Apéndice D

Un ejemplo explícito de Gauss con pivotaje

Se muestra a continuación el desarrollo completo del método de Gauss con pivotaje parcial aplicado a un sistema (matriz de coeficientes) 4×4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se quieren calcular las matrices L (triangular inferior), U (triangular superior) y P (matriz de permutación) que satisfagan:

$$PA = LU$$

pero vamos a llevar cuenta de b, también, así que en todo el desarrollo trabajaremos con la matriz ampliada. Comenzamos, por tanto, haciendo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

que es la matriz que vamos a ir transformando hasta que la parte de los coeficientes sea triangular superior. Procedemos a realizar el algoritmo, paso a paso.

1. Se han de intercambiar las filas 1 y 2 para que el pivote tenga el valor 2. Para esto, se usa la matriz P_{12}, y se obtiene

$$U_1 \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

2. Utilizando las matrices $L_{12}(-1/2)$ y $L_{13}(1/2)$ se eliminan los términos 1 y -1, respectivamente, de debajo del pivote de la

primera columna. Recuérdese que

$$L_{12}(-1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{13}(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y, haciendo todos los cálculos, queda

$$U_2 \leftarrow L_{13}(1/2) \cdot L_{12}(-1/2)U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Ahora hay que intercambiar las filas 2 y 3 para que el 5 quede como pivote. Para esto se utiliza P_{23}:

$$U_3 \leftarrow P_{23}U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Se eliminan los dos 4 que hay debajo del pivote, utilizando $L_{23}(-4/5)$ y $L_{24}(-4/5)$:

$$U_4 \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{5} & \frac{36}{5} & 1 \end{pmatrix} = L_{24}(-4/5)L_{23}(-4/5)U_3.$$

5. Se intercambian las filas 3 y 4 para que el $-26/5$ quede como pivote, utilizando P_{34}:

$$U_5 \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{5} & \frac{36}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6. Y, finalmente, se elimina el término $-11/5$ utilizando $L_{34}(-11/26)$:

$$U_6 \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{5} & \frac{36}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix}.$$

Así pues, se puede transformar el sistema original en

$$U_6 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{5} & \frac{36}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix},$$

que es triangular superior, con la siguiente secuencia de matrices:

$$U_6 = L_{34}(-11/26)P_{34}L_{24}(-4/5)L_{23}(-4/5)P_{23}L_{13}(1/2)L_{12}(-1/2)P_{12}A.$$

Para construir L, hay que utilizar los multiplicadores cambiados de signo y hacer los intercambios parciales de filas según indiquen los P_{ij}, sin contar el primero:

1. Se construye la matriz de multiplicadores con el signo cambiado para la primera columna:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Se intercambia *la parte anterior a la columna* 2 según indique el segundo cambio de filas, P_{23} (es decir, filas 2 y 3):

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como se ve, *la diagonal de* 1 *sigue estando ahí.*

3. Se introducen los multiplicadores cambiados de signo en la segunda columna:

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Se intercambia la parte izquierda de las filas correspondientes a la siguiente matriz P, que es P_{34}, es decir, las filas 3 y 4:

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Se termina introduciendo el último multiplicador, cambiado de signo:

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{11}{26} & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, se obtiene que

$$P_{34}P_{23}P_{12}A = L_4U_6,$$

donde es fácil ver que

$$P = P_{34}P_{23}P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$