarías un spline cúbico para representarlos? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. Un spline cúbico representa una curva con derivada y derivada segunda. El movimiento browniano, por definición, es *no derivable*. Por tanto, no tendría sentido usar un spline cúbico para representarlo. Sería mucho más adecuada la gráfica de una interpolación lineal a trozos porque da la idea de "movimiento sin derivada" (por las esquinas de la gráfica).

Ejercicio 39. ¿Es posible que existan a y b para los que los siguientes polinomios formen un spline cúbico para la nube $(0,0), (2,3), (5,6)$?

$$P(x) = x - 2x^2 + ax^3, \;\; Q(x) = 3 + (x-2) + (x-2)^2 + b(x-2)^3$$

SOLUCIÓN. No hay más que imponer las condiciones requeridas para un spline y ver si se pueden cumplir:

- Que $P(x)$ pase por $(0,0)$ y $(2,3)$:
$$P(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (no dice nada).}$$
$$P(2) = 3 \Leftrightarrow -6 + 8a = 3 \Leftrightarrow a = 9/8.$$
- Que $Q(x)$ pase por $(2,3)$y $(5,6)$:
$$Q(2) = 3 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (no dice nada).}$$
$$Q(5) = 6 \Leftrightarrow 15 + 27b = 6 \Leftrightarrow b = -1/3$$
- Que $P'(2) = Q'(2)$:
$$-8 + 12a = 1 \Leftrightarrow a = 9/12 = 3/4$$
que contradice el valor calculado antes $a = 9/8$.

Por tanto, es imposible que esos polinomios formen un spline cúbico para dicha nube de puntos.

Ejercicio 40. ¿Es posible que existan a, b y c para los que los siguientes polinomios formen un spline cúbico para la nube $(0,0), (2,3), (5,6)$?

$$P(x) = x - ax^2 + bx^3, \;\; Q(x) = 3 + (x-2) + (x-2)^2 + c(x-2)^3$$

SOLUCIÓN. Es exactamente igual que el 39, solo que con una variable más*.

*Hacerlo algún día

Ejercicio 41. Plantear las ecuaciones necesarias para calcular el spline cúbico "natural" que interpola la nube de datos:

x	y
0	1
1	3
2	0
3	4
4	5

Misma pregunta para el spline "no-un-nudo". Si se tiene un ordenador a mano, resolver el sistema y dibujar los dos splines (si es que se sabe cómo hacerlo).

Nota: el spline "natural" es que tiene derivadas *segundas* iguales a 0 en los puntos x_1 y x_{n-1}. El spline "no un nudo" es el que cumple que la *tercera* derivada es también continua en x_1 y en x_{n-1}.

SOLUCIÓN. Es muy largo, nada más que eso*.

*Hacer parte?

Ejercicio 42. Se sabe que una tabla de datos representa las velocidades instantáneas de un coche (en una conducción normal) a lo largo de un trayecto. ¿Usarías un spline cúbico o una interpolación lineal a trozos para representarlo gráficamente? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. Es más razonable utilizar un spline cúbico porque la conducción *normal* tiene aceleraciones continuas (el pedal no "salta"), que es la propiedad fundamental del spline cúbico.

Ejercicio 43. Una tabla de datos representa las ganancias a la ruleta de un jugador, a lo largo de una tarde. ¿La representarías con un spline o con una interpolación lineal? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. No tiene sentido utilizar un spline cúbico para una colección de ganancias *discreta* (las ganancias ocurren en momentos determinados, no son una función continua del tiempo). Realmente, este proceso solo tiene sentido representarlo con una nube de puntos o un histograma.

Ejercicio 44. ¿Tiene sentido representar el spline cúbico de una lista de datos que muestra una estadística $(edad, ganancias)$? ¿Por qué? ¿Qué es lo que usarías para dar una idea de la relación? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. No, no tiene sentido ninguno: las edades se discretizan en años y no se consideran valores intermedios. Además, uno no espera que las ganancias sean valores continuos (los cambios de sueldo no lo son).

Ejercicio 45. Se tiene una nube de 1000 puntos (coordenadas (x, y)) y se quiere calcular la interpolación por mínimos cuadrados con las funciones $f(x) = 1$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$. ¿Puede hacerse? ¿De que tamaño queda el sistema lineal que se ha de resolver?

SOLUCIÓN. Hay 1000 puntos y solo hay tres funciones. Por tanto, hay que calcular solo tres coeficientes (uno por función), así que el problema tiene solución porque hay más puntos que coeficientes para calcular. El tamaño del sistema de ecuaciones es de tres ecuaciones y tres incógnitas: el número de funciones.

Ejercicio 46. La siguiente nube de puntos proviene de un experimento en que se deja caer *a velocidad inicial* 0 un objeto desde una altura H (desconocida), para intentar conocer la aceleración de la gravedad g. Los datos son: tiempo que ha pasado desde el lanzamiento

(t), altura a la que está el objeto (h). Plantear (y resolver si se dispone de ordenador) el sistema de ecuaciones que trata de ajustar esos datos a la fórmula adecuada.

t	1	2	3	4	5
h	195.534	181.530	156.097	122.291	80.400

SOLUCIÓN. Se nos pide calcular los coeficientes más adecuados para un problema de mínimos cuadrados de un movimiento uniformemente acelerado en el que el parámetro de la velocidad inicial es 0. Así que el modelo de movimiento que se nos propone es $h(t) = H - g/2t^2$, donde H es la altura inicial y g la aceleración de la gravedad: ambas han de calcularse aproximadamente utilizando los datos de la tabla. Por tanto, hay dos funciones en este problema: $f(x) = 1$, $g(x) = t^2$ y dos coeficientes para encontrar, $a_0 = H$ y $a_1 = -g/2$. La matriz X del problema es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones queda

$$XX^T = Xy^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 55 \\ 55 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 735.85 \\ 6293.19 \end{pmatrix}$$

que tiene como solución $a_0 = 200.1466$, $a_1 = -4.81$. Por tanto, H será 200.1466 y $g = 9.62$ para este experimento. No es muy afinado pero está bastante bien.

Ejercicio 47. En un experimento, se sabe que los valores obtenidos deben ajustarse a la fórmula $y = A + B\,\mathrm{sen}(x) + C\cos(x)$. Se hacen 300 experimentos. Contestar:

- ¿Es posible plantear el problema de mínimos cuadrados en ese caso?
- ¿De qué tamaño es el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene?
- ¿Es posible que B y C salgan 0 los dos?

SOLUCIÓN. Si hay 300 datos y solo 3 funciones (en este caso $f(x) = 1$, $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, $h(x) = \cos(x)$), el problema de mínimos cuadrados se puede plantear. Su tamaño es de tantas ecuaciones e incógnitas como número de funciones (en este caso, 3). Y cualquier resultado es posible. Por ejemplo, para que salgan $B = C = 0$, basta con que todos los datos del experimento sean iguales (entonces la función que da la mejor aproximación a la gráfica correspondiente es la que toma ese valor constantemente).

Ejercicio 48. Escribir el sistema de ecuaciones del problema de interpolación lineal por mínimos cuadrados para la nube de puntos $(0,1), (1,2), (2,0), (3,4), (5,-1)$ y las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^4$. No se pide resolverlo (hágase si se desea).

Solución. Dadas esas tres funciones, la matriz X y el vector de términos independientes quedan

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 25 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & 625 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -299 \end{pmatrix}$$

con lo que el sistema de ecuaciones es:

$$XX^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -299 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 39 & 161 & 3401 \\ 161 & 723 & 16419 \\ 3401 & 16419 & 397443 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -299 \end{pmatrix}$$

que, por terminar el ejercicio, tiene como solución $a_1 \simeq -0.134$, $a_2 \simeq 0.628$, $a_3 \simeq -0.026$.

Ejercicio 49. Se tiene la siguiente nube de puntos: $(0,1)$, $(1,10)$, $(2,11)$, $(3,12)$, $(12,13)$. ¿Es razonable pensar que siguen una distribución lineal? ¿Qué tipo de función utilizarías para aproximarlos por mínimos cuadrados? (La respuesta no es única). Conviene hacer una gráfica de los puntos.

Solución. Lo más importante es hacer una gráfica. Está claro que los cuatro últimos puntos están alineados pero el primero es sorprendentemente bajo. Puede pensarse que:

- Bien el primer punto es "excepcional" y, sí, todos siguen una distribución lineal. Pero esto requeriría una explicación de la eliminación del primer punto, y no se dispone de ella.
- La distribución comienza creciendo mucho y luego se vuelve más horizontal. Distribuciones de este tipo son, *por ejemplo*, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, etc.

Ejercicio 50. Considérese la tabla de datos siguiente:

x	y
-2	0.0338
-1.5	0.0397
-1	0.4119
-0.5	1.862
0	3.013
0.5	1.856
1	0.4240
1.5	0.0485
2	0.0249

Se pide (hará falta tiempo o usar un ordenador):

- Calcular la tabla de $(x, \log(y))$ (como siempre, log representa el *logaritmo natural*).
- Interpolar linealmente la tabla que se ha calculado utilizando las funciones 1 y x^2. Llámese $g(x)$ a la función que resulta (de la forma $a + bx^2$).
- Llamar $f(x)$ a la función $e^{g(x)}$, es decir, $e^a e^{bx^2}$, donde a y b son los calculados antes. Calcular el error cuadrático total cometido por $f(x)$ respecto de la nube de puntos original.
- Calcular el error cuadrático total cometido por la función $3e^{-2x^2}$ respecto de la nube de puntos original.
- Comentar los dos últimos resultados con tu compañero.

*Colocar en Internet

SOLUCIÓN. Esto está hecho* en uno de los archivos de Matlab de Internet.

Ejercicio 51 (Es una versión del anterior)**.** Se tiene una nube de 300 puntos (coordenadas (x, y)). Se sabe que existe una función de la forma $f(x) = ae^{bx}$ tal que el error cuadrático total es 0.1. Se considera la nube de puntos $(x, \log(y))$ y se calcula la interpolación por mínimos cuadrados de esta nube para las funciones $1, x$; se obtiene que la mejor interpolación es $2 + 3x$. ¿Es posible que el error cuadrático total de la función $e^2 e^{3x}$ respeto de la primera nube de puntos sea mayor que 0.1? ¿Por qué?

SOLUCIÓN. Igual que el anterior. Si un problema no lineal se "convierte" en lineal, casi siempre pueden pasar todo tipo de cosas raras, sorprendentes y extrañas.

Problemas sin resolver.

Téngase en cuenta que el Teorema de las cotas del error de los splines ha tenido que re-enunciarse, porque le faltaba una condición: que el spline tuviera la misma derivada en el primer y el último nodo que la función que se aproxima. Lo reescribimos para aclarar.

TEOREMA 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable 4 veces con continuidad y supóngase que $|f^{4)}(x)| < M$ para $x \in [a, b]$. Sea h el máximo de las anchuras $x_i - x_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. Si $s(x)$ es el spline cúbico para los puntos $(x_i, f(x_i))$ que satisface que $f'(x_0) = s'(x_0)$ y $f'(x_n) = s'(x_n)$, entonces*

$$|s(x) - f(x)| \leq \frac{5M}{384} h^4.$$

Para simplificar, en lugar de $5/384$, utilizaremos $1/70$, que es algo más breve.

Con esta aclaración, pasamos a proponer un par de ejercicios.

Ejercicio 52. Calcular una (buena) cota del error absoluto cometido al aproximar la función $\text{sen}(x)$ por un spline cúbico con 9 nodos equiespaciados entre 0 y π.

Ejercicio 53. Calcular una buena cota del error absoluto cometido al aproximar la función 2^x por un spline cúbico con 11 nodos equiespaciados entre 0 y 1. Utilizar este spline para dar una aproximación a la función $f(x) = 2^x$ para x cualquier número real positivo con un error relativo menor que 10^{-6}.

CAPÍTULO 5

Derivación e Integración numéricas

Ejercicio 54. Se tiene la siguiente lista de datos correspondiente a una función $f(x)$:

1.03	1.04	1.05	1.07	1.09	1.13
2.5	2.8	2.9	3.1	2.95	2.97

Se pide

- Dar un valor aproximado de $f'(1.04)$.
- Dar un valor aproximado de $f'(1.09)$.
- Calcular aproximadamente $f'(1.03)$ y $f'(1.13)$.

SOLUCIÓN. Para 1.04, se tienen dos valores a distancias iguales a derecha e izquierda. Es conveniente, por tanto, utilizar la aproximación simétrica:

$$f'(1.04) \simeq \frac{f(1.05) - f(1.03)}{2h} = \frac{2.9 - .25}{.02} = 20.$$

Para 1.09, la abscisa de la izquierda está a 0.02 unidades de distancia, mientras que la de la derecha está a .04. *Aunque podría encontrarse una fórmula mejor*, nosotros optamos por utilizar la aproximación por la izquierda:

$$f'(1.09) \simeq \frac{f(1.09) - f(1.07)}{.02} = -7.5.$$

Finalmente, para 1.03 solo se tiene un dato a la derecha y para 1.13, uno a la izquierda. Por tanto

$$f'(1.03) \simeq \frac{2.8 - 2.5}{.01} = 30, \quad f'(1.13) \simeq \frac{2.97 - 2.95}{.04} = 0.5.$$

Ejercicio 55. Dada la función $f(x) = \cos(x)$, se pide:

(1) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ por el método del punto medio, del trapecio y de Simpson.
(2) Calcular el valor "exacto" de dicha integral.
(3) Calcular los errores absolutos y relativos cometidos en cada caso. ¿Es mejor el trapecio o el punto medio en este caso?

SOLUCIÓN. Por partes. Vamos a necesitar los valores en los extremos y el punto medio. $f(0) = 1$, $f(1) \simeq 0.5403$ (*importante*: se trabaja siempre en radianes), $f(1/2) \simeq 0.8776$. La anchura del intervalo es $h = 1$.

(1) Si llamamos M, T y S a los valores de las respectivas fórmulas, tenemos

$$M = hf(1/2) \simeq 1 \cdot 0.8776 = 0.8776,$$
$$T = \tfrac{h}{2}(f(1) + f(0)) \simeq 0.5 \cdot 1.4179 = 0.7089,$$

y finalmente

$$S = \frac{h}{6}\left(f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right) \simeq 0.1667 \cdot (1 + 3.5103 + 0.5403) = 0.8419.$$

(2) El valor exacto es, obviamente

$$\int_0^1 \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x)\big|_0^1 = \mathrm{sen}(1) \simeq 0.8415.$$

(3) Los errores absolutos (llamándolos E_M, E_T y E_S) y los relativos (ffl_M, ffl_T y ffl_S) son:

$$\begin{array}{lll} E_M = 0.0361 & E_T = 0.1326 & E_S = 0.0004 \\ ffl_M = 0.0429 & ffl_T = 0.1576 & ffl_S = 0.0005 \end{array}$$

y está claro que es mucho mejor la fórmula del punto medio que la del trapecio porque la función es muy cóncava en todo ese intervalo.

Ejercicio 56. Considérese la función $f(x) = \tan(x)$ entre $x = -1$ y $x = 0.5$. Se pide:

(1) Calcular $\int_{-1}^{0.5} f(x)\,dx$ utilizando los métodos del punto medio, trapecio y Simpson.
(2) Calcular el valor exacto de dicha integral.
(3) Calcular los errores absolutos y relativos en cada caso.

Solución. Vamos a necesitar los valores en los extremos y el punto medio:

$$f(-1) \simeq -1.5574, \quad f(-0.25) \simeq -0.2553, \quad f(0.5) \simeq 0.5463$$

y la anchura del intervalo es 1.5.

(1) Llamando M, T y S a cada aproximación, se tiene:

$$M = -0.383, \quad T = -0.7583, \quad S = -0.5081.$$

(2) La integral exacta es:

$$\int_{-1}^{0.5} \tan(x)\,dx = -\log(\cos(x))\big|_{-1}^{0.5} - \simeq -0.485.$$

(3) Los errores absolutos (llamándolos E_M, E_T y E_S) y los relativos (ffl_M, ffl_T y ffl_S) son:

$$\begin{array}{lll} E_M = 0.1020 & E_T = 0.2733 & E_S = 0.0231 \\ ffl_M = 0.2104 & ffl_T = 0.5634 & ffl_S = 0.0475 \end{array}$$

la fórmula del punto medio vuelve a ser, en este caso, más exacta que la del trapecio. Pero ninguna de las dos da un valor "bueno" (el error del punto medio es de un 21%, intolerable).

Ejercicio 57. Se sabe que la densidad de una barra metálica sigue la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$, para x desde 1 hasta 3. Se pide:

(1) Aproximar la masa utilizando las reglas del punto medio, del trapecio y de Simpson simples.
(2) Hacer el mismo cálculo pero subdividiendo el intervalo en 3 subintervalos y aplicando las reglas compuestas en cada caso.

SOLUCIÓN. Por partes.

(1) Necesitamos los valores de la función en los extremos y el punto medio. Se tiene:

$$f(1) \simeq 0.8415,\ f(2) \simeq 0.4547,\ f(3) \simeq 0.0470.$$

Con estos datos ya se pueden calcular M, T, S (como en los ejercicios anteriores):

$$M = 2 \times 0.4547 = 0.9094,\ T = 2 \times \frac{0.9826}{2} = 0.9826,$$
$$S = \frac{1}{3}(0.8415 + 4 \times 0.4547 + 0.0470) = 0.9024.$$

Ejercicio 58. Considérese $f(x) = x^7 - 15x^3 + 10x$ definida entre $x = -2$ y $x = 2$. Calcúlense aproximaciones a su integral entre dichos extremos utilizando:

- Las reglas del punto medio, del trapecio y de Simpson simples.
- Las mismas reglas compuestas dividiendo el intervalo en 2, y en 3 subintervalos iguales (es decir, hay que hacer dos veces este apartado, una para 2 subintervalos y otra para 3).
- Calcular los errores relativos, absolutos, etc...

SOLUCIÓN. Este ejercicio es mucho más sencillo de lo que parece porque $f(x)$ es una función impar y el intervalo es simétrico respecto del origen. Cualquier operación que se realice de manera simétrica va a dar cero porque $f(-x) = -f(x)$. Pero todas las reglas de integración son simétricas respecto del centro del intervalo y en el segundo apartado los subintervalos son iguales, así que siempre que aparezca $f(a)$ en una fórmula, va a aparecer $f(-a) = -f(a)$. Por tanto, todas las integrales aproximadas que se nos piden son 0.

La integral exacta es 0 por el mismo motivo.

Los errores absolutos son todos 0.

No hay, (**no hay**) errores relativos porque el valor que se quiere aproximar es 0 y respecto de 0 no hay error relativo.

CAPÍTULO 6

Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 59. Considérense los problemas de valor inicial siguientes. Verifíquese que la solución propuesta es válida para cualquier valor de la constante y calcúlese esta para la condición inicial propuesta.

- $y' = 0.03y$ para $t \in [0,1]$, con $y(0) = 1000$. Solución: $y(t) = ke^{0.03t}$.
- $y' = t/y$ para $t \in [0,1]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = \sqrt{t^2 + k}$.
- $y' = e^{-y}$ para $t \in [1,3]$, con $y(1) = 0$. Solución: $y(t) = \ln(t + k)$.
- $y' = y/t^2$ para $t \in [1,2]$, con $y(1) = 1$. Solución: $y(t) = ke^{-1/t}$.
- $y' = 2t$ para $t \in [0,2]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = t^2 + k$.
- $y' = y^2$ para $t \in [0,1/2]$, con $y(0) = 1$. Solución: $y(t) = 1/(k - t)$.

Ejercicio 60. Para cada uno de los problemas anteriores, hágase lo que sigue:

(1) Resolverlo de manera aproximada usando el método de Euler con dos pasos equiespaciados.
(2) Calcular el error absoluto y relativo cometido en el instante final (usando, claro, la solución exacta que se da).
(3) Resolverlo con cuatro pasos y comparar.

SOLUCIÓN. Solo hacemos el cado de *dos pasos* equiespaciados y no calculamos los errores (esto debería ser elemental). En la última columna de cada tabla está el valor exacto.

(1) Para la ecuación $y' = 0.03y$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1000$ con dos pasos. En este problema y en todos, el signo $---$ indica que el valor *no hace falta calcularlo* (el problema ya ha terminado). Los valores están *redondeados* a dos cifras decimales (es decir, 1.414 pasa a ser 1.41 y 1.145 pasa a ser 1.42). La solución exacta es $y(t) = 1000e^{0.03t}$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	0	1000	30	1000
1	0.5	1015	30.45	1015.11
2	1	1030.24	—	1030.45

(2) Para la ecuación $y' = t/y$, $t \in [0,1]$, $y(0) = 1$ con dos pasos. La solución exacta es $y(t) = \sqrt{t^2+1}$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	0	1	0	1
1	0.5	1	0.5	1.12
2	1	1.25	—	1.41

(3) Para la ecuación $y' = e^{-y}$, $t \in [1,3]$, $y(1) = 0$ con dos pasos. La solución exacta es $y(t) = \ln(t)$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	1	0.00	1.00	0.00
1	2	1.00	0.37	0.67
2	3	1.37	—	1.06

(4) Para $y' = y/t^2$, con $t \in [1,2]$, $y(1) = 1$, dos pasos. La solución exacta es $y(t) = e \cdot e^{-1/t} = e^{1-1/t}$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	1	1	1	1
1	1.5	1.5	0.67	1.40
2	2	1.83	—	1.65

(5) Para $y' = 2t$, con $t \in [0,2]$, $y(0) = 1$. La solución exacta es $y(t) = t^2 + 1$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	0	1	0	1
1	1	1	2	2
2	2	3	—	5

(6) Para $y' = y^2$, con $t \in [0,1/2]$ e $y(0) = 1$. La solución exacta es $y(t) = 1/(1-t)$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$
0	0	1	1	1
1	0.25	1.25	1.56	1.33
2	0.5	1.64	—	2

Ejercicio 61. Para cada uno de los problemas del ejercicio 59, se pide

(1) Resolverlo de manera aproximada utilizando el método de Euler modificado con dos pasos equiespaciados.
(2) Calcular el error relativo y el absoluto.
(3) Mismo con cuatro pasos equiespaciados.

Ejercicio 62. Aplicar *un paso* del método de Euler (o del método de Heun) al problema de condición inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t), & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t), & y(0) = 2 \end{cases}$$

con paso $h = 1$.

Ejercicio 63. Para cada uno de los problemas del ejercicio 59, se pide

(1) Resolverlo de manera aproximada utilizando el método de Heun con dos pasos equiespaciados.
(2) Calcular el error relativo y el absoluto.
(3) Mismo con cuatro pasos equiespaciados.

Solución. Igual que antes, solo hacemos el cado de *dos pasos* equiespaciados y no calculamos los errores (esto debería ser elemental).

(1) Para la ecuación $y' = 0.03y$, $t \in [0, 1]$, $y(0) = 1000$ con dos pasos. En este problema y en todos, el signo $---$ indica que el valor *no hace falta calcularlo* (el problema ya ha terminado). Los valores están *redondeados* a dos cifras decimales (es decir, 1.414 pasa a ser 1.41 y 1.145 pasa a ser 1.42).

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	y_e	m_f	m	$y(t_i)$
0	0	1000	30	1015	30.45	30.225	1000
1	0.5	1015.11	30.45	1030.34	30.91	30.68	1015.11
2	1	1030.45	—	—	—	—	1030.45

(2) Para la ecuación $y' = t/y$, $t \in [0, 1]$, $y(0) = 1$ con dos pasos.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	y_e	m_f	m	$y(t_i)$
0	0	1.00	0.00	1.00	0.50	0.25	1.00
1	0.5	1.13	0.44	1.35	0.74	0.59	1.12
2	1	1.42	—	—	—	—	1.41

(3) Para la ecuación $y' = e^{-y}$, $t \in [1, 3]$, $y(1) = 0$ con dos pasos.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	y_e	m_f	m	$y(t_i)$
0	1	0.00	1.00	1.00	0.37	0.68	0.00
1	2	0.68	0.50	1.19	0.30	0.40	0.69
2	3	1.09	—	—	—	—	1.10

(4) Para $y' = y/t^2$, con $t \in [0,2]$, $y(0) = 1$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	y_e	m_f	m	$y(t_i)$
0	1	1.00	1.00	1.50	0.67	0.83	1.00
1	1.5	1.42	0.63	1.73	0.43	0.53	1.40
2	2	1.68	—	—	—	—	1.65

(5) Para $y' = 2t$, con $t \in [0,2]$, $y(0) = 1$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	y_e	m_f	m	$y(t_i)$
0	0	1.00	0.00	1.00	2.00	1.00	1.00
1	1	2.00	2.00	4.00	4.00	3.00	2.00
2	2	5.00	—	—	—	—	5.00

(6) Para $y' = y^2$, con $t \in [0,1/2]$ e $y(0) = 1$.

i	t_i	$\tilde{y}_i$	m_e	$y(t_i)$			
0	0	1.00	1.00	1.25	1.56	1.28	1.00
1	0.25	1.32	1.74	1.76	3.08	2.41	1.33
2	0.5	1.92	—	—	—	—	2.00

Ejercicio 64. La ecuación diferencial que describe el movimiento de un muelle horizontal *sin rozamiento* es:

$$mx''(t) = -kx(t),$$

donde $x(t)$ denota la elongación con respecto al punto de reposo del muelle (esa es la Ley de Hooke) y k es la constante de elasticidad del muelle. Se pide:

(1) Escribir el sistema de ecuaciones de orden 1 equivalente.
(2) Hacer dos paso de Heun para dicho sistema tomando como condiciones iniciales $x(0) = 0.5$, $x'(0) = 0.1$, y como datos: $m = 2$, $k = 0.1$. El paso es $h = 1$.

SOLUCIÓN. La primera parte es elemental: se llama $v(t)$ a la velocidad y (siempre queda lo mismo) se obtiene:

$$\begin{cases} x'(t) = v \\ v'(t) = -\dfrac{k}{m}x \end{cases}$$

Para la segunda parte hay que proceder, como siempre, con cuidado. Antes de nada, la ecuación queda, con dichos datos:

$$\begin{cases} x'(t) = v \\ v'(t) = -0.05x \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0.5$, $v(0) = 0.1$ El paso es $h = 1$. Como en los ejercicios anteriores, haremos una tabla. Los valores están redondeados a dos decimales.

i	t_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{v}_i$	m_{ex}	m_{ev}	x_e	v_e	m_{fx}	m_{fv}	m_x	m_v	$x(t_i)$	$v(t_i)$
0	0.00	0.50	0.10	0.10	-0.03	0.60	0.08	0.08	-0.03	0.09	-0.03	0.5	0.1
1	1.00	0.59	0.07	0.07	-0.03	0.66	0.04	0.04	-0.03	0.06	-0.03	0.586	0.073
2	2.00	0.65	0.04	—	—	—	—	—	—	—	—	0.644	0.042

Ejercicio 65. La ecuación diferencial que describe el movimiento de un muelle horizontal *con rozamiento proporcional a la velocidad*, con constante de proporcionalidad r, es:

$$mx''(t) = -kx(t) - rx'(t),$$

donde $x(t)$ denota la elongación con respecto al punto de reposo del muelle (esa es la Ley de Hooke) y k es la constante de elasticidad del muelle. Se pide:

(1) Escribir el sistema de ecuaciones de orden 1 equivalente.
(2) Hacer dos paso de Heun para dicho sistema tomando como condiciones iniciales $x(0) = 0.5$, $x'(0) = 0.1$, y como datos: $m = 2$, $k = 0.1$, $r = 0.2$. El paso es $h = 1$.

Solución. La primera parte es elemental: se llama $v(t)$ a la velocidad y (siempre queda lo mismo) se obtiene:

$$\begin{cases} x'(t) = v \\ v'(t) = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{r}{m}v \end{cases}$$

Para la segunda parte hay que proceder, como siempre, con cuidado. Antes de nada, la ecuación queda, con dichos datos:

$$\begin{cases} x'(t) = v \\ v'(t) = -0.05x - 0.1v \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0.5$, $v(0) = 0.1$ El paso es $h = 1$. Como en los ejercicios anteriores, haremos una tabla. Los valores están redondeados a dos decimales.

i	t_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{v}_i$	m_{ex}	m_{ev}	x_e	v_e	m_{fx}	m_{fv}	m_x	m_v	$x(t_i)$	$v(t_i)$
0	0.00	0.50	0.10	0.10	-0.04	0.60	0.07	0.07	-0.04	0.08	-0.04	0.5	0.1
1	1.00	0.58	0.06	0.06	-0.04	0.65	0.03	0.03	-0.04	0.05	-0.04	0.581	0.065
2	2.00	0.63	0.03	—	—	—	—	—	—	—	—	0.629	0.030

Ejercicio 66. Considérese la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y^2.$$

¿Se puede decir algo sobre el crecimiento o decrecimiento de las soluciones? Sea $y(x)$ la solución que pasa por la condición inicial $y(0) = 1$. ¿Se puede saber si es cóncava o convexa? ¿Tiene algún punto crítico?

Mismas preguntas para la solución $y(x)$ con $y(0) = -1$.

Ejercicio 67. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = y$$

. y sea $y(x)$ la solución del problema con condición inicial $y(-1) = 2$. ¿Es $y(x)$ creciente? ¿Tiene algún punto crítico? ¿Es cóncava o convexa?

Mismas preguntas para la solución del problema con la condición inicial $y(-1) = -2$.

¿Qué pasa con la condición inicial $y(1) = 0$?

Ejercicio 68. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{sen}(y).$$

¿Es posible saber algo sobre los puntos en que las soluciones tienen un máximo o un mínimo? ¿Y sobre la concavidad/convexidad de las soluciones?

Ejercicio 69. Considérese la ecuación diferencial

$$y' = (x-1)y.$$

Se considera la solución $y_1(x)$ del problema con condición inicial $y(0) = -1$. ¿Tiene algún punto crítico? ¿Es máximo, mínimo o un punto de inflexión?

Mismas cuestiones para la solución con condición inicial $y(1) = 2$.

CAPÍTULO 7

Anexo (para no romper la numeración)

1. Interpolación

Ejercicio 70. Considérese la nube de puntos

$$\{(0,-2),(-3,4),(2,7),(-1,2),(6,4)\}.$$

Calcúlese el valor de la función de interpolación lineal a trozos para $x = 3$, $x = 7$, $x = -1/2$.

SOLUCIÓN. Lo primero necesario es ordenar la nube según la primera coordenada. Se tiene:

$$x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 6.$$

Y las y_i que corresponden. Vayamos caso a caso.

- Para $x = 3$, se tiene que $x_3 \leq x \leq x_4$, así que hay que calcular la ecuación de la recta que pasa por $(2,7)$ y $(6,4)$. Esta es:

  $$Y = \frac{4-7}{6-2}(X-2)+7 = \frac{-3}{4}(X-2)+7$$

  y sustituir X por el valor que se da: $x = 3$, así que la interpolación lineal a trozos para dicha nube, en $x = 3$, vale

  $$\frac{-3}{4}(3-2)+7 = \frac{-3}{4}+7 = \frac{25}{4}.$$

- El valor $x = 7$ está fuera de la nube de puntos: no se puede calcular la interpolación (se estaría extrapolando). Fin.
- El valor $x = -1/2$ está entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$, así que se ha de utilizar la recta

  $$Y = \frac{-2-2}{0-(-1)}(X-(-1))+2 = -4(X+1)+2.$$

  Por tanto, el valor pedido es $y = -4(-1/2+1)+2 = 0$.

$\square$

Ejercicio 71. Se sabe que un spline cúbico para la nube de puntos $(0,2),(3,1),(5,7)$ está compuesto por dos polinomios, $P_0(x)$ y $P_1(x)$, el primero para $x \in [0,3]$ y el segundo para $x \in [3,5]$. También se sabe que $P_0(x) = -1/3x + 2$. ¿Se puede decir cuánto vale $P_1(x)$? Si no, ¿qué se puede decir de él?

Solución. En este ejercicio ya se nos da uno de los polinomios. Del otro, $P_1(x)$ se sabe que forma parte de un spline cúbico para la nube, así que tiene que cumplir unas condiciones. Escribamos $P_1(x)$ centrado en $x_1 = 3$:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x-3) + c_1(x-3)^2 + d_1(x-3)^3.$$

Las condiciones impuestas por ser parte de un spline cúbico son:

(1) Pasa por $(3,1)$:

$$P_1(3) = 1 \Rightarrow 1 = a_1.$$

(2) Pasa por $(5,7)$:

(*) $$P_1(5) = 7 \Rightarrow 7 = a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1$$

(pues (5-3)=2).

(3) La derivada de $P_1(x)$ en x_1 ha de coincidir con la derivada de $P_0(x)$ en x_1:

$$P_1'(x_1) = P_0'(x_1) \Rightarrow b_1 = -1/3.$$

(4) Finalmente, la derivada segunda de $P_1(x)$ en x_1 ha de coincidir con la de $P_0(x)$ en x_1:

$$P_1''(x_1) = P_0''(x_1) \Rightarrow 2c_1 = 0.$$

De todas estas ecuaciones se deduce que:

$$a_1 = 1, b_1 = -1/3, c_1 = 0$$

y, sustituyendo en la ecuación marcada con (*), queda

$$7 = 1 - 2/3 + 0 + 8d_1,$$

así que $d_1 = 20/24 = 5/6$. Por tanto, $P_1(x)$ está unívocamente determinado. □

Ejercicio 72. Plantear las ecuaciones necesarias para calcular el spline cúbico "natural" que interpola la nube de datos:

x	y
0	1
2	3
3	0
7	4
9	5

Misma pregunta para el spline "no-un-nudo".

Solución. Antes de hacer los casos específicos, imponemos las condiciones de spline cúbico: que pase por los puntos y que las derivadas primeras y segundas coincidan en los puntos intermedios. Hay 5 puntos, por tanto necesitamos 4 polinomios de grado 3 (y nos van a salir $4 \times 4 = 16$ incógnitas y 14 ecuaciones). Centramos cada polinomio en la x correspondiente. Nos sale:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 \\
P_1(x) &= a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 \\
P_2(x) &= a_2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3 \\
P_3(x) &= a_3 + b_3(x-7) + c_3(x-7)^2 + d_3(x-7)^3
\end{aligned}$$

Condiciones: Vamos por partes:

(1) Cada $P_i(x)$ pasa por (x_i, y_i):

$$\begin{aligned}
P_0(0) = 1 &\Leftrightarrow a_0 = 1 \\
P_1(2) = 3 &\Leftrightarrow a_1 = 3 \\
P_2(3) = 0 &\Leftrightarrow a_2 = 0 \\
P_3(7) = 4 &\Leftrightarrow a_3 = 4
\end{aligned}$$

(2) Cada $P_i(x)$ pasa por (x_{i+1}, y_{i+1}):

$$\begin{aligned}
P_0(2) = 3 &\Leftrightarrow a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = 3 \\
P_1(3) = 0 &\Leftrightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\
P_2(7) = 4 &\Leftrightarrow a_2 + 4b_2 + 16c_2 + 64d_2 = 4 \\
P_3(9) = 5 &\Leftrightarrow a_3 + 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = 5
\end{aligned}$$

(3) Ahora cada $P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1})$:

$$\begin{aligned}
P_0'(2) = P_1'(2) &\Leftrightarrow b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1 \\
P_1'(3) = P_2'(3) &\Leftrightarrow b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \\
P_2'(7) = P_3'(7) &\Leftrightarrow b_2 + 8c_2 + 48d_2 = b_3
\end{aligned}$$

(4) Finalmente, cada $P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1})$:

$$\begin{aligned}
P_0''(2) = P_1''(2) &\Leftrightarrow 2c_0 + 12d_0 = 2c_1 \\
P_1''(3) = P_2''(3) &\Leftrightarrow 2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \\
P_2''(7) = P_3'' &\Leftrightarrow 2c_2 + 24d_2 = 2c_3
\end{aligned}$$

Hasta aquí todas las condiciones de spline cúbico: 14 ecuaciones y 12 incógnitas.

Para conseguir *uno concreto*, hay que imponer 2 condiciones adicionales. Lo habitual es imponerlas en los extremos o en los puntos segundo y penúltimo. En los casos de este problema:

(1) El spline "natural" se define como el spline cúbico en el que se impone que la derivada segunda en los extremos sea 0. Así que, además de las 12 condiciones anteriores, se imponen:

$$\begin{aligned}
P_0''(0) = 0 &\Leftrightarrow 2c_0 = 0 \\
P_3''(9) = 0 &\Leftrightarrow 2c_3 + 12d_3 = 0.
\end{aligned}$$

Y ya se tienen 14 ecuaciones lineales con 14 incógnitas (que, se sabe, dan lugar a un sistema compatible determinado).

(2) El spline "no-un-nudo" impone, en lugar de las dos anteriores, las condiciones siguientes *sobre derivadas terceras*: que $P_0'''(x_1) = P_1'''(x_1)$ y que $P_{n-2}'''(x_{n-1}) = P_{n-1}'''(x_{n-1})$ (que coincidan las derivadas terceras en los puntos segundo y penúltimo: los subíndices de los polinomios terminan en $n-1$, no en n). En nuestro caso:

$$P_0'''(2) = P_1'''(2) \Leftrightarrow 6d_0 = 6d_1 \Leftrightarrow d_0 = d_1$$
$$P_2'''(7) = P_3'''(7) \Leftrightarrow 6d_2 = 6d_3 \Leftrightarrow d_2 = d_3$$

(que son más sencillas que las del "natural" pero pueden ser más artificiales).

$\square$