En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** Una semiesfera sólida de densidad constante (la semiesfera "norte") quiere cortarse por un plano horizontal de manera que el centro de masas de la parte inferior quede a un tercio de su altura. Se pide:

- Calcular a qué altura ha de realizarse el corte.
- Calcular el momento de inercia de la parte inferior respecto del eje de simetría (el que va de Norte a Sur).

Solución. Este problema es más sencillo en cilíndricas que en esféricas. Las coordenadas cilíndricas son

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J(\Phi)| = r.$$

El conjunto es de revolución, así que $\theta \in [0, 2\pi]$, la altura es justamente lo que ha de calcularse, así que, si llamamos h a la tal altura, $z \in [0, h]$. Finalmente, una esfera (que suponemos de radio R) es el conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leq R$, que en cilíndricas se traduce a $r^2 + z^2 \leq R$, así que $r \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$. Necesitamos calcular la masa de este conjunto S (digamos que la densidad es ρ):

$$M = \int_S \rho\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho r\, drdzd\theta = \frac{h(3R^2 - h^2)\pi\rho}{3}.$$

El centro de masas (en la z) es

$$C_z = \frac{1}{M}\int_S z\rho\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z\rho r\, drdzd\theta = \cdots = h\frac{6R^2 - 3h^2}{12R^2 - 4h^2}.$$

Simplemente hay que resolver $C_z = \frac{1}{3}h$, que da $h = \pm\frac{\sqrt{6}R}{\sqrt{5}}$ ó $h = 0$. La única solución *real* posible es $h = 0$ (las no nulas tienen valor absoluto mayor que R, lo cual es absurdo). El ejercicio termina aquí si *si se especifica que* $h = 0$..

En caso de que se deje la h como una variable, el momento de inercia no hay más que calcularlo utilizando su definición:

$$I = \int_S \rho d^2(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho r^2 r\, drdzd\theta =$$
$$= \pi\rho\frac{3h^5 - 10h^3R^2 + 15hR^4}{30}.$$

□

Ejercicio 2 (1.5 puntos por apartado)**.** Una **superficie** metálica se puede describir por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ para } 1 \leq z \leq 2.$$

La densidad es proporcional a la distancia al eje OZ. Se pide:

- Calcular su masa.
- Calcular su densidad media.

Solución. Parametrizamos la superficie, que puede escribirse:

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ para } z \in [1, 2].$$

Si escribimos $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, queda

$$r^2 = z^2$$

que, puesto que $r \geq 0$ y $z > 0$, quiere decir $r = z$. Por tanto, la superficie puede escribirse

$$S \equiv \begin{cases} x = z\cos\theta \\ y = z\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z \in [1,2],\ \rho \in [0,2\pi] \\ z = z \end{cases}$$

(puesto que no hay condición alguna sobre θ). El vector normal es

$$d\vec{S}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1 \\ -z\,\mathrm{sen}\,\theta & z\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-z\cos\theta, -z\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,,$$

cuyo módulo es (fácilmente) $|d\vec{S}| = \sqrt{2}z$.

La masa (si la densidad es $\rho = kr$, proporcional a la distancia al eje OZ) ahora no es más que

$$M = \int_S \rho(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 kz\sqrt{2}z\,dzd\theta = \frac{7}{3}2\sqrt{2}\pi k.$$

La densidad media es la masa dividida entre el área. El área se calcula de modo análogo:

$$A = \int_S dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 1\sqrt{2}z\,dzd\theta = 3\sqrt{2}\pi.$$

Por tanto, la densidad media es: $14k/9$. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** La curva de ecuación

$$\gamma(t) \equiv \begin{cases} x(t) = 3\cos t + 3\,\mathrm{sen}\,t \\ y(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t + 3\cos t \qquad \text{para}\, t \in [0, 6\pi] \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

describe el movimiento de una partícula. Calcular el trabajo que el campo

$$\vec{X} = \left(x^2, y^2 + 1, z^2\right)$$

realiza en esa trayectoria.

Solución. Antes de nada, es elemental comprobar que el campo $\vec{X}$ es un gradiente, pues está definido en todo $\mathbb{R}^3$ y sus parciales cruzadas son iguales (de hecho, son nulas todas ellas). Por tanto, parece lógico tratar de calcular su potencial más que el trabajo en esa curva tan rara (que dará lugar a unas cuentas muy raras). Sea $V(x,y,z)$ el potencial de $\vec{X}$. Definimos $V(0,0,0) = 0$ y ahora

$$V(x,y,z) = \int_\gamma \vec{X}d\vec{\gamma}$$

para cualquier curva γ de $(0,0,0)$ a (x,y,z). Tomando γ_1 la que va de $(0,0,0)$ a $(x,0,0)$, γ_2 de $(x,0,0)$ a $(x,y,0)$ y γ_3 de $(x,y,0)$ a (x,y,z), es sencillo calcular

$$V(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + y + \frac{z^3}{3}.$$

La curva cumple que $\gamma(0) = (3,3,0)$, $\gamma(6\pi) = (3,3,12\pi)$. Por tanto:

$$\int_\gamma \vec{X}d\vec{\gamma} = 9 + 9 + 3 + 12^3\pi^3/3 - (9+9).$$

□

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Calcúlese el flujo del campo $\vec{X} = (x, -y, z)$ sobre la superficie curva de un cilindro centrado en el eje OZ, de radio R con $z \in [0, 2]$.

Solución. El cilindro se puede parametrizar como $x = R\cos\theta, y = R\operatorname{sen}\theta, z = z$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, 2]$. El vector normal es muy sencillo de calcular y da $d\vec{S} = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)$. El flujo es

$$\int_S \vec{X} d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (R\cos\theta, -R\operatorname{sen}\theta, z)\,(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)\ dzd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 R^2 \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\ dzd\theta = 0.$$

Otra manera de resolverlo, sin echar cuentas, es percatarse de que para cada punto en altura z, se anula el flujo en el punto (x, y, z) con el del punto (y, x, z), así que el flujo global ha de ser 0. Pero esto es más difícil de razonar. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Utilizando solo razonamientos geométricos, explicar si el flujo del campo

$$\vec{X} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

sobre la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es positivo, cero o negativo.

Solución. El campo en cuestión (esto se sabe de clase y no hay más que mirarlo) es tangente a las circunferencias centradas en el origen y no es nulo en ningún punto, así que debe ser siempre tangente en el mismo sentido. Visto que en el punto $(1, 0)$ el campo es $(0, 1)$ ("hacia arriba"), ha de tener la misma dirección que las circunferencias antihorarias, como la del enunciado. Por tanto, el trabajo en esa curva debe ser estrictamente positivo. □

En todos los casos, se pide **contestar razonadamente**.

La puntuación **depende del modo de resolución**.

Ejercicio 1 (1.5 puntos por apartado)**.** El volumen limitado por el plano $z = 0$ y la ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ quiere cortarse por un plano horizontal de manera que el volumen de la parte inferior sea igual al de la parte superior.

- Calcúlese a qué altura ha de realizarse el corte.
- Calcúlese el centro de masas de la parte inferior suponiendo que la densidad es constante.

Solución. Este paraboloide se parametriza muy fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas:

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J(\Phi)| = r.$$

La variable z comienza en 0 y termina en el vértice del paraboloide, que es $z = 1$. Como se tiene que $x^2 + y^2 \leq 1 - z$, resulta que $r \in [0, \sqrt{1-z}]$. Finalmente, como la ecuación del paraboloide cambiada de variables es $r^2 + z = 1$, en la que θ no aparece, es $\theta \in [0, 2\pi]$.

Se pide calcular la altura de un corte, que será h, de manera que el volumen de ambas partes sea igual. Es decir, que el volumen de la parte inferior sea la mitad del volumen del casquete de paraboloide $z \in [0, 1]$. Calculemos primero este volumen (llamamos P al este casquete):

$$V(P) = \int_P 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} 1 \cdot r\, drdzd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Así que si h es la altura de corte, ha de ser (llamando S a la parte inferior):

$$V(S) = \int_S 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{1-z}} 1 \cdot r\, drdzd\theta = \frac{\pi}{4}.$$

La integral queda

$$V(S) = \frac{\pi h(2-h)}{2}.$$

Así que hay que resolver la ecuación

$$\frac{\pi h(2-h)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

que da, como única solución posible, $h = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

El centro de masas, puesto que el conjunto es de revolución alrededor del eje OZ *y la densidad es constante*, está en el eje OZ (es decir, $C_x = 0 = C_y$). La masa del sólido, al ser la densidad constante (digamos ρ, es) $\rho\pi/4$. La coordenada C_z es:

$$C_z = \frac{1}{M} \int_S \rho z\, dxdydz = \frac{4}{\rho\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\sqrt{2}/2} \int_0^{\sqrt{1-z}} \rho z r\, drdzd\rho = \frac{(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{2}}.$$

que es positivo y menor que h (de hecho, menor que la mitad de h), lo cual es bastante razonable dada la forma del conjunto. □

Ejercicio 2 (1.5 puntos por apartado)**.** Un cable de acero de densidad constante sigue la ecuación dada (en ciertas unidades) por

$$\rho = \operatorname{sen} 4\theta \text{ para } \theta \in [0, \pi/4].$$

Se pide

- Calcular la masa del cable.
- Calcular el trabajo del campo $\vec{X} = (1, -y)$ en la curva descrita por el cable.

Nota: Antes de hacer cuentas a lo loco: si $A = a\cos x - b\operatorname{sen} x$ y $B = a\operatorname{sen} x + b\cos x$, entonces $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$. Si sale una integral trigonométrica en el primer apartado, déjese indicada.

Solución. Para calcular la masa, hace falta el vector tangente y su módulo. En cartesianas,

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = \operatorname{sen} 4\theta \cos\theta \\ y = \operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

así que el vector tangente es

$$\dot{\gamma} \equiv \begin{cases} \dot{x} = 4\cos 4\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen}\theta \\ \dot{y} = 4\cos 4\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 4\theta \cos\theta \end{cases}$$

cuyo módulo, *utilizando la indicación*, es $|\dot{\gamma}| = \sqrt{16\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$. La masa es, por tanto, si la densidad es μ,

$$M = \int_\gamma \mu\, d\gamma = \mu \int_0^{\pi/4} \sqrt{16\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

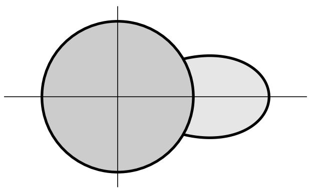
que se deja indicada como dice el enunciado.

El campo es evidentemente cerrado y, al estar definido en todo $\mathbb{R}^2$, es un gradiente. Como la curva es un lazo (comienza y termina en el origen de coordenadas), el trabajo es 0. □

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Una plancha metálica plana está compuesta por un disco centrado en el origen, de radio R, de densidad $d_1\text{g/cm}^2$ y la parte exterior al disco del recinto delimitado por la curva

$$\rho = 2R\cos 2\theta,$$

cuya densidad es $d_2\text{g/cm}^2$ (ver la figura inferior). Calcúlese el momento de inercia del objeto respecto del centro del disco. *Nota:* $\int \cos^4 2t\, dt = \frac{1}{64}(\operatorname{sen} 8t - 8\operatorname{sen} 4t + 24t)$.



Solución. Necesitamos calcular los límites para la θ en la parte exterior. Los puntos de corte corresponden a $\rho = R$, así que

$$R = 2R\cos 2\theta,$$

de donde sale que $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$. Con este dato, el momento de inercia es la suma de los momentos de inercia del disco y de la pieza externa (téngase en cuenta que utilizamos coordenadas polares, cuyo jacobiano es r):

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R d_1 r^2 \cdot r\, dr d\theta + \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_R^{2R\cos 2\theta} d_2 r^2 \cdot r\, dr d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2}R^4 d_1 + \frac{7\sqrt{3}^3 + 20\pi}{48}R^4 d_2,$$

la última integral se calcula fácilmente utilizando la indicación. □

Ejercicio 4 (1 punto)**.** Se sabe que el volumen del tetraedro delimitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$ es $1/6$. Utilizar esta información y el Teorema del Cambio de Variables para calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y con vértices en $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

Solución. Si se realiza el cambio *lineal* de coordenadas

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = a\overline{x} \\ y = b\overline{y} \\ z = c\overline{z} \end{cases}$$

cuyo jacobiano es $|J(\Phi)| = abc$, el plano $x+y+z = 1$ se convierte en el que pasa por los puntos $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ (y los planos coordenados quedan intactos). Así que el volumen del tetraedro T que pasa por esos puntos es

$$V = \int_T 1\, dxdydz = \int_S abc\, d\overline{x}d\overline{y}d\overline{z},$$

donde S es el tetraedro del plano $x + y + z = 1$. Como a, b y c son constantes, el volumen pedido es $abc/6$. □

Ejercicio 5 (1 punto)**.** Calcúlese el flujo del campo $\vec{X} = (-x, -y, -z)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (para $z \in [0, 1]$) utilizando solo razonamientos geométricos.

Solución. La superficie es un cono con vértice en el origen. Esta superficie contiene las rectas que unen cada punto con el origen y el campo de vectores $(-x, -y, -z)$ apunta, para cada punto, en dicha dirección. Así pues, el campo es tangente a la superficie y el flujo es 0. □