Apéndice C

Otros ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales

Para mostrar más razones por las que los sistemas de ecuaciones lineales son parte normal del trabajo de un ingeniero, presentamos dos ejemplos más: análisis de tráfico y análisis de estructuras estáticas.

1. Análisis de tráfico

Un barrio de una ciudad puede presentar, esquemáticamente, la estructura de calles que se muestra en la Figura 1. Los números indican

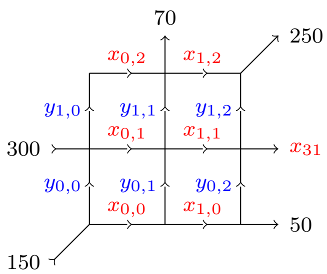

FIGURA 1. Tráfico esquemático de un barrio. Las variables x_{ij} son para el tráfico horizontal y las y_{ij} para el vertical.

el flujo de coches por hora durante la hora punta del mediodía. Se quiere tener una idea del comportamiento del tráfico y de si se puede gestionar de alguna manera para que en algún punto sea más fluido. Las variables x_{ij} indican, como se explica en la figura, el tráfico horizontal por cada calle y las y_{ij} el vertical. Se supone que el sentido de las calles es el que indican las flechas (quizás poco realista), así que cada calle del modelo es de sentido único (si hubiera calles de doble sentido, bastaría añadir un eje en el grafo con una variable más).

Solo hay una ley que regula el flujo de tráfico: la de Kirchoff para nodos: en cada nodo del grafo, el tráfico entrante ha de ser igual al saliente. Por tanto, en el ejemplo, hay 9 requerimientos, cada uno de los cuales impone una condición lineal (una suma igual a otra). En concreto:

$$
\begin{aligned}
150 &= x_{00} + y_{00} \\
300 + y_{00} &= x_{01} + y_{10} \\
y_{10} &= x_{02} \\
x_{00} &= x_{10} + y_{01} \\
x_{01} + y_{01} &= x_{11} + y_{11} \\
x_{02} + y_{11} &= x_{12} + 70 \\
x_{10} &= 50 + y_{02} \\
x_{11} + y_{02} &= x_{31} + y_{12} \\
x_{12} + y_{12} &= 250
\end{aligned}
$$

La matriz aumentada asociada a este sistema en el orden de variables indicado, es:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc|c}
x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{31} & y_{00} & y_{01} & y_{02} & y_{10} & y_{11} & y_{12} &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -150 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 40 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 250
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Incluso para un problema tan simple (piénsese lo complicado que puede ser el tráfico de una ciudad entera), la dimensión del sistema es de 9 ecuaciones y 13 variables. Este sistema resulta ser compatible *indeterminado* pero incluso así, ya da algo de información. Por ejemplo (y este es un mero ejemplo de los muchos análisis que pueden hacerse): las variables y_{12}, x_{00}y x_{11} pueden tomar cualquier valor. Por tanto, *en principio*, cerrar esas tres calles podría seguir permitiendo el flujo de coches que exigen las entradas y salidas impuestas. Sin embargo, si se exige que las tres sean 0 (i.e. se cierran las tres calles al tráfico), resulta que la solución del sistema da $x_{10} = -40, y_{02} = -90$, lo cual significa que *habría que cambiar el sentido de dichas calles* (esto, para un ayuntamiento, es *peccata minuta*, como todos sabemos.

Se observa (como es natural) que la matriz del sistema es muy *dispersa*: la mayor parte de las entradas son 0. Esto es consecuencia de que las ecuaciones modelan un sistema real en que las relaciones son *locales* (i.e. las condiciones en un nodo son independientes de las de los nodos lejanos). Esta propiedad es bastante común en muchas familias de problemas reales.

SE ha indicado ya que este ejemplo es un caso particular de las Leyes de Kirchoff generales (hay una para nodos y otra para ciclos). En el caso del flujo de tráfico, solo aplica la de los nodos. En circuitos eléctricos aplican las dos.

2. Estática de un sistema de fuerzas: un puente

Supongamos que se quiere construir un puente con la estructura de la Figura 2. La distribución de fuerzas es la dada por las variables

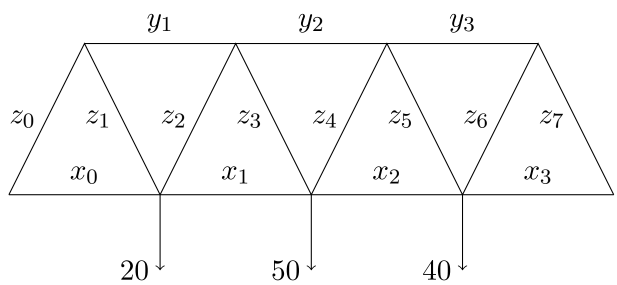

FIGURA 2. Esquema de un puente.

x_i, y_i, z_i y los apoyos se sabe que están sujetos a las fuerzas indicadas (los dos extremos inferiores son fijos e inmóviles). Si se quiere que el sistema sea estático, la suma de fuerzas en cada nodo ha de ser 0 (i.e. los nodos *no se mueven*). Los ángulos se suponen de $\pi/3$ (60 grados). Se quiere saber cuál es la distribución de esfuerzos (un esfuerzo negativo es una compresión, uno positivo es una tensión) en los elementos.

Si el sistema es incompatible, el puente no se puede construir con esas especificaciones. Si el sistema de ecuaciones es compatible *indeterminado*, el sistema (real) se denomina “hiperestático”. Si el sistema de ecuaciones es compatible determinado, el sistema (real) se denomina “isostático”.

Ha de tenerse en cuenta que, en cada nodo, hay que estudiar las componentes horizontal y vertical de las fuerzas. Si los nodos superiores son I_1, I_2, I_3, I_4 y los inferiores (sin contar los extremos) J_1, J_2, J_3, entonces:

1. La estabilidad del nodo I_1 da

$$y_1 - \frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \quad \text{(horizontal)}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}z_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \quad \text{(vertical)}$$

Como hay 7 nodos “efectivos” (los extremos, al estar sujetos al terreno, no añaden ni quitan esfuerzos), en total se obtienen 14 ecuaciones (que no vamos a escribir). Igual que en las de I_1, hay una condición vertical y una horizontal, y cada ecuación (en la estructura de la Figura 2) contiene a lo sumo 3 variables, por lo que el sistema de ecuaciones que se obtiene es también muy disperso (cada fila contiene 14 entradas, de la cuales por lo menos 11 son nulas).

Claramente, cuantos más elementos posee una estructura, mayor es el número de variables y, usualmente, de ecuaciones, con lo que es fácil obtener sistemas de decenas de ecuaciones e incógnitas.

Si, además, hubiera más fuerzas actuando fuera de los nodos, habría que utilizar también el principio de “anulación de momentos” (que no aplica en este ejemplo).