PARAMETRIZACIONES DE CURVAS

P. FORTUNY AYUSO

Nota preliminar[1]: en todo este texto, las preguntas aparecen marcadas entre un par de puntos negros •. Esto es para facilitar al alumno su locaclización, pues todas ellas tienen interés como ejercicios y en cada sección y apartado se indica que se respondan razonadamente, como uno de los propuestos.

1. Parametrizaciones de rectas

Todo el mundo sabe que

$$Y = aX + b$$

es una parametrización de una recta. •¿Por qué dos puntos pasa ?• Por ejemplo, por $(0, b)$ y por $(1, a+b)$. •¿Cuál es la pendiente?• Pues a. Esto significa que el ángulo que forma la recta con el eje OX tiene por tangente el valor a.

Otra manera de escribir la recta es

$$Y = a(X - x_0) + y_0$$

donde a es la misma pendiente y (x_0, y_0) es un punto cualquiera de ella.

Estas dos parametrizaciones tienen un problema, •¿cuál?• Que las rectas verticales no pueden escribirse así:

$$X = c$$

no puede expresarse en ninguna de las dos formas anteriores.

1.1. Ecuaciones paramátricas.

Una recta en el plano es una transformación lineal de "la recta" (que es el conjunto de los números reales) en el plano. El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, se puede "enumerar" con una variable:

$$t \in \mathbb{R}$$

(i.e. t indica cualquier número real) y se sobreentiende que t recorre dicha recta *de izquierda a derecha*. El plano es el conjunto de pares (x, y) de números reales. Una transformación de la recta en el plano se escribe como una colección de puntos en el plano que dependen del parámetro t, es decir $(x(t), y(t))$ (para cada valor de t, un punto del plano). Y dicha transformación es *lineal* si las ecuaciones de $x(t)$ y de $y(t)$ son polinomios en t de grado 1. En fin, que *una recta en el plano siempre puede escribirse de la forma*

$$\begin{aligned} x(t) &= a + bt \\ y(t) &= c + dt \end{aligned} \tag{1}$$

donde a, b, c y d son cuatro números reales cualesquiera. Surgen preguntas naturales: •¿cuál es la pendiente de esta recta?• •¿Dónde corta esta recta al eje OX y al

Fecha: Mayo-junio 2015.

eje OY?• Las rectas verticales •¿pueden escribirse de esta forma?• Las respuestas son:

- La pendiente es $\frac{d}{b}$. Explíquese por qué.
- El corte con el eje OX se calcula haciendo $y = 0$. El corte con el eje OY, haciendo $x = 0$. •¿Qué valores salen?•
- Sí, las rectas verticales tiene siempre ecuación en esta escritura. •¿Cuál es?•

1.1.1. Reparametrizar con la x. Las ecuaciones (1) parecen un poco redundantes, con cuatro valores para una figura que solo depende, como todos sabemos, de dos: la pendiente y el desplazamiento vertical. Es posible cambiar el parámetro para que desaparezcan dos de los valores. En efecto, si llamamos $u = a + bt$, tenemos que u es un número real y podemos, despejando, reescribir (1) como

$$\begin{aligned} x(u) &= u \\ y(u) &= c + \frac{d}{b}(u - a) \end{aligned} \tag{2}$$

Es decir, que *casi* cualquier recta puede escribirse como (2). •¿Cuáles no?•

En esta manera de escribir una recta, •¿cuánto vale la pendiente?• •¿Es sencillo calcular los puntos de corte con los ejes?•

Problema 1. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

1.2. Cambios de parámetros. Podría uno pensar en reescribir la ecuación (1) de otra manera. Por ejemplo, en lugar de usar el parámetro t, uno podría encontrarse con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x(s) &= -3 + 2s^2 \\ y(s) &= 4 + 5s^2 \end{aligned} \tag{3}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ es una variable (parámetro) real. •¿Representa esto una recta?•

La respuesta a la pregunta es: *no*, porque a diferencia de t, los valores que toma s^2 son solo positivos, de manera que en (3), los valores de $x(s)$ son solo los números mayores o iguales que -3 y los de $y(s)$ son solo los números mayores o iguales que 4. Así pues, los puntos representados por (3) son los de la recta

$$\begin{aligned} x(t) &= -3 + 2t \\ y(t) &= 4 + 5t \end{aligned}$$

pero con $x(t) \geqslant -3$ e $y(t) \geqslant 4$: la semirrecta *hacia la derecha* de $(-3, 4)$. •¿Cómo se escribiría la semirrecta hacia la izquierda?•

Esto es para tener claro que un cambio de parámetros puede convertir una curva en *parte de ella*. No puede cambiar la forma pero sí hay que tener cuidado tanto con el dominio de definición de los parámetros como los valores que toman la x y la y en función de él.

•¿Existe alguna diferencia entre la parametrización (3) y la siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= -3 + 2s^2 \\ y(t) &= 4 + 5s^2 \end{aligned}$$

con la condición $s \in [0, \infty]$?•. Sí, la primera "viene y va" y la segunda solo "va." •¿Qué significa esto?•

1.3. Rectas en polares. El plano real $\mathbb{R}^2$ en coordenadas (x, y) puede también representarse con otro par de coordenadas, llamadas habitualmente ρ y θ (pronunciénse "ro" y "ceta"). Cada punto (x, y) puede describirse mediante la pareja de números dada por su módulo, que es la longitud del vector que va del origen a (x, y)) y el ángulo que forma este vector con el semieje positivo de OX. De esta explicación se puede deducir que, *bien entendido lo que se escribe*, es

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned} \tag{4}$$

donde el arcotangente ha de tomarse de manera correcta (si y es negativo, entonces el arco se toma como mayor que π).

En realidad, estamos más acostumbrados a describir las coordenadas polares al revés, poniendo el valor de x e y en función de ρ y θ:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Habitualmente se dice que θ es un ángulo entre 0 y 2π o bien entre $-\pi$ y π, para que haya una biyección entre los pares de números reales (coordenadas cartesianas) y los pares módulo-ángulo (polares). El punto $(x, y) = (0, 0)$, origen de coordenadas cartesianas se suele expresar como $\rho = 0$ y $\theta = 0$, aunque teóricamente cualquier ángulo sería posible.

Veamos ahora cómo puede expresarse una recta en coordenasa polares utilizando un parámetro angular.

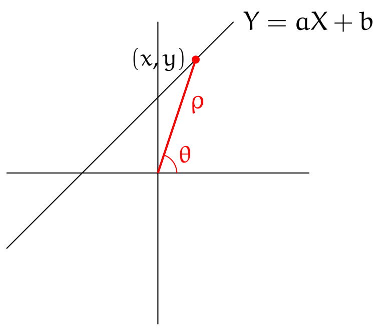


FIGURA 1. Parametrización polar de una recta.

Comenzamos (ver la Figura 1) con la expresión

$$Y = aX + b, \tag{6}$$

que es una recta de pendiente a y desplazamiento vertical b (este es el corte con el eje OY). Un punto (x, y) de ella tendrá por coordenadas polares (ρ, θ). De la definición de θ como arcotangente, se tiene que

$$\frac{y}{x} = \tan\theta,$$

de donde se puede poner

$$x\tan\theta = ax + b,$$

así que, despejando

$$x = \frac{b}{\tan\theta - a}$$

y, utilizando la expresión de y dada por la ecuación inicial de la recta (6), queda la siguiente expresión de x e y en función del ángulo:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{b}{\tan\theta - a} \\ y(\theta) &= \frac{b\tan\theta}{\tan\theta - a} \end{aligned}$$

que es una parametrización. Ahora bien, toda parametrización requiere que se especifique el conjunto en que está definido el parámetro. En este caso hay que ser muy cuidadoso porque es diferente que la recta esté por encima del origen de coordenadas, en cuyo caso la parametrización es para $\theta \in [\arctan(a), \arctan(a) + \pi]$ para el valor positivo menor del arcotangente mientras que si está por debajo, $\theta \in [-\arctan(a) - \pi, -\arctan(a)]$. Si se toma el intervalo anterior en este caso, •¿qué ocurre?•

Para describir la recta en polares, hemos de dar o bien el ángulo en función del radio (cosa que raramente se hace) o bien el radio en función del ángulo, lo habitual. El radio es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, que en este caso da:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{b}{\tan\theta - a}\right)^2 + \left(\frac{b\tan\theta}{\tan\theta - a}\right)^2} = (\dots) = \frac{b}{\sin\theta - a\cos\theta}$$

tomando la parte positiva de la raíz cuadrada. Es decir, la recta (6) puede describirse como

$$\rho = \frac{b}{\sin\theta - a\cos\theta}.$$

La pregunta natural es: dada esta expresión, •¿cómo se calculan los puntos de corte con el eje OX y OY?• Y... •¿qué ocurre con las rectas que pasan por el origen de coordenadas?• •¿Qué pasa sin $\operatorname{sen}\theta = a\cos\theta$?•

Problema 2. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

1.4. Segmentos de recta. Hemos parametrizado rectas y semirrectas. Para describir un segmento de recta, se ha de utilizar la ecuación de la recta y limitar el parámetro al intervalo adecuado.

Póngase por caso que quiere parametrizarse el segmento que va del punto (x_0, y_0) al (x_1, y_1) en este sentido —no es lo mismo un sentido que otro. Una opción es la siguiente: si $d = |x_1 - x_0|$, se utiliza el intevalo $[0, d]$ como conjunto en que varía el parámetro. Ahora solo ha de calcularse la pendiente, que es $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y, dando a s el valor $s = 1$ si $x_1 > x_0$ y $s = -1$ si no, utilizar la siguiente fórmula con el signo adecuado (•¿cuál es este signo?•):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + st \\ y &= y_0 + at \end{aligned} \tag{7}$$

con la condición en el parámetro de que $t \in [0, d]$. Si $x_1 = x_0$ entonces la ecuación es más sencilla:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + st \end{aligned} \tag{8}$$

donde $s = -1$ si $y_1 < y_0$, $s = 1$ si $y_1 > y_0$ y $t \in [0, d]$, con $d = |y_1 - y_0|$, en este caso. •¿Cuál es el signo de t en $y(t)$ si $y_1 < y_0$?•

Si tanto $x_1 = x_0$ como $y_1 = y_0$, entonces no se trata de un segmento sino de un punto y la parametrización es cualquier expresión que sea constante en la x y en la y.

Problema 3. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

1.4.1. Velocidad no uniforme. Téngase en cuenta que las parametrizaciones (7) y (8) son a "velocidad uniforme": si se calcula el vector velocidad, es $\vec{v} = (1, a)$ —o bien $\vec{v} = (0, 1)$ en el segundo caso—, que es constante. Podría requerirse que la velocidad no fuera constante, por cualquier motivo. Esto puede que se explique en otro momento: la idea básica es darse cuenta de que, si $u(t)$ es una función del parámetro t, definido este en un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} x &= x_0 + Au(t) \\ y &= y_0 + Bu(t) \end{aligned} \tag{9}$$

toma valores en la recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente B/A. Con esto claro, debería ser relativamente elemental parametrizar un segmento con una velocidad determinada.

Problema 4. Dar unas ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre el segmento $[0, 1]$ (en el eje OX del plano) cuatro veces: es decir, ir de 0 a 1, volver al 0 y repetir. *Nota*: para este problema y los siguientes, utilizar la función $\operatorname{sen} t$ o $\cos t$.

Problema 5. Igual que el problema 4 pero el intervalo $[5, 9]$ en el eje OY siete veces.

Problema 6. Igual que el problema 4 pero un intervalo $[a, b]$ sobre el eje OX un número n de veces.

Problema 7. Dado el segmento que une los puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$, calcular unas ecuaciones paramétricas de la curva que recorre $\overline{AB}$ un número n de veces.

Problema 8. Igual que el problema 7, pero comenzando la tryectoria en un punto C que pertenezca al intervalo (y se recorre el segmento $2n$ veces de manera que se comienza en C yendo hacia B y se termina en C yendo hacia B).

Para los siguientes ejercicios (los que se refieren a curvas con varios elementos consecutivos) se aconseja leer la sección 7, que explica cómo pueden llevarse a cabo parametrizaciones a trozos.

Problema 9. Dar unas ecuaciones paramétricas del perímetro del cuadrado $ABCD$ con $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 3)$ y $D = (0, 3)$, empezando y terminando en A.

Problema 10. Dar unas ecuaciones paramétricas del perímetro de un cuadrado $ABCD$ donde A y B son arbitrarios.

Problema 11. Dar unas ecuaciones paramétricas del perímetro de un paralelogramo $ABCD$ donde A, B y C son arbitrarios.

Problema 12. Dar unas ecuaciones paramétricas del perímetro de un *pentágono regular convexo*. Y de la estrella de cinco puntas correspondiente. Utilícese el pentágono que se desee.

2. CIRCUNFERENCIAS

La ecuación implícita de una circunferencia que tiene centro en (x_0, y_0) y radio r es

$$C \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{10}$$

que es la manera "matemática" de decir que una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de uno dado —la ecuación (10) no significa más que "los puntos (x, y) cuya distancia al cuadrado respecto de (x_0, y_0) es r^2", que es justamente lo dicho antes.

Por definición de las funciones trigonométricas, tal conjunto puede describirse con las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\theta \\ y &= y_0 + r\sin\theta \end{aligned} \tag{11}$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$. Insistimos en que esto no es más que *la definición de las funciones* sin *y* cos. Lo importante es el intervalo $[0, 2\pi]$ para limitar la parametrización: si se toma otro intervalo $[0, \alpha]$ con $\alpha < 2\pi$, entonces solo se parametriza el arco de amplitud α y si $\alpha > 2\pi$ entonces se da más de una vuelta a la circunferencia.

Está claro que si el ángulo de inicio es otro, basta con que el intervalo sea de longitud 2π para cubrir la circunferencia entera pero se estará "dibujando" desde un lugar inicial diferente. Por ejemplo, si se toma $t \in [-\pi/2, 3\pi/2]$, entonces se comienza en el el "polo sur", mientras que si se toma $t \in [pi/3, 5\pi/3]$, se comienza en un ángulo de "60 grados."

La parametrización (11) va en sentido antihorario. •¿Qué ha de hacerse para recorrer la curva en sentido horario?•

Problema 13. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

2.1. Más de una vuelta y ángulos arbitrarios. Es elemental, tras las consideraciones anteriores, darse cuenta de que si el ángulo varía con $\theta \in [0, 4\pi]$, la circunferencia se recorre dos veces. Como conjunto imagen, es la misma circunferencia pero no como trayectoria: en la vida real, no es lo mismo hacer el Tour de Francia una vez que dos.

Con esta perspectiva, es natural plantear la parametrización utilizando ángulos con límites arbitrarios para el valor del ángulo: solo hay que entender que no se está describiendo el conjunto de los puntos de la circunferencia sino la trayectoria ideal de un cuerpo que da vueltas en círculo. En este caso, es común usar como parámetro t ó s en lugar de θ y, de hecho, es lo que haremos casi siempre.

2.2. Distintas velocidades. La manera de recorrer la circunferencia dada en (11) tiene la propiedad de que la velocidad angular es constante —no lo es el vector velocidad, •¿por qué?• En concreto, esta es 1 en las unidades adecuadas (podría decirse "un hercio"). Si se quiere recorrer a diferente velocidad, basta con tener una aplicación f diferenciable de un intervalo $[a, b]$ en $[0, 2\pi]$ con $f(a) = 0$, $f(b) = 2\pi$. Entonces

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + r \cos f(t) \\
y &= y_0 + r \sin f(t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

recorre la circunferencia (10) con una velocidad que depende de f. •¿Cómo se calcula?•

Problema 14. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

2.3. Circunferencias en polares. Parece que, por definición, una circunferencia debería describirse fácilmente en coordenadas polares —al fin y al cabo, estas son las que describes círculos concéntricos centrados en el origen de coordenadas. Para tales circunferencias, la parametrización es sencilla:

$$
\begin{aligned}
\rho &= r \\
\theta &= t
\end{aligned}
\tag{13}
$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Esto es la circunferencia de radio r centrada en el origen de coordenadas, con radio r, recorrida en sentido horario comenzando en $(r, 0)$ —el Este. Si se quiere recorrer en sentido antihorario,

$$
\begin{aligned}
\rho &= r \\
\theta &= -t
\end{aligned}
\tag{14}
$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Las mismas consideraciones que arriba se aplican a este caso sobre el intervalo de definición de t, el punto cardinal de comienzo, etc.

Pero así solo se describen las circunferencias centradas en el origen. •¿Qué ocurre con el resto, que son la mayoría?•

2.3.1. *Es complicado.* Para expresar la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r en coordenadas polares, puede comenzarse con la ecuación implícita, que es la (10):

$$C \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

y expresar el radio vector (la distancia al origen) de cada punto en función del ángulo que forma este con el semieje positivo de OX. Siendo

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta$$

tras sustituir estas expresiones en la ecuación implícita y despejar ρ en función de θ, queda una expresión bastante complicada:

$$\rho = (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) \pm \sqrt{(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)^2 - (x_0^2 + y_0^2 - r^2)}$$

y que tiene dos, una o ninguna soluciones por cada posible ángulo, dependiendo de si el discriminante es positivo, cero o negativo. Esto, claramente, no es una expresión muy satisfactoria. Ahora bien, si denominamos

$$u = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta,$$

la expresión queda más sencilla:

$$\rho = u \pm \sqrt{u^2 - 2(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}.$$

Aunque esto no es más que una manera simplificada de escribir una expresión compleja. Pero de esta escritura se deduce fácilmente lo siguiente: si $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, entonces $\rho = 2u$ (o $\rho = 0$, pero esto último "no dice nada interesante"): si el origen de coordenadas está en la circunferencia, entonces la ecuación es bastante simple.

2.3.2. *Circunferencias por el origen.* Una circunferencia que pasa por el origen se puede parametrizar muy fácilmente en polares: si el centro está en (x_0, y_0), entonces una parametrización puede ser:

$$\rho = 2(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta). \tag{15}$$

Pero, puesto que (x_0, y_0) dista r del origen, se corresponderá con un ángulo α y serán $x_0 = r \cos \alpha$, $y_0 = r \sin \alpha$, de donde

$$\rho = 2r(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta),$$

y, recordando las fórmulas trigonométricas elementales, queda

$$\rho = 2r \cos(\theta - \alpha), \tag{16}$$

que no deja de ser una ecuación sencillita para una circunferencia que pasa por el origen y cuyo centro forma un ángulo α con el semieje positivo OX.

Ha de tenerse cuidado, como siempre, con el conjunto de definición del ángulo, que no es $[0, 2\pi]$, sino $[\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2]$. Así, para una circunferencia de radio 1 y centro $(1, 0)$, se tiene la parametrización

$$\rho = 2 \cos \theta,\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

y para una con centro en $(\sqrt{3}, 1)$, que corresponde a un ángulo $\pi/6$ (60°), se tiene

$$\rho = 4 \cos(\theta - \pi/6),\ \theta \in [-\pi/2 + \pi/6, \pi/2 + \pi/6].$$

Problema 15. Dar unas ecuaciones paramétricas de la elipse con centro $(0, 0)$ y ejes $(3, 0)$ y $(0, 2)$. Dar también unas ecuaciones polares.

Problema 16. Dar unas ecuaciones paramétricas de la elipse con centro (x_0, y_0) y ejes de longitud a y b, uno horizontal y otro vertical.

Problema 17. Dar unas ecuaciones paramétricas de la elipse con centro (x_0, y_0) y ejes (a, b) y (c, d) (es decir, con vértices en $(x_0 + a, y_0 + b)$ y $(x_0 + c, y_0 + d)$). Téngase en cuenta que (a, b) y (c, d) son dos vectores perpendiculares.

Problema 18. Dar unas ecuaciones paramétricas de la elipse con centro (x_0, y_0) y ejes de longitud a y b, girada α radianes en sentido antihorario.

Problema 19. Dar unas ecuaciones paramétricas del arco de la elipse del problema 18 pero solo dando media vuelta, no la vuelta entera.

Problema 20. Si O es el centro de la elipse del ejercicio 18, A es el primer vértice y B el segundo, dar unas ecuaciones paramátricas del polígono curvo $\overline{OABO}$, donde $\overline{OA}$ y $\overline{BO}$ son segmentos rectilíneos.

3. Pétalos y Corazones

La fórmula (16) va a abrirnos puertas insospechadas hacia la felicidad. Como α solo sirve para girar la gráfica, nos fijaremos en la expresión

$$\rho = 2r\cos\theta,\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]. \tag{17}$$

que describe una circunferencia de radio r centrada en $(r, 0)$. El conjunto de definición de θ se debe a que el coseno es negativo para ángulos entre $\pi/2$ y π, y el radio vector ρ ha de ser siempre positivo[2].

3.1. Pétalos. Para no aumentar innecesariamente el número de parámetros, fijemos $r = 1$ de ahora en adelante, en esta sección. Hecho esto, en lugar de recorrer el intervalo de ángulos a la velocidad unitaria, podemos tratar de hacerlo al doble de velocidad; considerar la curva

$$\rho = 2\cos 2\theta, \tag{18}$$

sin preocuparnos especialmente por el intervalo en que está definido θ ahora mismo (pensemos en $\theta \in \mathbb{R}$ y consideremos solo aquellos valores en que el valor de ρ es mayor o igual que cero). Con algo de cuidado, es fácil comprobar que (18) está definido para $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\theta \in [3\pi/4, 5\pi/4]$ y que para valores más positivos o negativos, la función es periódica. Esto significa que la gráfica que describe está circunscrita entre los ángulos $-\pi/4$ y $\pi/4$ y entre $3\pi/4$ y $5\pi/4$ (y, de hecho, es tangente a las correspondientes semirrectas). En esos ángulos, la ρ es cero y, según θ va de $-\pi/4$ a 0, crece, luego decrece de manera similar al ir θ de 0 a $\pi/4$ y, se ve

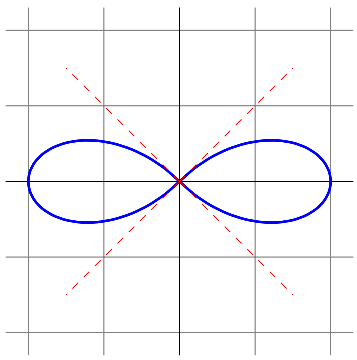


FIGURA 2. Dos pétalos y sus tangencias en el origen. La abertura de cada pétalo es $\pi/2$.

[2]Algunos programas, como `wolframalpha`, aceptan que ρ sea negativo y lo dibujan “con el ángulo opuesto.”

claramente, el dibujo es simétrico respecto del eje OY. Así pues, queda una imagen como la Figura 2.

Y, si en lugar de acelerar el ángulo al doble, lo hacemos cinco veces más (mismo radio 1):

$$\rho = 2\cos 5\theta,$$

sin fijarnos (como antes) en si ρ es negativo, simplemente olvidándonos de la zona de θ en que ρ lo es, obtenemos una imagen como la Figura 3.

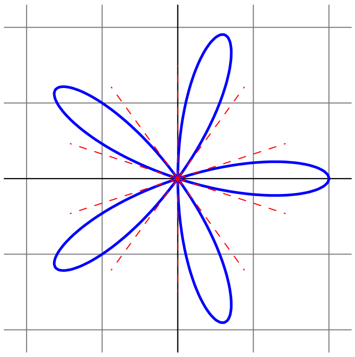


FIGURA 3. Cinco pétalos y sus tangencias en el origen. La abertura de cada pétalo es $\pi/5$.

Una cuestión que el alumno debería resolver fácilmente es: si $\theta \in [-\pi, \pi]$, •¿para qué valores es ρ positivo en la Figura 3?• Para esos valores es para los que hay puntos de cada pétalo, para el resto no.

Igual que en la ecuación (16), puede desfasarse el ángulo, lo queproduce un giro de la figura. Por ejemplo,

$$\rho = 2\cos 3(\theta - \pi/10)$$

produce la Figura 4, que es un trifolium (una curva con tres hojas) girado $\pi/10$.

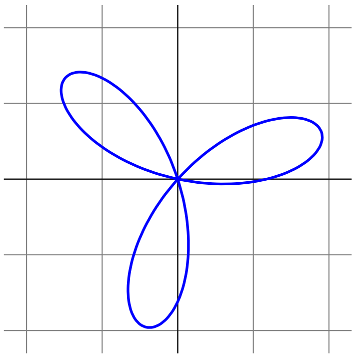


FIGURA 4. Trifolium girado $\pi/10$.

Problema 21. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

3.1.1. Salir del origen. Está claro —o debería estarlo— que el valor del radio r, que en el párrafo anterior hemos fijado como 1, no cambia el aspecto de la figura en absoluto; simplemente la hace más grande o más pequeña: produce lo que técnicamente se denomina una *homotecia*.

Sin embargo, nada impide que aumentemos el radio *sumando* una cierta cantidad, en lugar de restándola:

$$\rho = r_0 + 2\cos n\theta, \tag{19}$$

donde r_0 es una distancia fija.

Lo que produce la constante r_0 de la ecuación (19) es un ensanchamiento y alargamiento de los pétalos hacia el exterior mientras $r_0 \in [0, 2]$, es decir, mientras $2\cos n\theta$ puede llegar a valer 0. Según r_0 se acerca a 1, los pétalos van siendo más alargados y sus lados van haciéndose más tangentes, hasta que cuando $r_0 = 2$, todos los lados son tangentes.

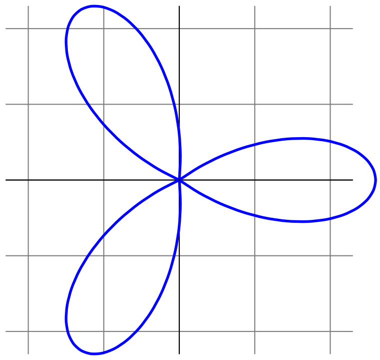


FIGURA 5. Tres pétalos con $r_0 = 0.6$. Son más largos y —aunque se aprecie poco en la figura— más anchos, de modo que ya no tienen abertura $\pi/6$.

Sería interesante que el alumno calculara la abertura y longitud de los pétalos de la Figura 5, en la que se ha utilizado $r_0 = 0.6$.

En el momento en que $r_0 > 2$, se produce la ruptura de la singularidad en el origen y la curva se transforma en una trayectoria suave, que está definida para todos los valores de $\theta \in [-\pi, \pi]$ y que va pareciéndose más a una estrella que a una margarita, como en la Figura 6.

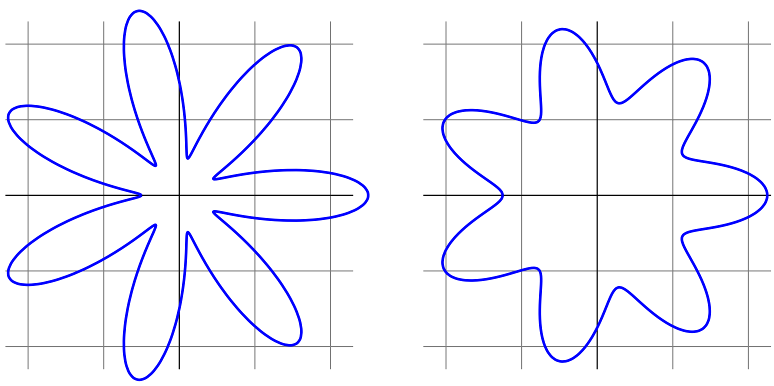


FIGURA 6. Paso de margarita a estrella: $r_0 = 1.5$ a la izquierda y $r_0 = 3.5$ a la derecha —esta disminuida de tamaño. En ambos casos $n = 7$, claro.

•¿Qué ocurre cuando r_0 se va haciendo muy grande?• •¿Es el comportamiento el mismo si n es par o impar?• •¿Cuál es la diferencia, si la hay?•

Problema 22. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

Problema 23. Dibujar diferentes ejemplos de curvas en polares de la forma

$$\rho = r_0 + \cos n\theta$$

para diferentes valores de r_0 y n.

Problema 24. Calcular el ángulo de apertura de los pétalos de la Figura 5. Calcular también la longitud (del centro al vértice) de dichos pétalos.

Problema 25. Dada la curva

$$\rho = r_0 + \cos n\theta$$

con $r_0 < 1$, calcúlese el ángulo de apertura de los pétalos y su longitud.

Problema 26. Dibujar unas cuantas gráficas de curvas del tipo

$$\rho = \cos \frac{p}{q}\theta$$

para distintos valores de p y q, enteros positivos. Explicar qué ocurre: ¿para qué valores de θ es positivo ρ? ¿Es periódica la función ρ? Si lo es, ¿cuál es el periodo? Téngase en cuenta que la respuesta a estas preguntas depende de p, q y de su relación.

Problema 27. ¿Cuál es la diferencia entre las curvas trazadas por las siguientes ecuaciones?

$$\rho = \cos n\theta, \quad \rho = \operatorname{sen} n\theta$$

(para n fijo).

3.2. Corazones. Hay un caso especialmente interesante desde el punto de vista histórico y geométrico, el de $n = 1$ y $r_0 = 2$. En este caso, la curva obtenida tiene forma de corazón y se denomina, clásicamente, *cardioide*, que literalmente significa "como un corazón." La mostramos en la Figura 7.

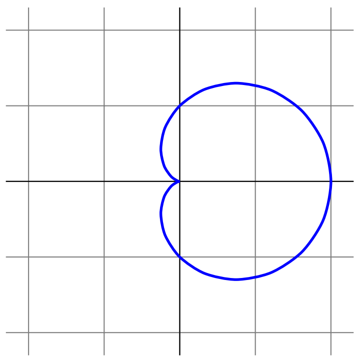


FIGURA 7. La cardioide: $r_0 = 2$ y $n = 1$.

La cardioide, en realidad, no solo es interesante por su forma especial, sino que tiene una interpretación mecánica importante: es la curva trazada por un punto de una circunferencia de radio 1 que gira sobre la circunferencia de radio 1 de centro $(1, 0)$.

Esta curva, por ser generada de la manera descrita, llámase también *epicicloide*, de "círculo que rodea", que describe el proceso de su elaboración. Esta es una de las primeras curvas que dan la idea para construir un *espirógrafo*, juguete que el lector debería conocer o, al menos, tratar de hacerlo. Lo describimos en la siguiente sección.

Problema 28. Dibujar varias curvas de la forma

$$\rho = 1 + \cos n\theta$$

para distintos valores de n y tratar de explicar qué ocurre. Calcular la apertura de los pétalos y para qué valores de θ está definido (es positivo) ρ.

Problema 29. Dibujar varias curvas de la forma

$$\rho = 1 + \cos \frac{p}{q}\theta$$

y tratar de explicar qué tipo de gráfica se obtiene. Utilizar intervalos de definición de θ mayores que $[0, 2\pi]$ y tratar de explicar si ρ es periódica y cuál es su periodo (y cual es la anchura necesaria del intervalo de definición de θ para que la curva sea cerrada).

4. Espirógrafos

El ejemplo de la cardioide, lleva a pensar en otras posibles curvas fácilmente dibujables utilizando un artilugio mecánico. En lugar de girar un círculo por el exterior, puede fácilmente realizarse la operación por el interior, utilizando discos dentados: un espirógrafo. El elemento básico es una pieza con un círculo hueco en el interior, con muchos dientes, que sirve de "trayectoria de giro" y una colección de discos menores, dentados y con huecos para meter el elemento trazador —lápiz o bolígrafo. Estos discos menores se hacen girar por dentro de la otra pieza y al trazar las curvas aparecen diseños geométricos de gran detalle. Hay una simulación interactiva en Internet[3]

Las ecuaciones de las curvas trazadas por un espirógrafo son más sencillas de describir en paramétricas que en polares, como se verá. Partamos de un círculo de radio 1, para simplificar, dentro del cual se hace rodar uno de radio $r < 1$ y, en el que a una distancia d del centro se coloca la punta de un lápiz. Suponemos que el círculo móvil es *interior* al fijo. Se puede hacer el cálculo con un círculo exterior y esto se deja como un ejercicio para el alumno.

La situación, por tanto, es la de la Figura 10, asumiendo que se comienza el trazo con el punto inicial sobre el eje OX —el punto rojo— en $((1 - r) + a, 0)$, es decir, que dista a del centro de la circunferencia interior.

Tras un giro de amplitud θ, medido en el círculo externo, la longitud recorrida por el punto negro será de θ unidades y por tanto, el ángulo que ha girado tal punto será $-\theta/r$ (que es lo mismo que el punto rojo). Por ello:

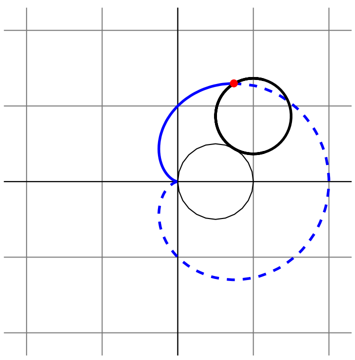


FIGURA 8. La cardioide como epicicloide.

[3]Ver `http://nathanfriend.io/inspirograph/`, en 2015.

- El centro del círculo negro estará en

$$x_0 = (1-r)\cos\theta$$
$$y_0 = (1-r)\sin\theta$$

- Y el punto rojo, que comenzó en $((1-r)+a, 0)$, puesto que está a distancia a del centro (x_0, y_0) y ha girado $-\theta/r$ respecto de dicho centro, estará en

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_0 + a\cos(\tfrac{\theta}{r} - \theta) = (1-r)\cos\theta + a\cos(\tfrac{\theta}{r} - \theta) \\ y(\theta) &= x_0 - a\sin(\tfrac{\theta}{r} - \theta) = (1-r)\sin\theta - a\sin(\tfrac{\theta}{r} - \theta) \end{aligned} \tag{20}$$

ecuaciones que son las paramétricas de la *hipocicloide*, donde el parámetro es θ.

El problema ahora es: si θ comienza valiendo 0, •¿en qué condiciones ocurre que tras un número finito de vueltas el punto rojo vuelve a su estado original y se genera una curva cerrada?• •¿Cuántas vueltas hacen falta en este caso y por qué?•

Otra cuestión interesante es: •¿Cómo son las ecuaciones si el centro no está en el origen?• •¿Y si se quiere girar la figura α grados?•

`http://nathanfriend.io/inspirograph/`

La Figura 11 es una representación del estado de un espirógrafo tras un cierto giro, en la que se indican los parámetros necesarios para calcular las ecuaciones paramétricas asumiendo, como hemos hecho en el texto, que el radio de la circunferencia exterior es 1. La propiedad fundamental es, como se explicó arriba, que *la*

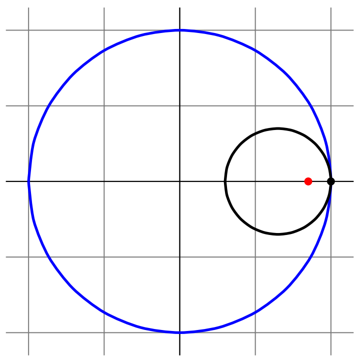


FIGURA 9. Idea de espirógrafo. El círculo exterior tiene radio 1 para simplificar; el interior, r y el punto rojo está en $(1-r+a, 0)$.

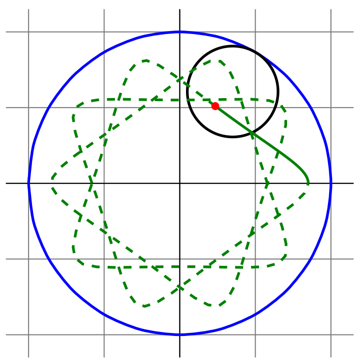


FIGURA 10. Espirógrafo con radio interno $r = 0.3$, desplazamiento del punto trazador $a = 0.15$. El radio exterior (circunferencia azul) es siempre 1.

circunferencia interior gira θ/r *radianes por cada* θ *radianes recorridos en la exterior*. Los trazos negros son, por tanto, de la misma longitud.

Sería interesante que el alumno calculara explícitamente las ecuaciones paramétricas correspondientes cuando la circunferencia exterior tiene un radio R distinto de 1.

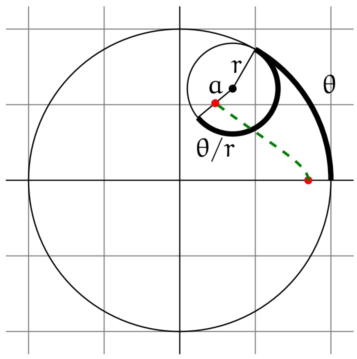


FIGURA 11. Parámetros para calcular la trayectoria del espirógrafo tras un giro de ángulo θ: la circunferencia interna ha girado θ/r, el radio interno es r y la distancia de la punta trazadora al centro del círculo interno es a. Como siempre, se supone que el círculo externo tiene radio 1.

Otro trabajo relevante es estudiar los casos patológicos: $r = 1$, $a = r$, $a = 0$. •¿Qué curvas se trazan en estos casos?•

Problema 30. Contestar a todas las preguntas anteriores razonadamente.

Problema 31. Aunque algo más difícil de manejar, el espirógrafo no está limitado a hipocicloides (giros internos) sino que puede considerarse el caso de epicicloides (giros externos), como la cardioide ya estududiada. Calcúlense las ecuaciones paramétricas para este tipo de espirógrafo (ver Figura 12) y establecer cuáles son los parámetros relevantes y comparar con la ecuación (20).

Problema 32. Dibujar varios espirógrafos para epicicloides cambiando los parámetros relevantes (utilizando las ecuaciones calculadas en 31). Compárense los resultados con los de la página `http://nathanfriend.io/inspirograph`.

4.1. No solo por el interior. Aunque algo más difícil de manejar, el espirógrafo no está limitado a hipocicloides (girso internos) sino que puede considerarse el caso de epicicloides, como la cardioide estudiada arriba. Queda para el alumno el cálculo de las ecuaciones paramétricas —y el establecer cuáles son los parámetros relevantes— y su comparación con las (20).

4.2. Ni solo alrededor de círculos. Otra construcción clásica, que da lugar a la curva llamada simplemente *cicloide*, es hacer girar una circunferencia con un punto trazador sobre una recta. El estudiante debería ser ya capaz de calcular unas ecuaciones paramétricas de este objeto, dados el radio de la circunferencia y la distancia del trazador a su centro.

La cicloide, en el caso en que el trazador está sobre el borde del círculo, tiene otra propiedad interesante, que le otorga el nombre de *curva braquistócrona*: la trayectoria que un cuerpo que solo se mueve por la fuerza de la gravedad ha de seguir para llegar en el menor tiempo posible de un punto a otro que está más abajo es una cicloide. Este problema dio lugar al nacimiento del área de las matemáticas

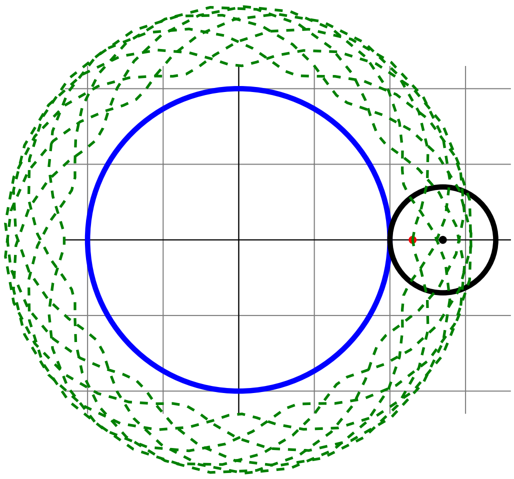


FIGURA 12. Espirógrafo para trazar epicicloides. El punto rojo es el trazador. *Nota*: El círculo exterior no tiene por qué ser de radio menor que el interior.

conocida como Cálculo Variacional y en su primera solución intervinieron personajes como Newton, Leibniz, L'Hôpital... Brachistos, en griego, significa "más corto" y chronos, como se sabe, "tiempo", de ahí la denominación.

Problema 33. Describir, en cada caso (y explicar el motivo por el que ocurre) qué pasa si en un espirógrafo como el de la Figura 11 con radio igual a 1 se tiene:

- El radio interior es r y $a = r$.
- El radio interior es 1.
- El radio interior es menor que $1/2$ pero $a = 0$.
- El radio interior es $1/2$ y $a = 0$.

5. ESPIRALES

Otra familia de curvas que pueden describirse fácilmente en coordenadas polares son las espirales: entenderemos por espiral cualquier curva que pueda parametrizarse en coordenadas polares como $\rho = f(\theta)$, donde f es o bien una función siempre creciente o bien una función siempre decreciente que no toma valores negativos.

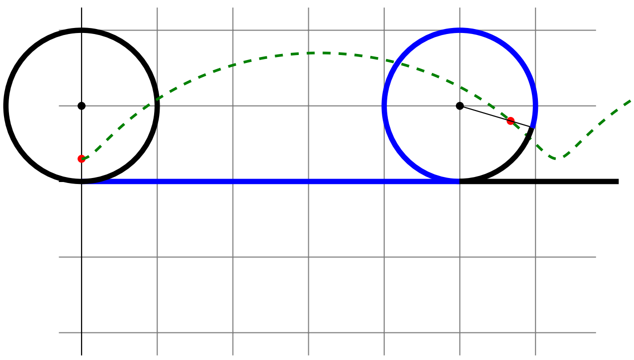


FIGURA 13. Cicloide, generada al girar un círculo sobre una recta.

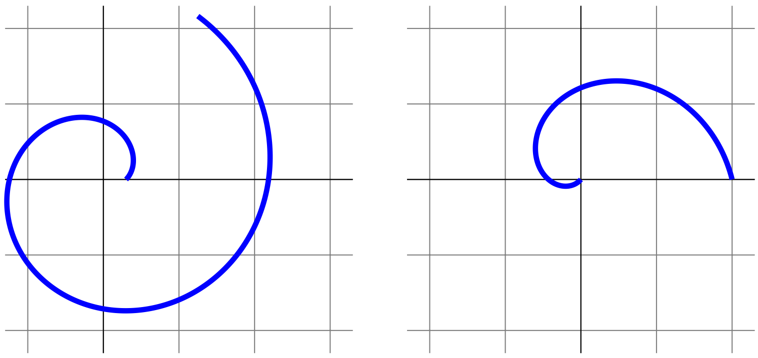


FIGURA 14. Espirales de Arquímedes: a la izquierda, $\rho = 0.3 + 0.3\theta$ para $\theta \in [0, 7\pi/3]$; a la derecha, $\rho = 2 - 0{,}5 * \theta$, definida para $\theta \in [0, 4]$.

5.1. Espiral de Arquímedes. La espiral más simple, por tanto, es

$$\rho = \theta, \tag{21}$$

donde $\theta \in [0, \infty]$ varía en la semirrecta real positiva. Esta se llama *Espiral de Arquímedes*, aunque en realidad se llama así a cualquier espiral del tipo

$$\rho = a + b\theta, \tag{22}$$

donde a, b son números reales. No nos preocupamos en esta expresión del ámbito de definición de θ y lo dejamos en manos del alumno.

Por supuesto, unas ecuaciones paramétricas para la espiral de Arquímedes son

$$x(t) = (a + bt)\cos t$$
$$y(t) = (a + bt)\sin t$$

donde t varía en el intervalo de variación del ángulo θ —podíamos haber utilizado esta letra como parámetro.

Problema 34. Dibujar varias espirales de Arquímedes con diversos valores de $a > 0$ y b real. Comprobar que las ecuaciones paramétricas y las polares describen la misma curva.

Quiralidad. Vistas desde el origen de coordenadas, las que tienen $b > 0$ son dextrógiras (pensando en que la curva va de dentro hacia afuera) y las de $b < 0$, levógiras. Esto es general: una espiral $\rho = f(\theta)$ es dextrógira si $f(\theta)$ es creciente y levógira si $f(\theta)$ es decreciente.

Esta propiedad de las espirales, que consiste en tener la misma estructura pero diferente orientación que su imagen especular, se denomina *quiralidad*. El término se utiliza también con las moléculas que tienen dos versiones diferentes —con una orientación y la contraria—; en este caso se habla de compuestos *isómeros*.

Propiedad fundamental de la espiral de Arquímedes. La espiral de Arquímedes tiene la siguiente característica: cualquier rayo trazado desde el origen (de la espiral) la corta en puntos que están separados por una distancia constante. De aquí que se la denomine también *espiral aritmética*. Esta distancia es $2\pi|b|$, para $\rho = a + b\theta$.

5.2. Espiral logarítmica. En lugar de utilizar una fórmula lineal, puede tomarse una geométrica —o exponencial, que viene a ser lo mismo— para definir una espiral:

$$\rho = ae^{b\theta} \tag{23}$$

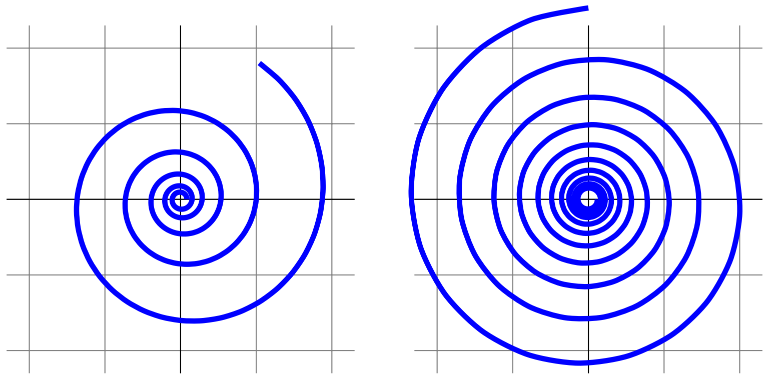


FIGURA 15. Espirales logarítmicas: a la izquierda, $\rho = e^{\theta/10}$ para $\theta \in [-8\pi, 7\pi/3]$; a la derecha, $\rho = 2e^{-\theta/20}$, definida para $\theta \in [-3\pi/2, 18\pi]$. Obsérvese la quiralidad.

con $\theta \in \mathbb{R}$ —ahora el ángulo puede tomar cualquier valor real. Esta curva tiene varias propiedades notables.

Ilimitada. Para empezar, el hecho de que ρ tome valores cada vez más pequeños sin llegar a cero según θ es arbitrariamente grande de signo negativo indica que esta curva nunca pasa por el origen de coordenadas: se acerca a él ilimitadamente.

Quiralidad. Igual que antes, la orientación depende del signo de b: para $b > 0$ la espiral (pensada en "de dentro hacia afuera", igual que antes) es dextrógira y para $b < 0$, levógira.

Autosimilaridad. Jacob Bernouilli, que investigó en profundidad esta curva, la denominó *spira mirabilis*, "espiral maravillosa," por la siguiente característica: si se transforma el plano (x, y) mediante una homotecia de la forma

$$\begin{aligned} x' &= e^{2\pi b} x \\ y' &= e^{2\pi b} y \end{aligned}$$

la figura resultante es exactamente la misma espiral. Esto significa que si se hace "zoom" con ampliación $e^{2\pi b}$, la imagen que se obtiene es la misma.

Aparición en fenómenos naturales. La espiral geométrica se da en la naturaleza con frecuencia, posiblemente debido al desarrollo de dentro hacia afuera de elementos similares: la concha de los nautilus, el romanesco (híbrido de brécol y coliflor), los huracanes y las galaxias espirales tienden a seguir esta curva.

Distancia entre puntos. De manera análoga a la espiral de Arquímedes, la distancia entre puntos de corte consecutivos de la espiral logarítmica con una semirrecta que parte del origen de coordenadas tiene un cociente constante, igual a $e^{2\pi b}$. De aquí el nombre: "logos" es razón, cociente, "arithmos" number, que se entiende como "números en razón", o "cocientes sucesivos." Este nombre le fue dado por J. Bernouilli.

Vector tangente y pendiente. Si se traza el vector tangente en cualquier punto, este forma siempre el mismo ángulo con la semirrecta que une el origen con dicho punto. El complementario de este ángulo (i.e. aquel con el que suma un recto) se denomina *pendiente*, "pitch" en inglés.

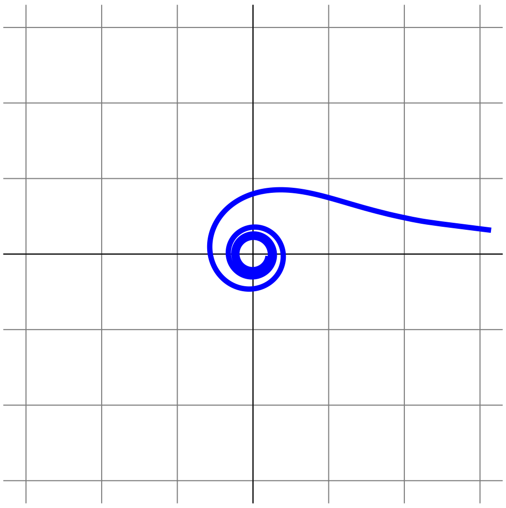


FIGURA 16. Lituus levógiro: $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$. La curva se acerca muy despacio hacia el origen según $\theta \to 0$.

Espiral áurea. Si el factor b cumple que

$$e^{b\frac{\pi}{2}} = \varphi$$

donde φ es la razón áurea (que es más o menos 1.618), entonces la espiral se denomina *áurea*. Esto ocurre, como el alumno puede fácilmente calcular, para $b \simeq 0.306$. Esta espiral está íntimamente relacionada con la sucesión de Fibonacci.

5.3. Lituus. La última espiral que vamos a estudiar se denomina *lituus*; este era una vara de augur (un vidente del futuro) curva que se conoce, entre otras cosas, por grabados en monedas. Su ecuación polar es

$$\rho = \frac{k}{theta^{\frac{1}{2}}}, \tag{24}$$

donde k es una constante positiva y $\theta \in (0, \infty)$.

Quiralidad. Debido a que la función $1/x$ es monótona decreciente, el lituus es levógiro si se considera de dentro hacia afuera. Su equivalente dextrógiro requiere un pequeño arreglo:

$$\rho = \frac{k}{|\theta|^{\frac{1}{2}}} \tag{25}$$

para $\theta \in (-infty, 0)$.

Asíntota. Ambos lituus, el levógiro y el dextrógiro, tienen una asíntota horizontal en $\rho = 0$ —el eje OX, como se desprende de su ecuación.

Problema 35. Dar una ecuación polar y una ecuación paramétrica de una espiral de Arquímedes de paso 3, levógira.

Problema 36. Dar una ecuación paramétrica de una espiral de Arquímedes dextrógira con centro en $(2, 3)$ y paso 7.

Problema 37. Dar una ecuación polar y una paramétrica de una espiral geométrica de paso 2, levógira.

Problema 38. Dar una ecuación paramétrica de una espiral geométrica de paso $1/3$, dextrógira centrada en $(-2, 7)$.

Problema 39. Dar una ecuación polar y una paramétrica de un lituus cuya asíntota sea la semirrecta con origen $(0, 0)$ y ángulo $\pi/6$.

6. Otras curvas notables

Hay unas cuantas curvas clásicas que forman parte del acervo y de las que incluimos algunas a continuación.

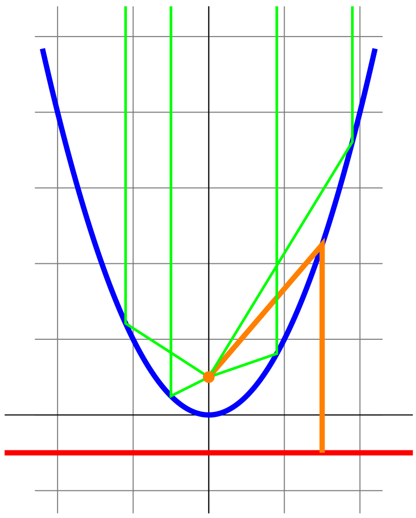


FIGURA 17. Parábola $y = x^2/2$: la línea roja $y = -0{,}5$ es la directriz, el foco está en $(0, 0{,}5)$, los rayos verdes salen del foco y se reflejan hacia arriba. Los dos segmentos naranja miden lo mismo.

6.1. Parábola. La parábola puede definirse como la curva cuyos puntos equidistan de uno dado (foco) y de una recta (directriz). Posee otra característica esencial: si el foco es un punto de luz, todos los rayos que dan en la curva se reflejan en la misma dirección (de hecho, en la dirección perpendicular a la directriz). Esta propiedad es la que lleva a que las antenas que se conectan a satélites sean aparbólicas, ya que la distancia del satélite es tan grande que hace que pueda suponerse que los rayos que llegan de él lo hacen todos en la misma dirección (dado que *las recgtas paralelas se cortan en el infinito*). Un argumento geométrico prueba fácilmente que cualquier parábola puede transformarse mediante una traslación, un giro y un cambio de variables $x' = kx, y' = ly$ en la ecuación

$$y = x^2. \tag{26}$$

La ecuación polar de esta curva puede deducirse fácilmente de su expresión, y queda

$$\rho = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \tag{27}$$

para θ definido en $[0, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi]$, por ejemplo. Téngase en cuenta que el vértice (el punto $(0, 0)$ no queda incluido en la parametrización).

Problema 40. Estudiar cómo sería la ecuación polar de una parábola general pero girada α grados en sentido horario o antihorario. Comprobarlo dibujándola.

Problema 41. Calcular la ecuación polar de la parábola

$$y = x^2 + 1$$

y estudiar la diferencia con (27).

6.2. Hipérbola. La hipérbola puede definirse como el conjunto de puntos con la siguiente propiedad: la diferencia de distancias de sus puntos a otros dos puntos fijos (llamados focos) es constante en valor absoluto. Igual que con la parábola, mediante una traslación, un giro y un cambio de coordenadas $x' = kx, y' = ly$, cualquier hipérbola puede transformarse en

$$y = \frac{1}{x}, \tag{28}$$

que en coordenadas polares se describe

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}}, \tag{29}$$

para θ en $(0, \pi/2)$ y $(\pi, 3\pi/2)$.

La hipérbola es la "inversa" de una circunferencia, pero no vamos a explicar lo que significa esto.

Problema 42. Estudiar cómo sería la ecuación polar de una hipérbola como (28) pero girada α radianes en sentido horario o antihorario. Comprobarlo dibujándola.

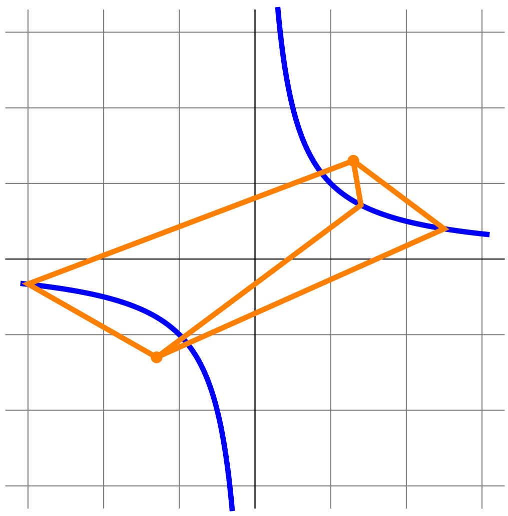


FIGURA 18. Hipérbola $y = 1/x$: los focos están marcados en rojo. La diferencia de longitudes de pares de segmentos naranja es constante.

7. PARAMETRIZACIONES A TROZOS

Es frecuente que una curva esté formada por una sucesión de elementos pertenecientes a diferentes trayectorias fácilmente parametrizables. Por ejemplo: un segmento de recta seguido de un arco de circunferencia seguido de otro segmento de recta. La parametrización completa de esta curva suele realizarse "a trozos", partiendo de un segmento y dividiéndolo en partes, una para cada elemento. Cada subsegmento se utiliza para parametrizar la unidad de curva correspondiente.

Ejemplo: para dar una ecuación paramétrica del segmento que une el punto $(-1,1)$ con el origen de coordenadas, seguido por el arco de parábola $y = x^2$ hasta $(2,4)$, seguido por el segmento recto que va de este punto a $[5,8]$, se puede proceder así (o de muchas otras maneras):

- El segmento de $(-1,1)$ a $(0,0)$ puede parametrizarse como $x(t) = -1 + t, y(t) = 1 - t$ con $t \in [0,1]$.
- A continuación, el arco de parábola de $(0,0)$ a $(2,4)$ puede describirse como $x(t) = t, y(t) = t^2$, con $t \in [0,2]$. Pero como desea utilizarse una parametrización "que siga a la anterior", ha de correrse el intervalo, poniendo $t \in [1,3]$ y *restarse al parámetro lo que se ha corrido*. Por tanto, queda $x(t) = t-1, y(t) = (t-1)^2$ para $t \in [1,3]$.
- Finalmente, la recta que va de $(2,4)$ a $(5,8)$ puede describirse como $x(t) = 2+t$, $y(t) = 5+3/2t$ para $t \in [0,2]$. Pero como se quiere empezar en $t = 3$, ha de correrse el intervalo y descorrerse el parámetro: $x(t) = 2+(t-3), y(t) = 5+3/2(t-3)$, con $t \in [3,5]$.

Es decir, se puede parametrizar la curva así:

$$(x(t), y(t)) = \left\{ \begin{array}{ll} (-1+t, t) & \text{si } t \in [0,1] \\ (t-1, (t-1)^2) & \text{si } t \in [1,3] \\ (2+(t-3), 5+3/2(t-3)) & \text{si } t \in [3,5] \end{array} \right\} \text{ con } t \in [0,5].$$

Como se ve, en cada subintervalo $[a,b]$ se ha utilizado la "variable" $t-a$ para que todo quede referido a 0, que es desde donde es más fácil calcular parametrizaciones.

Problema 43. Dar una ecuación paramétrica de una curva con las siguientes propiedades: un pétalo de apertura $\pi/6$ puesto en horizontal hacia la derecha seguido de uno de apertura $\pi/10$ en vertical hacia arriba, seguido de uno de apertura $\pi/6$ en horizontal hacia la izquierda, seguido de uno de apertura $\pi/12$ en vertical hacia abajo.

Problema 44. Dar una ecuación paramétrica de la siguiente curva:

- Comienza por un segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(2,3)$.
- Sigue con un arco de circunferencia de centro $(2,4)$, radio 1, que comienza en $(2,3)$ y llega hasta $(2,5)$.
- Sigue con un segmento que va desde $(2,5)$ hasta $(0,5)$.
- Termina con un arco de cicloide que une $(0,5)$ con $(0,0)$ y que tiene un vértice en $(0,5)$ y otro en $(0,0)$ y no más.

El último arco requiere estudiar la ecuación de la cicloide y cómo puede calularse el radio de la circunferencia que gira para que la curva tenga las propiedades que se piden.

8. ANEXO: GIROS

En ocasiones se plantea el problema de parametrizar una curva en una posición "girada" respecto de la usual. El ejemplo más sencillo no evidente es el de parametrizar, por ejemplo, una elipse centrada en un punto (x_0, y_0), con ejes de longitud a y b pero girada un ángulo α. Es decir, una curva como la de la Figura 19.

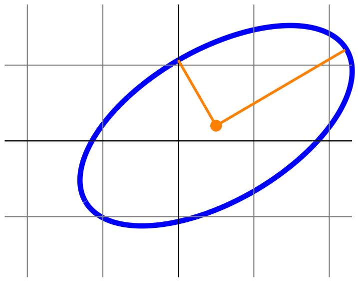
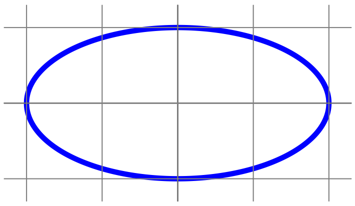


FIGURA 19. Elipse de radios 2 y 1 girada $\pi/6$ centrada en $(0{,}5, 0{,}2)$.

Para obtener una parametrización de esta curva, un modo de proceder adecuado es partir del problema conocido, "sin girar" y centrado en el origen de coordenadas; en este caso, una elipse de radios 2 y 1 (con el radio mayor, por ejemplo, sobre el eje OX). La figura 20 muestra tanto el dibujo como su parametrización.



$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2\cos t \\ v = \operatorname{sen} t \end{array} \right., t \in [0, 2\pi]$$

FIGURA 20. Elipse de radios 2 y 1 centrada en el origen de coordenadas y una parametrización. Utilizamos coordenadas (u, v) para distinguirla de la original.

Se trata de rotar esta figura (y trasladarla a $(0{,}5, 0{,}2)$, pero esto es muy sencillo). Se han utilizado coordenadas (u, v) para distinguir el plano en que se sabe trabajar del plano destino.

Una rotación plana de ángulo α con centro el origen de coordenadas toma un punto general (u, v) y lo lleva a otro (x, y) que tiene el mismo módulo pero argumento el original más α. La figura 21 muestra esto explícitamente.

El esquema de la figura 21 muestra el giro del punto (u, v) al (x, y): puesto que es un giro, el vector director de ambos puntos tiene el mismo módulo, ρ. Si (u, v), el punto original, tiene argument θ, entonces (x, y) tiene argumento $\theta + \alpha$.

$$x = \rho\cos(\theta + \alpha),\ y = \rho\operatorname{sen}(\theta + \alpha),$$

y utilizando las fórmulas trigonométricas para la suma de ángulos, se obtiene.

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\alpha - \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \rho\cos\theta\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

Ahora bien, se partía de que $u = \rho\cos\theta$ y $v = \rho\operatorname{sen}\theta$, de donde se deduce:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\alpha - v\operatorname{sen}\alpha \\ y &= v\cos\alpha + u\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

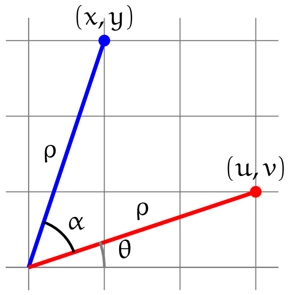


FIGURA 21. El punto (u, v) se transforma en (x, y) por un giro de α radianes. El vector director tiene el mismo módulo.

que puede escribirse abreviadamente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(haciendo explícito el hecho de que un giro es una transformación lineal).

Volviendo al problema de la parametrización, no queda más que sustituir u y v por sus valores respecto del parámetro y trasladar el centro a (x_0, y_0). En nuestro ejemplo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \cos\frac{\pi}{6}(2\cos t) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} t \\ y &= y_0 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}(2\cos t) + \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Esta es una ecuación paramétrica de la elipse pedida.