Apéndice F

Algunos problemas de interpolación

Téngase en cuenta que el Teorema 6 ha tenido que re-enunciarse, porque le faltaba una condición: que el spline tuviera la misma derivada en el primer y el último nodo que la función que se aproxima. Lo reescribimos para aclarar.

TEOREMA. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable* 4 *veces con continuidad y supóngase que* $|f^{4)}(x)| < M$ *para* $x \in [a,b]$. *Sea* h *el máximo de las anchuras* $x_i - x_{i-1}$ *para* $i = 1, \dots, n$. *Si* $s(x)$ *es el spline cúbico para los puntos* $(x_i, f(x_i))$ *que satisface que* $f'(x_0) = s'(x_0)$ *y* $f'(x_n) = s'(x_n)$, *entonces*

$$|s(x) - f(x)| \leq \frac{5M}{384}h^4.$$

Para simplificar, en lugar de $5/384$, *utilizaremos* $1/70$, *que es algo más breve.*

Con esta aclaración, pasamos a proponer un par de ejercicios.

Ejercicio 4. Calcular una (buena) cota del error absoluto cometido al aproximar la función $\mathrm{sen}(x)$ por un spline cúbico con 9 nodos equiespaciados entre 0 y π.

Ejercicio 5. Calcular una buena cota del error absoluto cometido al aproximar la función 2^x por un spline cúbico con 11 nodos equiespaciados entre 0 y 1. Utilizar este spline para dar una aproximación a la función $f(x) = 2^x$ para x cualquier número real positivo con un error relativo menor que 10^{-6}.