Algunos ejercicios de Ampliación de Cálculo

Pedro Fortuny Ayuso
2012-2016
fortunypedro@uniovi.es

23 de junio de 2016

Índice general

Capítulo 1

Integración múltiple

Ejercicio 1. Calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano que pasa por los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ con $a, b, c > 0$.

Solución. El plano que pasa por esos tres puntos tiene por ecuación (compruébese):

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1.$$

Así que el tetraedro del enunciado se puede parametrizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &x \in [0, a] \\ &y \in [0, b(1 - x/a)] \\ &z \in [0, c(1 - y/b - x/c)] \end{aligned}$$

y esta parametrización permite escribir el volumen V como

$$V = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-y/b-x/a)} 1\, dz\, dy\, dx.$$

Por lo tanto,

$$V = \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} c(1 - y/b - x/a)\, dy\, dx,$$

que queda:

$$V = c\int_0^a b(1-x/a) - \frac{y^2}{2b}\bigg|_0^{b(1-x/a)} - \frac{x}{a}b(1-x/a)\,dx$$

es decir,

$$V = c\int_0^a b - \frac{bx}{a} - \frac{b^2(1-x/a)^2}{2b} - \frac{x}{a}b(1-x/a)\,dx$$

que quitando paréntesis da

$$V = c\int_0^a b - \frac{bx}{a} - \frac{b}{2} + \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx}{a} + \frac{bx^2}{a^2}\,dx = bc\int_0^a \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x}{a} + \frac{b}{2}\,dx$$

que, integrando queda

$$bc\left(\frac{a}{6} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \boxed{\frac{abc}{6}},$$

que significa que "el tetraedro formado por las esquinas opuestas de un paralelepípedo ocupa una sexta parte de este." Este resultado es mucho más sencillo de comprobar utilizando cambios de variables (que se verán mucho más adelante).

Ejercicio 2. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z + x^2 + y^2 = 2$.

Solución. Como se ve por la ecuación del paraboloide, es la gráfica de la función $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, así que hay que calcular el corte con el plano $z = 0$ y luego integrar esa función de dos variables en el recinto que se obtenga. Dicho corte es:

$$0 = 2 - x^2 - y^2,$$

es decir, una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

Esta circunferencia puede parametrizarse (por ejemplo) así (basta despejar y en función de x y considerar que los x valores extremos de x son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} x &\in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ y &\in [-\sqrt{2-x^2}, \sqrt{2-x^2}] \end{aligned}$$

de donde el volumen pedido es

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 2 - x^2 - y^2\,dy\,dx,$$

que es

$$V = 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2-x^2}\,dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2\sqrt{2-x^2}\,dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dx$$

que queda, utilizando las integrales trigonométricas clásicas:

$$V = 4\pi - \pi + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}(x^2-2)\sqrt{2-x^2}\,dx$$

que, por la misma razón, da

$$V = 3\pi - \pi = \boxed{\pi}.$$

Ejercicio 3. Plantear la integral de $f(x,y) = xe^{xy}$ en el triángulo $x \in [0,1]$, $y \in [0,x]$ *de dos maneras diferentes*.

Solución. Solo se trata de *plantearlas*, no de calcularlas. Estos ejercicios *siempre* es preferibles hacerlos guiados por un dibujo. En la Figura 1.1 se pueden ver

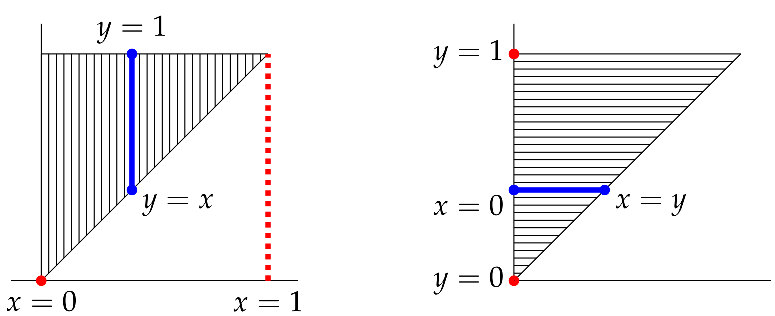

Figura 1.1: A la izquierda, el conjunto parametrizado "en vertical" como $x \in [0,1], y \in [x,1]$; a la derecha "en horizontal" como $y \in [0,1], x \in [0,y]$.

dos parametrizaciones del conjunto. La de la derecha responde a la descripción dada en el enunciado: $x \in [0,1]$ y $y \in [x,1]$. La de la izquierda responde al otro orden de las variables: $y \in [0,1]$ y $x \in [0,y]$. Nótese como *las ecuaciones de la parametrización cambian*. Con estos datos, si I es la integral pedida, se tiene que

$$\boxed{I = \int_0^1 \int_x^1 xe^{xy}\,dy\,dx, \quad I = \int_0^1 \int_0^y xe^{xy}\,dx\,dy}.$$

Ejercicio 4. Plantear la integral de $f(x,y) = e^{xy}$ en el conjunto limitado por $x = 1$, $x = 2$ e $y = e^x$, *de dos maneras diferentes*.

Solución. Como en el ejercicio anterior, se razona mejor con dibujos. En la

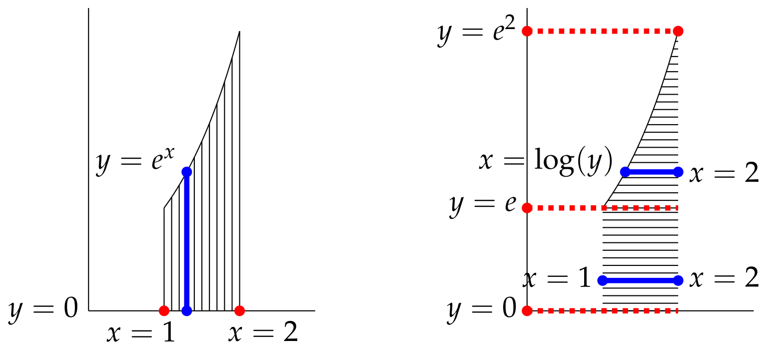

Figura 1.2: A la izquierda, el conjunto del Ejercicio 4 parametrizado "en vertical" y a la derecha "en horizontal."

Figura 1.2 se percibe cómo la parametrización "en vertical" es sencilla:

$$x \in [1,2],\ y \in [0, e^x],$$

mientras que la parametrización "en horizontal" requiere subdividir el conjunto en dos partes: un rectángulo U_1 y una parte con borde curvo, U_2, que pueden describirse así:

$$U_1 \equiv \{y \in [0,e], x \in [1,2]\}\,,\ U_2 \equiv \left\{y \in [e,e^2], x \in [\log(y), 2]\right\}.$$

Así, la integral I puede plantearse, por un lado como

$$\boxed{I = \int_1^2 \int_0^{e^x} e^{xy}\, dy\, dx}$$

y por otro lado como

$$\boxed{I = \int_0^e \int_1^2 e^{xy}\, dx\, dy + \int_e^{e^2} \int_{\log(y)}^2 e^{xy}\, dx\, dy.}$$

Ejercicio 5. Calcular el volumen de un tronco de cono de base circular, eje perpendicular a la base, entre las alturas 0 y h si los radios respectivos son $R_0 > R_h$.

Solución. La manera sencilla de hacer este ejercicio es utilizar coordenadas cilíndricas, pero se supone que aun no se han explicado. Un tronco de cono como el del enunciado se puede ver, en alzado, como Como se ve en la Figura

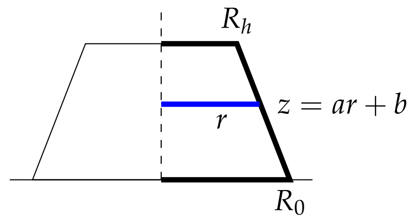

Figura 1.3: Perfil del cono del Ejercicio 5. Se trata de conocer cuál es el radio del círculo a la altura z para cada $z \in [0, h]$. Para ello se ha de calcular la ecuación de la recta $z = ar + b$.

1.3, conviene conocer el radio del círculo de la sección del cono en cada altura z para $z \in [0, h]$. Para ello se calcula la recta que pasa por $(R_0, 0)$ y (R_h, h) (en coordenadas (r, z)):

$$z = \frac{h}{R_h - R_0}(r - R_0) + 0,$$

es decir,

$$z = \frac{h}{R_h - R_0} r - \frac{hR_0}{R_h - R_0}.$$

Ahora se despeja r en función de z:

$$r = \left(z + \frac{hR_0}{R_h - R_0} \right) \frac{R_h - R_0}{h} = \frac{R_h - R_0}{h} z + R_0.$$

Es decir, para cada altura z, el corte en el plano $Z = z$ es un círculo de radio $\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0$. La ecuación de este círculo es

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0 \right)^2$$

que puede parametrizarse como (esto debería ser conocido)

$$\begin{aligned} x &\in \left[-\left(\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0 \right), \left(\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0 \right) \right], \\ y &\in \left[-\sqrt{\left(\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0 \right)^2 - x^2}, \sqrt{\left(\frac{R_h - R_0}{h} z + R_0 \right)^2 - x^2} \right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

por lo que el volumen puede ya calcularse como

$$V = \int_{-y(z,x)}^{y(z,x)} \int_{-x(z)}^{x(z)} \int_0^h 1\, dz\, dx\, dy$$

donde $x(z)$, $y(x,z)$ son las expresiones correspondientes a los límites de la x y de la y de (1.1).

¿No debería ser más sencillo?

Desde luego. Teniendo en cuenta que el eje OZ es perpendicular a las secciones circulares, como sabemos que estas secciones tienen radio $\frac{R_h - R_0}{h} z$, cada sección $S(z)$ tiene un área

$$S(z) = \pi \left(\frac{R_h - R_0}{h} z \right)^2,$$

de manera que el cono tiene volumen

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R_h - R_0}{h} z \right)^2 dz = \pi \left(\frac{R_h - R_0}{h} \right)^2 \int_0^h z\, dz$$

que es

$$V = \boxed{\pi \left(\frac{R_h - R_0}{h} \right)^2 \frac{h^3}{3}},$$

que, si $R_h = 0$ (un cono entero), queda la fórmula clásica del volumen de un cono $V = \pi R^2 h/3$ (un tercio del área de la base por la altura).

Ejercicio 6. Calcular el volumen y el centro de masas de una pirámide cuadrada de lado l y altura h, con densidad constante y simétrica respecto al centro del cuadrado (no oblicua).

Solución. Lo hacemos como en el ejercicio anterior. Para calcular el volumen, basta con saber cuál es el área del cuadrado que queda en la altura z para $z \in [0,h]$. Puesto que la altura es h y el lado a altura $z = 0$ es l, el lado a altura z será

$$l(z) = l - \frac{l}{h} z$$

(esto se ve muy fácilmente como en la Figura 1.3). De aquí se deduce que el volumen es

$$V = \int_0^h \left(l - \frac{l}{h} z \right)^2 dz$$

(la suma de las áreas en cada altura). Esta integral debería ser elemental (cambio de variables $u = l - (l/h)z$):

$$V = \left(\frac{l^2 z^3}{3h^2} - \frac{l^2 z^2}{h} + l^2 z \right) \Bigg|_{z=0}^{z=h} = \frac{hl^2}{3}$$

(un tercio del área de la base por la altura).

Para calcular el centro de masas, primero se calcula la masa. Al ser la densidad constante, esta es

$$M = \rho \frac{hl^2}{3}.$$

Por simplicidad, supondremos que los ejes coordenadas están centrados, así que la figura es simétrica respecto del plano $x = 0$ y del plano $y = 0$, por lo que, *al ser la densidad constante*, el centro de masas (C_x, C_y, C_z), tiene $C_x = 0$ y $C_y = 0$. Calculemos C_z. Por definición,

$$C_z = \frac{1}{M} \int_U z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

donde U es el volumen en que se integra (el sólido). En nuestro caso, la densidad es constante ρ, así que

$$C_z = \frac{3\rho}{\rho h l^2} \int_U z\, dx\, dy\, dz.$$

En cada altura z el conjunto $U \cap Z = z$ es un cuadrado que llamamos T_z y por el Teorema de Fubini:

$$C_z = \frac{3}{hl^2} \int_0^h \left(\int_{T_z} z\, dx\, dy \right) dz$$

(nótese que *dz debe ir la última*). Como z no depende de x ni de y, queda

$$C_z = \frac{3}{hl^2} \int_0^h z \left(\int_{T_z} 1\, dx\, dy \right) dz$$

y la expresión entre paréntesis no es más que el área del cuadrado de lado $l(z)$. Así que

$$C_z = \frac{3}{hl^2} \int_0^h z \left(l - \frac{l}{h} z \right)^2 dz$$

que queda

$$\boxed{C_x = 0,\ C_y = 0,\ C_z = \frac{3}{hl^2} \frac{h^2 l^2}{12} = \frac{h}{4}}.$$

Téngase en cuenta lo siguiente: el valor calculado *parece razonable*, pues está debajo de la mitad de la altura (la masa está concentrada más abajo que la mitad) y tiene las dimensiones adecuadas L.

Ejercicio 7. Se considera un silo con forma de cono invertido, con ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, para $z > 0$. Calcular la altura requerida para almacenar una tonelada de harina (densidad de la harina, $0.5\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$). Calcular la altura requerida para almacenar, en energía potencial, con harina, 1000kJ.

Solución. La sección transversal en el eje OZ del cono a altura z es un círculo $C(z)$ de radio $r(z) = z$ (esto nos servirá después).

La energía potencial de una partícula infinitesimal de harina de densidad 0.5 puesta a una altura z (en coordendas (x, y)) es $E(x, y, z) = gz\,dx\,dy\,dz$. Utilizando $g = 10\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$, la energía total de la harina en el cono, si llega hasta altura h es (por el Teorema de Fubini),

$$E = \int_0^h \int_{C(z)} E(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h \int_{C(z)} 0.5 \cdot 10z\,dx\,dy\,dz$$

que queda

$$E = 5 \int_0^h z \int_{C(z)} 1\,dx\,dy\,dz$$

donde $C(z)$ es el círculo de radio z. De aquí

$$E = 5\pi \int_0^h z \cdot z^2\,dz = \frac{5\pi h^4}{4}.$$

(que tiene unidades de kJ, si h está en metros). Para que E sea 1000kJ, basta con que

$$\boxed{1000 = \frac{5\pi h^4}{4} \Longrightarrow h \simeq 4}.$$

Ejercicio 8. Calcular el área de una elipse sin cambiar de coordenadas.

Solución. Dibujemos una elipse. La Figura 1.4 muestra una manera de parametrizar la elipse de radios a y b centrada en $(0, 0)$ "en vertical", como

$$x \in [-a, a],\ y \in [-b\sqrt{1 - x^2/a^2}, b\sqrt{1 - x^2/a^2}].$$

Por tanto, el área es

$$A = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} 1\,dy\,dx,$$

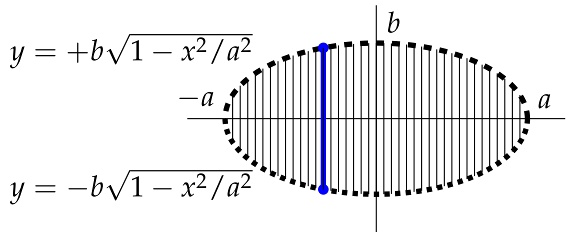

Figura 1.4: Las dos ramas de la elipse de radios a y b centrada en $(0,0)$. Se integrará con $x \in [-a, a]$ e y entre los valores correspondientes.

es decir,

$$A = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

que, utilizando los cambios trigonométricos queda

$$\boxed{A = 2b\frac{\pi}{2}a = \pi ab}.$$

El área de la elipse es π por el producto de los radios.

Ejercicio 9. Calcular la masa de un cubo de lado 1m si la densidad es proporciocional a la altura.

Solución. Un cubo tiene todos los lados iguales. Poniendo la altura en el eje OZ, la integral queda (siendo k la constante de proporcionalidad)

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 kz\, dx\, dy\, dz = k \int_0^1 z\, dz = \boxed{\frac{k}{2}}.$$

Ejercicio 10. En una habitación circular, la temperatura es proporcional a la distancia al cuadrado respecto al centro. Calcular la temperatura media. Explicar cómo está calentada la habitación.

Solución. El enunciado implica que la temperatura en el centro es 0 y cerca de la circunferencia del borde es máxima. Supongamos que el radio de la habitación es R. La distancia de un punto (x,y) al centro es $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, así que la temperatura de un punto, $T(x,y)$ será, para cierta constante k,

$$T(x,y) = k\left(x^2 + y^2\right).$$

La temperatura media es la integral de $T(x,y)$ en el círculo dividida por el área del círculo, que es πR^2. Así que, si $\overline{T}$ es la temperatura media,

$$\overline{T} = \int_C k\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy$$

donde C es el círculo de radio R centrado en el origen. Esta integral puede hacerse, sin cambiar de variables, así:

$$\overline{T} = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} k\left(x^2+y^2\right)\, dy\, dx = \boxed{\frac{R^2}{2}}.$$

(un valor que tiene la forma adecuada, pues es "proporcional a una longitud al cuadrado").

Nota. A partir de ahora se supondrá que se conocen el Teorema del Cambio de Variable y los cambios de variables principales: polares (y las generalizadas), cilíndricas y esféricas (y las generalizadas).

Ejercicio 11. Calcular el momento de inercia de un cilidro circular recto de radio R y altura h respecto a su eje y respecto a un eje tangente a su superficie paralelo al eje del cilindro. Se supone que la densidad es proporcional a la altura.

Solución. Dado un cuerpo X, de densidad $\rho(x,y,z)$, el *momento de inercia de X respecto de un eje E* es:

$$I_E = \int_X \rho(x,y,z) d_E(x,y,z)^2\, dx\, dy\, dz$$

donde $d_E(x,y,z)$ es la distancia del punto al eje (que se mide, como se sabe, en perpendicular a este).

Colocando el eje E_1 del cilindro en el OZ, el momento de inercia respecto de E_1 será, dado que la densidad es proporcional a la altura (es decir, kz):

$$I_{E_1} = \int_X kz\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy\, dz \tag{1.2}$$

pues la distancia de (x,y,z) al eje OZ es $\sqrt{x^2+y^2}$.

El cilindro de radio R y altura h puede parametrizarse como

$$x^2 + y^2 < R^2,\ z \in [0, h].$$

Estas ecuaciones, junto con (1.2), hacen pensar que el cambio a coordenadas cilíndricas debería ser útil. Comprobémoslo:

$$\phi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array} \right\}, \quad |J(\phi)| = r.$$

Y los límites de integración quedan (¿por qué?):

$$\rho \in [0, R],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, h].$$

De donde

$$I_{E_1} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R kzr^2 r\, dr\, d\theta\, dz$$

es decir,

$$\boxed{I_{E_1} = 2\pi k \frac{R^4}{4} \int_0^h z\, dz = \frac{\pi k R^4 h^2}{4}}.$$

Téngase en cuenta que las dimensiones de k son ML^{-4} (para que kz sea una densidad). Las dimensiones del resultado son, por tanto, $ML^{-4}L^4L^2 = ML^2$, las de un momento de inercia.

Para calcular el momento respecto del otro eje (situado sobre la generatriz), dejamos el cilindro en su lugar y colocamos este eje en la recta $X = R$, $Y = 0$. La distancia de (x, y, z) a este eje E_2 es

$$d_{E_2}(x, y, z) = (x - R)^2 + y^2 = x^2 - 2xR + R^2 + y^2.$$

El momento de inercia ahora es

$$I_{E_2} = \int_X kz\left(x^2 + y^2 - 2xR + R^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$

Utilizando el mismo cambio de coordenadas (el conjunto de integración *es el mismo*):

$$I_{E_2} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R kz\left(r^2 - 2Rr\cos\theta + R^2\right) r dr\, d\theta\, dz$$

así que

$$I_{E_2} = I_{E_1} - 2kR \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R zr^2 \cos\theta\, dr\, d\theta\, dz + 2kR^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R zr\, dr\, d\theta\, dz$$

La integral restada es (por Fubini)

$$-2kR \int_0^h z\,dz \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^R r\,dr = 0$$

porque la integral del coseno en un periodo entero es 0. La tercera integral es, por Fubini también

$$4\pi kR^2 \int_0^h z\,dz \int_0^R r\,dr = 4\pi kR^2 \frac{h^2}{2}\frac{R^2}{2} = \pi kh^2R^4.$$

De todo esto:

$$\boxed{I_{E_2} = I_{E_1} + \pi kh^2R^4 = \frac{5}{4}\pi kh^2R^4}.$$

Según el Teorema de Steiner, este momento debería ser

$$I_{E_2} = I_{E_1} + md^2$$

(donde m es la masa del cilindro y d la distancia del eje de simetría al eje). En este caso, la masa es $k\pi R^2h^2$ (¿por qué?) y, justamente, tenemos que

$$I_{E_2}h = I_{E_1} + \left(k\pi R^2h^2\right)R^2,$$

que es la fórmula de Steiner.

Ejercicio 12. Calcular el centro de masas de un cilindro circular recto si la densidad es proporcional a la altura.

Solución. Todos los problemas de centros de masas precisan, *antes de nada* de una reflexión sobre las simetrías del conjunto y de la densidad (ambas).

En este caso, el conjunto es simétrico respecto de los planos $x = 0$ y $y = 0$ (poniendo el cilindro con su eje sobre el eje OZ). Como la densidad también es simétrica (como función) respecto de dichos planos (es decir, si $\rho(x,y,z)$ es dicha densidad, en este caso ocurre que $\rho(-x,y,z) = \rho(x,y,z)$ y que $\rho(x,-y,z) = \rho(x,y,z)$), el centro de masas ha de estar en el plano $x = 0$ (simetría respecto de $x = 0$ del conjunto y en la variable x de la densidad) y en el plano $y = 0$ (simetría del conjunto respecto de dicho plano y de la densidad respecto de la variable y). Así pues, si (C_x, C_y, C_z) es el centro de masas, se tiene que $C_x = 0$ y que $C_y = 0$.

Para calcular C_z primero se requiere calcular la masa:

$$M = \int_X \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h \int_{C(z)} kz\,dx\,dy\,dz$$

donde $C(z)$ es un círculo de radio constante (digamos R), el del cilindro. Se supone que h es la altura del cilindro. La igualdad anterior es, como siempre, consecuencia del Teorema de Fubini. Puesto que $C(z)$ tiene área constante πR^2, queda

$$M = k\pi R^2 \int_0^h z\, dz = \frac{k\pi R^2 h^2}{2}.$$

Ahora, C_z es, por definición

$$\boxed{\begin{aligned} C_z &= \frac{1}{M}\int_X z\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M}\int_0^h \int_{C(z)} zkz\, dx\, dy\, dz = \\ &= \frac{2}{k\pi R^2 h^2}\frac{k\pi R^2 h^3}{3} = \frac{2}{3}h. \end{aligned}}$$

(con $C_x = 0$, $C_y = 0$). Este resultado es razonable porque: tiene las dimensiones adecuadas (longitud) y la masa está concentrada en la parte superior (pues la densidad crece con la altura).

Ejercicio 13. Se tienen dos depósitos: uno cúbico de lado 2m y otro troncocónico con ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, ambos situados a un metro de altura (así que el tronco de cono comienza con un radio de $1m$). Se tiene un metro cúbio de harina de trigo (densidad 0.5g/cm^3). Se quiere saber qué será más fácil: meter la harina en el depósito cúbico o en el cónico.

Solución. Se trata de calcular la energía potencial de la harina *una vez metida* en cada uno de los depósitos. Para una partícula infinitesimal (de volumen $dx\, dy\, dz$) situada en un punto (x,y,z) con $z > 0$ (a una determinada altura), la energía potencial es $E(x,y,z) = 0.5\, dx\, dy\, dz$, así que dado un conjunto X lleno de harina, la energía potencial de esta en tal conjunto es

$$EP = \int_X 0.5\, dx\, dy\, dz.$$

Antes hace falta que saber hasta qué altura llega el metro cúbico en el cubo y en el cono.

En el cubo de lado 2, el volumen hasta una altura h es $V(h) = 4h$. Así que un metro cúbico da $h = 1/4$. Así que el cubo irá desde $h_0 = 1$ hasta $h_1 = 5/4$ (recuérdese que está puesto a un metro de altura).

En el cono es más difícil. El volumen hasta altura h desde 1, es

$$V(h) = \int_1^h A(h)\, dx\, dy\, dz$$

donde $A(h)$ es el área del círculo transversal al eje del cono (el eje OZ en estas coordenadas), por el Teorema de Fubini. El radio de este círculo es z (el cono tiene ecuación $z^2 = x^2 + y^2$), así que

$$V(h) = \int_1^h \pi z^2\, dz = \pi \frac{h^3 - 1}{3}.$$

Como se quiere que $V(h) = 1$, queda

$$1 = \pi \frac{h^3 - 1}{3} \Longrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} + 1} \sim 1.25.$$

Por un lado, la energía en el cubo es:

$$\boxed{E_1 = \int_0^2 \int_0^2 \int_1^{5/4} 0.5z\, dz\, dx\, dy = 0.5625J}.$$

La energía en el cono es:

$$E_2 = \int_1^{1.25} \int_{A(z)} 0.5z\, dx\, dy\, dz$$

donde $A(z)$ es el círculo transversal al eje del cono en la altura z, como arriba (y esto es así por el Teorema de Fubini). Como $A(z) = \pi z^2$, queda

$$\boxed{E_2 = 0.5 \int_1^{1.25} \pi z^3\, dz = 0.566\ldots}$$

que es mayor que E_1. Por tanto, es más fácil meter la harina en el cubo que en el cono.

Otra pregunta intersante es: ¿desde qué momento es más fácil meter la harina en el cono que en el cubo? (es decir, a partir de qué volumen la energía potencial es menor en el cono que en el cubo).

Ejercicio 14. Calcular qué altura tiene que tener un depósito cónico de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ para almacenar la misma masa de mercurio que un depósito cúbico de lado l ($\rho = 13.69\text{g}/\text{cm}^3$). ¿Es este un problema de masas o de volúmenes?

Solución. Está claro que, al ser la densidad constante, la masa no va a depender más que del volumen, por tanto el problema es meramente de volúmenes (se puede olvidar uno de la densidad). Así que solo hay que calcular a qué altura el cono tiene volumen l^3. Dada la ecuación del cono (asumimos que la altura es el eje OZ), su volumen será (por el Teorema de Fubini)

$$V(h) = \int_0^h C(z)\, dx\, dy\, dz$$

donde $C(z)$ es el área del círculo corte del plano $Z = z$ con el cono. Este círculo tiene radio z (pues su ecuación es $z^2 = x^2 + y^2$), por lo que

$$V(h) = \int_0^h \pi z^2\, dz$$

es decir,

$$V(h) = \pi \frac{h^3}{3}.$$

Y, como se trata de que $V(h) = l^3$, por lo que

$$l^3 = \pi \frac{h^3}{3} \Longrightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{3l^3}{\pi}} = l\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sim 0.954l}.$$

Se observa que la altura depende de manera lineal del lado del cubo, lo cual tiene cierto sentido (¿por qué?).

Ejercicio 15. Calcular el trabajo necesario para estirar un muelle 0.5m si su constante de Hooke es 6N/m. ¿Cuánto puede estirarlo como mucho un motor que utilice una batería con 12J almacenados (suponiendo que el motor es *megaperfecto* y supera los límites de la termodinámica).

Solución. La Ley de Hooke dice que un muelle "perfecto" ejerce una fuerza contraria al desplazamiento que es proporcional a este (y la constante de proporcionalidad es la "constante de Hooke" del muelle). El trabajo requerido para estirarlo l será la integral de las fuerzas desde el reposo hasta l, así que

$$\boxed{W(0.5) = \int_0^{0.5} 6x\, dx = \left.\frac{6x^2}{2}\right|_0^{0.5} = \frac{3}{4}J}.$$

Pero en realidad queremos conocer $W(l)$, para resolver la segunda parte:

$$W(l) = \int_0^l 6x\, dx = \frac{6l^2}{2} = 3l^2.$$

Por tanto, con 12J:

$$W(l) = 3l^2 = 12 \Longrightarrow \boxed{l = 2},$$

el muelle puede estirarse 2 metros.

Ejercicio 16. En una cañería recta de sección circular de 2m, se sabe que hay agua fluyendo (en la dirección de la cañería) y que la velocidad del agua es directamente proporcional a la distancia *al borde* de la cañería, que tiene un radio de 3m. Calcular la energía cinética contenida en la cañería cuando está llena de agua fluyendo.

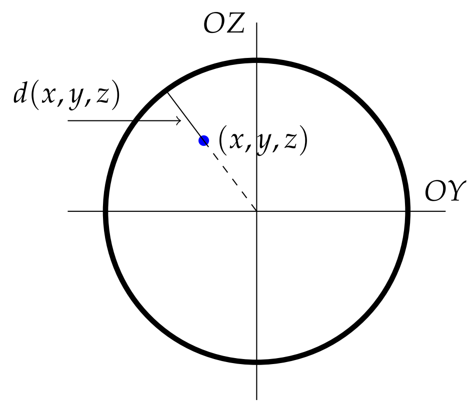

Figura 1.5: Sección de la cañería (colocada con su eje en el eje OX). La distancia $d(x,y,z)$ del punto (x,y,z) a la circunferencia es el radio menos la distancia al origen.

Solución. La energía cinética de una partícula en movimiento depende de su masa y su velocidad. En este problema, la densidad de cada partícula es la misma (todo es agua) y vale $1\text{g}/\text{cm}^3$. Si se coloca la cañería en la dirección del eje OX con el centro sobre dicho eje, la velocidad de la partícula en las coordenadas (x,y,z) será, según el enunciado y el esquema de la Figura 1.5,

$$V(x,y,z) = kd(x,y,z) = k\left(3 - \sqrt{y^2+z^2}\right).$$

Así pues, la energía cinética de dicha partícula será, teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores,

$$E(x,y,z) = \frac{1}{2}k^2\left(3 - \sqrt{y^2+z^2}\right)^2.$$

La energía total será la integral de estas energías en toda la cañería:

$$E = \int_X E(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

donde X denota la cañería. Vista la estructura de X (un cilindro alrededor del eje OX) y la forma de la función $E(x,y,z)$, parece lógico utilizar coordenadas cilíndricas *respecto del eje* OX. Es decir,

$$\phi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right\} \quad J(\phi) = r.$$

Los límites de integración son $r \in [0,3]$, $\theta \in [0,2\pi]$ y $x \in [0,2]$. Por el Teorema del Cambio de Variables, queda

$$E = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{2}k^2(3-r)^2 r\,dx\,d\theta\,dr,$$

que da

$$\boxed{E = \frac{27\pi k^2}{2}\mathrm{J}}.$$

Ejercicio 17. Calcular la temperatura media de una habitación de $2 \times 3 \times 4$ metros cúbicos si la temperatura es inversamente proporcional al valor de la altura más uno y directamente proporcional al cuadrado de la distancia a la una de las esquinas inferiores (la que desee el alumno).

Solución. Situando los ejes de coordenadas en una de las esquinas inferiores, elegimos (lógicamente) esta esquina para medir la distancia (y por ende, la temperatura). En este sistema de coordenadas, por tanto, la expresión de la temperatura será

$$T(x,y,z) = \frac{k_1}{1+z}k_2(x^2+y^2) = K\frac{x^2+y^2}{1+z}.$$

para cierta constante K. Por tanto, la temperatura media será

$$\overline{T} = \frac{1}{V}\int_X T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

donde V es el volumen de la habitación (que es, obviamente, $24\mathrm{m}^3$). Así pues,

$$\boxed{\overline{T} = \frac{1}{24}\int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 K\frac{x^2+y^2}{1+z}\,dx\,dy\,dz = \frac{13}{12}K\log(5)}.$$

(Se aconseja que el alumno realice la integral completa a mano).

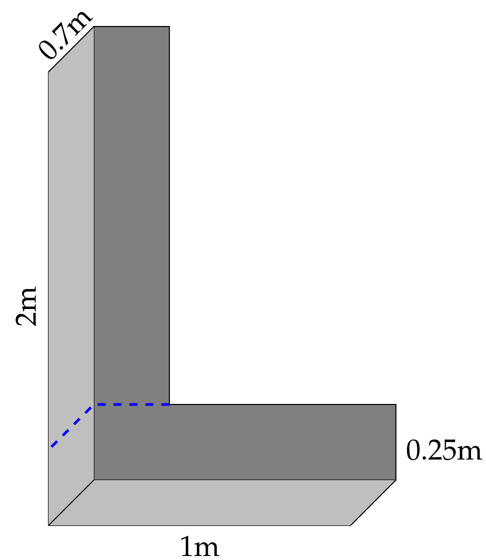

Figura 1.6: Pieza del Ejercicio 18. El trazo azul marca la división en dos conjuntos disjuntos: el “lado horizontal” y el “lado vertical.”

Ejercicio 18. Una pieza en forma de L extruida, con lado menor de 1m, lado mayor 2m, brazos de anchura 0.25 y extrusión de 0.7m tiene densidad constante ρ. Calcular la posición del centro de masas. ¿Depende de ρ? Sin calcularlo, ¿depende el momento de inercia respecto de un eje de la densidad?

Solución. En la Figura 1.6 puede verse un esquema del conjunto.

Para empezar: si la densidad es constante (*y esto es importante*), el centro de masas no depende de ella.

La segunda consideración es también importante para calcular centros de masas de conjuntos cuya parametrización conviene ser dividida: *el centro de masas de los centros de masas es el centro de masas*. Es decir, si dividimos (como es razonable) el conjunto en “el brazo horizontal” y “el brazo vertical” (lo que quede de él), podemos calcular el centro de masas de cada brazo y, después, el centro de masas de estos dos puntos, como si la masa de cada brazo estuviera concentrada en cada uno de ellos.

A partir de aquí, un mero razonamiento geométrico de simetría (porque la densidad es constante) nos dice que el centro de masas del lado horizontal está en el punto $C_1 = (0.5, 0.125, 0.35)$, mientras que el del lado vertical está en $C_2 = (0.125, 1.125, 0.35)$. La masa del lado horizontal es $m_1 = \rho \times 1 \times 0.125 \times 0.7 = 0.175\rho$. La masa del lado vertical es $m_2 = \rho \times 1.75 \times 0.25 \times 0.7 =$

0.30625ρ. La masa total es, así: 0.48125ρ. Por todo ello, el centro de masas tiene coordenadas (C_x, C_y, C_z) con

$$\boxed{\begin{aligned} C_x &= \frac{0.175 \times 0.5 + 0.30625 \times 0.125}{0.48125} \sim 0.26136\ldots \\ C_y &= \frac{0.175 \times 0.125 + 0.30625 \times 1.125}{0.48125} \sim 0.76136\ldots \\ C_z &= 0.125 \end{aligned}}$$

(la coordenada z no requiere ninguna cuenta, ¿por qué?). ¿Es este resultado razonable? ¿por qué?

Ejercicio 19. Un conjunto convexo bidimensional contiene los puntos $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(6, 2)$ y $(7, 0)$. Dar una cota inferior de su área.

Solución. Un conjunto convexo es aquel que contiene todos los puntos de cualquier segmento que se pueda formar uniendo dos puntos del conjunto. En el caso de cuatro puntos, el conjunto convexo más pequeño que los contiene es el cuadrilátero (convexo) que los une. En la Figura 1.7 puede verse cuál es este. Si un polígono convexo contiene esos cuatro puntos, entonces debe

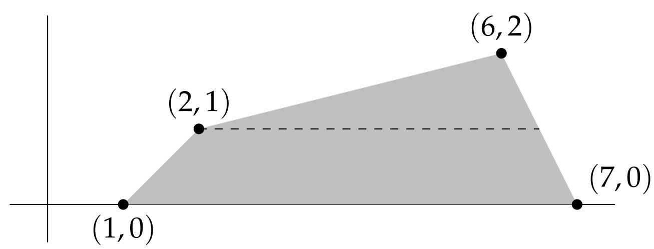

Figura 1.7: Los cuatro puntos del ejercicio 19 y el cuadrilátero convexo que los une. La línea de puntos divide el cuadrilátero en dos polígonos con area sencilla.

contener el polígono que se dibuja en la Figura 1.7, así que el área es al menos la de este polígono.

Este área es sencilla de calcular…El área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura y el área de un triángulo es base por altura. El segmento rayado a altura 1 mide 4.5 (¿por qué?), así que el área del trapecio inferior es 5.25 mientras que el área del triángulo es 2.25. Por tanto, el área mínima de un conjunto convexo que incluya esos puntos es

$$\boxed{A = 7.5}.$$

Ejercicio 20. Un conjunto convexo bidimensional contiene los puntos $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$ y $(4,0)$. Dar una cota inferior de su área. Nótese que hay cotas mejores que otras.

Solución. Basta dibujar los puntos y estudiar cuál es el mayor polígono convexo que puede dibujarse con ellos. Vista la Figura 1.8, está claro que el área

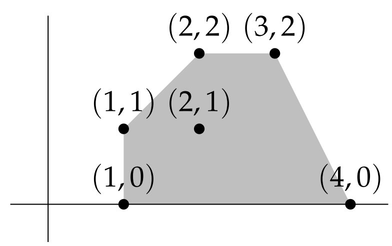

Figura 1.8: Puntos y polígono del Ejercicio 20.

mínima de un conjunto convexo que incluya a esos puntos es el área del polígono de la figura que es (explíquese por qué):

$$\boxed{A = 2.75 + 1.875 = 4.625}.$$

Ejercicio 21 (Piskunov pg. 769)**.** Invertir el orden de integración en las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

Solución. La a) es directa porque los límites de integración no dependen de las variables:

$$\boxed{\int_1^2 \int_3^4 f(x,y)\,dx\,dy = \int_3^4 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy}.$$

Para las tres siguientes, se pueden observar los dibujos de la Figura 1.9. Téngase en cuenta que los extremos han de calcularse a mano, en algunos casos (no vienen dados directamente).

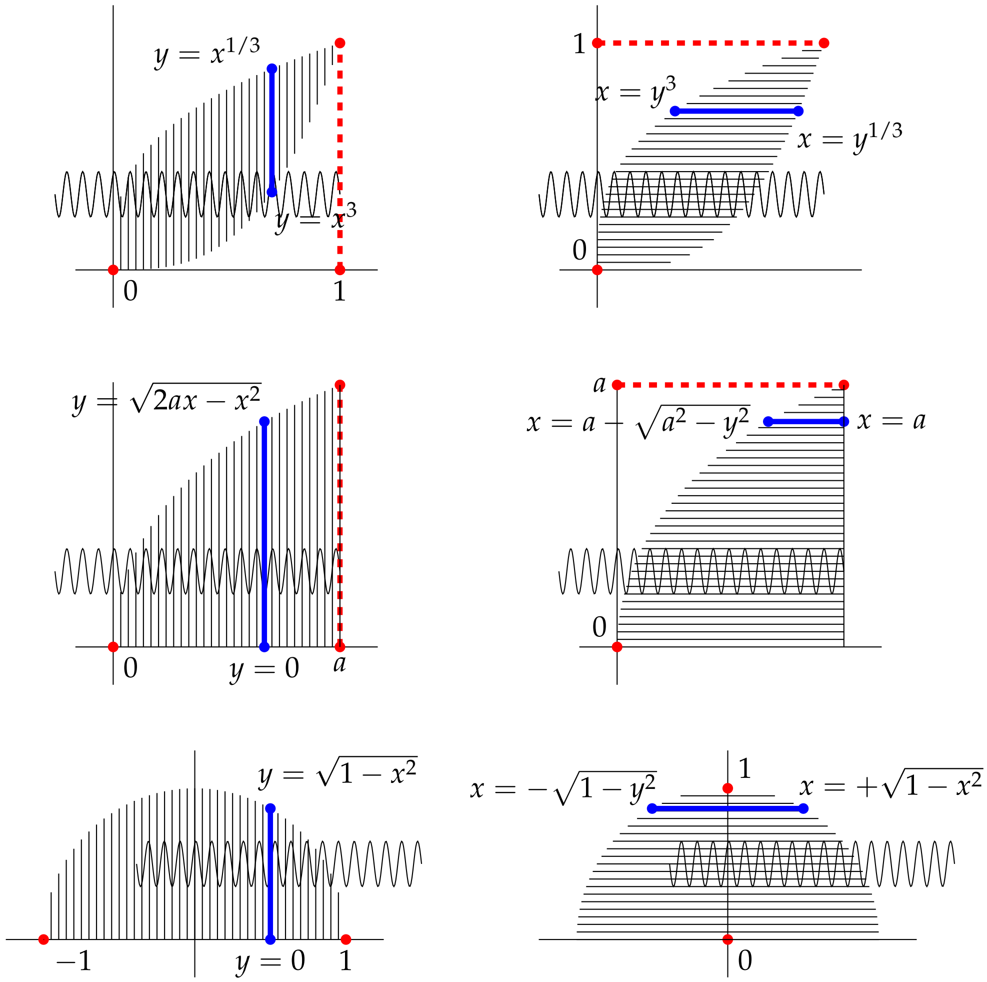

Figura 1.9: Varios esquemas relativos al Ejercicio 21.

La b) requiere, primero de todo, reconocer que las funciones $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$ se cortan en $(x = 1, y = 1)$. Una vez visto esto, el sencillo verificar que

$$\boxed{\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{y^3}^{y^{1/3}} f(x,y)\, dx\, dy}.$$

Para la c) hace falta calcular el valor de $y = \sqrt{2ax - x^2}$ cuando $x = a$, que da $y = a$. También hay que ser cuidadoso, pues al despejar la x en

$$y = \sqrt{2ax - x^2}$$

salen dos soluciones posibles

$$x = a - \sqrt{a-y},\ x = \sqrt{a-y} + a$$

y la que corresponde a la integral pedida es la primera (¿por qué?). Teniendo esto en cuenta,

$$\boxed{\int_0^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx\,dy}.$$

La d) es la mitad superior del círculo de radio 1 centrado en el origen y requiere utilizar las dos raíces

$$x = -\sqrt{1-y^2},\ x = +\sqrt{1-y^2},$$

con lo que queda

$$\boxed{\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy}.$$

La e) y la f) se dejan sin resolver.

Ejercicio 22 (Ibíd.)**.** Calcular las integrales siguientes, utilizando coordenadas polares:

$$\text{a)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx \quad \text{b)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$\text{c)} \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dydx \qquad \text{d)} \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dydx$$

Solución. El cambio a polares es

$$\phi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right\},\ |J(\phi)| = r$$

y cada caso requerirá calcular los límites para θ y r, dependiendo del conjunto de integración.

La a) (dibújese el conjunto) corresponde al cuadrante de circunferencia de radio a desde el ángulo 0 hasta $\pi/2$. Así pues, el conjunto de integración en polares es $r \in [0,a], \theta \in [0,\pi/2]$. Puesto que $x^2+y^2 = r^2$, la integral queda

$$\boxed{I_a = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}}.$$

La b) tiene como conjunto de integración el mismo (pero nótese que está parametrizada como $y \in [0, a]$, $x \in [0, \sqrt{a - y^2}]$). Así que

$$\boxed{I_b = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r\, dr\, d\theta = \frac{\pi a^4}{2}}$$

La c) tiene como conjunto de integración el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$; para calcular la parametrización en polares, se resuelven las ecuaciones correspondientes para la x:

$$1 = r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$$

y para la y

$$1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow r = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}.$$

El ángulo varía entre 0 y $\pi/2$, pero el límite de la r depende de si $\theta \leq \pi/4$ ó $\theta \geq \pi/4$. Por tanto, dividiendo el cuadrado X en dos partes, queda

$$X \equiv \theta \in [0, \pi/4], r \in [0, \frac{1}{\cos\theta}] \cup \theta \in [\pi/4, \pi/2], r \in [0, \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}].$$

Por tanto,

$$I_c = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\,\mathrm{sen}\,\theta} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta$$

que queda (no se puede simplificar más)

$$\boxed{I_c = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-1/\cos^2(\theta)}}{2} \right) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-1/\,\mathrm{sen}^2(\theta)}}{2} \right) d\theta}.$$

(En este ejercicio hay una cuestión de simetría que simplificaría un poco la solución. ¿Cuál?).

Finalmente, la integral d) corresponde a una semicircunferencia de radio a centrada en $(a, 0)$ (¿cómo puede saberse esto?), y como la función integrando es 1, solo se trata de calcular su área (no hace falta ningún cambio a polares).

$$\boxed{I_d = \frac{\pi a^2}{2}}.$$

Ejercicio 23 (Piskunov págs. 770-1, como los siguientes)**.** Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.

Solución. En estos problemas se han de calcular los puntos de corte de las dos figuras y estudiar cuál queda "a la izquierda" ó "debajo" de la otra, para que los límites de integración sean correctos.

En este caso, se igualan las dos funciones:

$$x^2 = x, \Rightarrow x = 0, 1$$

y los puntos de corte son $(0,0)$ y $(1,1)$. Puesto que las funciones son continuas, si una de ellas está debajo de la otra en un punto intermedio, lo está en todos los puntos del intervalo. En concreto, para $x = 1/2$:

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x,$$

es decir, $x^2 < x$ en todo el intervalo $[0,1]$. Por tanto, la gráfica de $y = x^2$ está por debajo de la $y = x$ para $x \in [0,1]$. Es decir, el conjunto cuyo área se pide es

$$x \in [0,1],\ y \in [x^2, x].$$

Cuya área es

$$\boxed{A = \int_0^1 \int_{x^2}^x 1\, dy\, dx = \int_0^1 x - x^2\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}}.$$

Ejercicio 24. Calcular el área de un lazo de la curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución. En este problema se describe el conjunto por su borde. Habrá que estudiar la curva (y lo que significa un "lazo") para saber cuáles son los límites de integración, etc. Llamemos X al conjunto cuya área se pide calcular. Por definición

$$A(X) = \int_X 1\, dx\, dy$$

(el área se define en coordenadas cartesianas). El borde del conjunto se da en polares, así que lo lógico será hacer el cambio a polares. Pero antes, dibújese X, como en la Figura 1.10. Se observa que los límites de integración comprenden el ángulo θ desde 0 hasta 2π y que para cada ángulo, el radio va desde 0 hasta la ecuación de la curva $r = a \operatorname{sen} 2\theta$.

Para conocer los límites de integración del ángulo, puede procederse así. La ecuación

$$\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$$

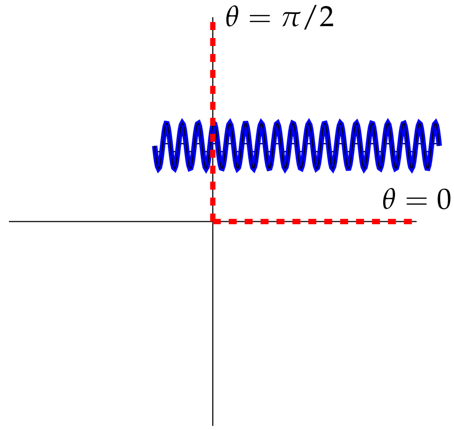

Figura 1.10: La curva del ejercicio 24 y los límites de integración del ángulo para un solo pétalo.

tiene soluciones del tipo $\rho = 0$. Se busca un intervalo en el que ρ comience siendo 0, se haga positivo y vuelva a ser 0. Los valores en que ρ es 0 son

$$\operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pm\pi/2, \ldots, \pm\pi/2$$

de manera que, por ejemplo, $\theta \in [0, \pi/2]$ cumple los requisitos, pues $\rho(0) = 0$, $\rho(\pi/2) = 0$ y $\rho(\theta) > 0$ para $\theta \in (0, \pi/2)$.

Finalmente, se puede ya pasar a polares:

$$A(X) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \operatorname{sen} 2\theta} 1 \cdot r \, dr \, d\theta$$

es decir

$$\boxed{A(X) = \frac{\pi a^2}{8}}.$$

Ejercicio 25. Calcular el área limitada por la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Solución. Como antes, trazamos el dibujo primero (téngase en cuenta que *los radios son exclusivamente positivos*):

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

donde la raíz cuadrada es la positiva. Se tiene

$$\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \ldots$$

Considerando una sola vuelta $\theta \in [0, 2\pi]$, esto quiere decir que ρ es positivo solo para $\theta \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [3\pi/4, 5\pi/4]$, $\theta \in [7\pi/4, 2\pi]$. Es patente que la figura es simétrica respecto del eje OY, así que el área es dos veces el área del pétalo derecho o del izquierdo (véase la Figura 2.2). Rotando el ángulo

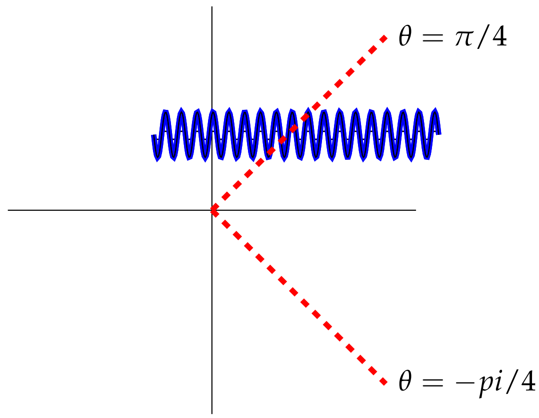

Figura 1.11: La curva del ejercicio 43 y los límites de integración del ángulo para un solo pétalo.

$-\pi/4$ y teniendo llamando X al conjunto total, se tiene que (nótese la r en el integrando, que proviene del jacobiano):

$$A(X) = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

por lo que

$$\boxed{A(X) = a^2}.$$

Ejercicio 26. Plantear el cálculo del área de un lazo de la curva dada por la ecuación

$$\left(\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$$

donde a, b, c son números reales positivos.

Solución. Habrá que intentar reescribir estas ecuaciones de alguna manera. Como son casi simétricas en x y en y, salvo los denominadores a^2 y b^2, se pude intentar realizar el cambio

$$\phi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{a}r\cos\theta \\ y = \sqrt{b}r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right\} |J(\phi)| = \sqrt{ab}r$$

con lo que la ecuación implícita queda

$$\left(r^4\cos^4\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta\right)^2 = \frac{2}{c^2}\sqrt{ab}r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{ab}}{c^2}r^2\operatorname{sen}2\theta$$

es decir,

$$r^8\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)^2 = \frac{\sqrt{ab}}{c^2}r^2\operatorname{sen}2\theta$$

que, simplificando da

$$r^6\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)^2 = \frac{\sqrt{ab}}{c^2}\operatorname{sen}2\theta.$$

Se despeja r en función de θ:

$$r(\theta) = k\frac{\operatorname{sen}^{1/6}2\theta}{(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta)^{1/3}}$$

donde k es un número positivo (que depende de a, b y c). Lo importante es saber en qué región angular es $r > 0$. Como el denominador es siempre positivo y no nulo (¿por qué?), solo hay que preocuparse del numerador:

$$\operatorname{sen}2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \ldots$$

Esos son los valores en que puede cambiar de signo el numerador. Ahora bien,

$$\theta \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow \sin 2\theta < 0,$$

por lo que en esa región no hay función, mientras que sí la hay en $\theta \in [\pi, 3/2\pi]$ y no la hay en $\theta \in [3/2\pi, 2\pi]$. Como la curva es simétrica respecto del origen, el área total será (teniendo en cuenta el Jacobiano)

$$\boxed{A(X) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{r(\theta)}\sqrt{ab}r\,dr\,d\theta},$$

con $r(\theta)$ la expresión que quedó arriba.

Ejercicio 27. Calcular los volúmenes limitados por las siguientes familias de superficies:

1. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$,
2. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $xy = z$, $z = 0$,
3. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$,
4. $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = 12 + y - x^2$,

5. Los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro de ecuación $z = y^2/2$,
6. Los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.
7. $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2ax$,
8. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ para $a > R$.

Solución. Trataremos de hacerlos sin representaciones gráficas ni razonamientos puramente geométricos, sino "llevados" por las igualdades y desigualdades.

1. (Se percibe fácilmente que se trata de un plano: $z = 0$; un cilindro perpendicular a dicho plano: $x^2 + y^2 = 1$ y otro plano oblicuo: $x + y + z = 3$).

   La superficie $x^2 + y^2 = 1$ divide el espacio en dos partes: $x^2 + y^2 < 1$ y $x^2 + y^2 > 1$. Resulta que la parte $x^2 + y^2 > 1$ contiene puntos del plano $x + y + z = 3$ a alturas arbitrarias, así que el volumen aquí contenido no está acotado. Por tanto, solo puede tratarse del volumen contenido en $x^2 + y^2 < 1$. Es decir, que el conjunto X está contenido en $x^2 + y^2 < 1$. Por tanto, se pueden utilizar coordenadas cilíndricas:

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

   y, de momento, considerar $r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]$. Ya se verá si hace falta limitar más este conjunto.

   En estas coordenadas, z queda entre $z = 0$ y $z = 3 - r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$ que es mayor que 0 siempre (pues $r \in [0,1]$ y $\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta < 2$). Así pues, el conjunto queda parametrizado como

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}, \quad r \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ z \in [0, 3 - r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)].$$

   El volumen no es más que la integral de 1 es este conjunto, teniendo en cuenta que

$$|J(\varphi)| = r.$$

   Por tanto

$$\boxed{V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3 - r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)} 1 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr = 3\pi}.$$

2. En este caso, se tiene el plano $z = 0$ y un cilindro paralelo al eje OZ (es decir, una superficie que no depende de la variable z); como en el caso anterior, la parte $(x-1)^2 + (y-1)^2 > 1$ contiene puntos con coordenadas z arbitrarias, así que no puede ser esa parte. Por tanto, el volumen está contenido en $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$ y se pueden utilizar las variables
$$\varphi \equiv \begin{cases} x - 1 = r\cos\theta \\ y - 1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$
con, de momento, $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

   Si se toma cualquier r, θ, se obtiene, en la superficie $xy = z$ que $z = r^2 \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + r(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) + 1$. Se sabe que este valor es mayor que 0, pues es $z = xy$ con $x > 0, y > 0$ (¿por qué?), así que el cuerpo es
$$\varphi \equiv \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}, \; r \in [0,1]\; \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, Z(r,\theta)],$$
donde $Z(r,\theta) = r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + r(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) + 1$. Así pues (una vez más $|J(\varphi)| = r$):
$$\boxed{V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{Z(r,\theta)} 1 \cdot r\,dz\,d\theta\,dr = \pi.}$$

3. Seguimos con un cilindro paralelo al eje OZ, dado en este caso por $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Completando cuadrados, esta ecuación es la misma que $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, con la que se razona exactamente igual que en los dos volúmenes anteriores. Así que el volumen está contenido en $(x-a)^2 + y^2 < a^2$, que puede ponerse
$$\varphi \equiv \begin{cases} x = a + ar\cos\theta \\ y = ar\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$
para, de momento, $r \in [0,a]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

   Sustituyendo en la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, se obtiene
$$z^2 = 2ax,$$
que (puesto que $x > 0$ en toda la región de arriba), da dos soluciones,
$$z = \pm\sqrt{2ax} = \pm a\sqrt{2(1 + r\cos\theta)}.$$

Es decir, teniendo todo en cuenta, el conjunto puede parametrizarse como

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = a(1 + r\cos\theta) \\ y = ar\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}, \; r \in [0, a],\; \theta \in [0, 2\pi], z \in [-Z(r,\theta), Z(r,\theta)],$$

para $Z(r,\theta) = a\sqrt{2(1 + r\cos\theta)}$. El volumen de este conjunto es (nuevamente $|J(\varphi)| = ar$)

$$\boxed{\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-Z(r,\theta)}^{Z(r,\theta)} 1 \cdot ar\, dz\, d\theta\, dr}$$

que parece no ser fácilmente integrable.

Sin embargo, si planteamos la integral en cartesianas, tenemos que el conjunto es

$$x \in [0, 2a],\; y \in [-\sqrt{a^2 - (x-a)^2}, \sqrt{a^2 - (x-a)^2}],\; z \in [0, 2ax],$$

por lol que el volumen es

$$\boxed{V = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \int_0^{2ax} 1\, dz\, dy\, dx = 2\pi a^4}.$$

Así que este es un ejemplo de integral que es fácil de calcular en cartesianas y muy difícil en cilíndricas, pese a que el conjunto de integración tiene “forma cilíndrica.”

4. Las superficies $y = x^2$ y $x = y^2$ se cortan para $x = 0, y = 0$ y para $x = 1, y = 1$, así que los límites de integración de x e y están ambos entre 0 y 1. Puede ponerse

$$x \in [0, 1],\; y \in [x^2, \sqrt{x}].$$

Nótese (importante) que, para $x \in [0, 1]$, el cuadrado x^2 es *más pequeño* que la raíz cuadrada $\sqrt{x}$.

Ahora se nos dice que z está entre 0 y $12 + y - x^2$. Este segundo valor es positivo (pues $y - x^2$ es mayor que -12) en todo el dominio de las x e y, así que el conjunto es

$$x \in [0, 1],\; y \in [x^2, \sqrt{x}],\; z \in [0, 12 - y + x^2]$$

y su volumen es

$$\boxed{V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{12-y+x^2} 1\, dz\, dy\, dx = \frac{551}{140}}.$$

5. Los planos coordenados son $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. El cilindro $z = y^2/2$ tiene coordenadas $z > 0$, así que ya sabemos que los valores de z están en $[0, y^2/2]$ (o en un intervalo incluido en este, claro).

   El plano $2x + 3y - 12 = 0$ es paralelo al eje OZ. Si $x < 0$ entonces los valores de y no están acotados en este plano. Si $y < 0$ tampoco. Así que el volumen ha de estar en el octante principal $x > 0, y > 0, z > 0$ (el $z > 0$ viene del párrafo anterior).

   Un punto del plano $2x + 3y - 12 = 0$ con $x > 0$ requiere que $y = (12 - 2x)/3$. Esto es positivo siempre y cuando $x < 6$. Así que $x \in [0, 6]$ (o algo más pequeño). Para estos valores de x, si se toma cualquier $y \in [0, (12 - 2x)/3]$ entocnes claramente hay un $z > 0$ tal que $z = y^2/2$. Por tanto, podemos afirmar ya que los límites de integración son

$$x \in [0, 6],\ y \in [0, \frac{12 - 2x}{3}],\ z \in [0, \frac{y^2}{2}].$$

   Con estos datos

$$\boxed{V = \int_0^6 \int_0^{(12-2x)/3} \int_0^{y^2/2} 1\, dz\, dy\, dx = 16}.$$

6. En este caso, como en los anteriores, podemos afirmar que el volumen X está contenido en las zonas $x^2 + y^2 \leq a^2$ y $x^2 + z^2 \leq a^2$. De la primera condición, estamos seguros de que el siguiente conjunto incluye a X:

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},\ r \in [0, a],\ \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.3}$$

   Ahora se ha de estudiar de qué manera influye el otro conjunto en los límites de X.

   Tomando un par cualquiera (x, y), la segunda condición impone que

$$x^2 + z^2 \leq a^2,$$

   es decir,

$$z^2 \leq a^2 - x^2 \Longrightarrow z \in [-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}].$$

   Como $a^2 \geq x^2$ en todo el conjunto dado por las condiciones (1.3), se concluye que el conjunto X se puede parametrizar como:

$$\varphi \equiv \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = ar\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},\ r \in [0, a],\ \theta \in [0, 2\pi], z \in [-Z(r, \theta)], Z(r, \theta)],$$

donde $Z(r,\theta) = \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - r\cos^2\theta}$. Como conclusión, y teniendo otra vez en cuenta que $|J(\varphi)| = ar$,

$$\boxed{V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-a\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}^{a\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}} 1 \cdot ar\, dz\, d\theta\, dr}.$$

Esta integral es también demasiado complicada (además requiere mucho cuidado calcularla bien) y es otro ejemplo de que puede ocurrir que una integral que parece preparada para calcularse en polares se resuelva más fácilmente en cartesianas. En coordenadas (x, y, z) el conjunto es

$$x \in [-a, a],\ y \in [-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}],\ z \in [-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}].$$

El volumen es, por tanto

$$\boxed{V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\, dz\, dy\, dx = \frac{8a^3}{3}}.$$

7. (Es el corte de una esfera de radio a con un cilindro de radio menor cuyo eje pasa por el centro de la esfera). Puesto que $x^2 + y^2 = R^2$, despejando la z en la primera ecuación se obtiene, para los cortes, que

$$z^2 = a^2 - R^2,$$

así que $z \in [-\sqrt{a^2 - R^2}, \sqrt{a^2 - R^2}]$, independientemente de x y de y. El conjunto $x^2 + y^2 < R$ se puede parametrizar como

$$x \in [-R, R],\ y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$$

por lo que el volumen no es más que

$$\boxed{V = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-R^2}}^{\sqrt{a^2-R^2}} 1\, dz\, dy\, dx = 2\pi R^2\sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Ejercicio 28. Calcular el volumen del conjunto limitado por una esfera de radio R con centro el orgien de coordenadas y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ para $z > 0$.

Solución. En la Figura 1.12 puede verse un elemento que genera el conjunto pedido al rotar alrededor del eje OZ. Nótese que *no es un corte* del conjunto

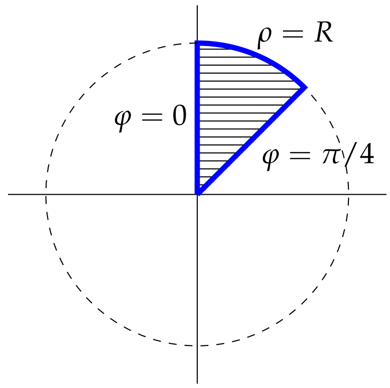

Figura 1.12: El conjunto del Ejercicio 28 es la rotación alrededor del eje OZ (es decir, $\theta \in [0, 2\pi]$) del conjunto rayado. Nótese cómo el dibujo es “la mitad” del corte con un plano transversal.

sino “la mitad de él” (esto se debe a que φ, el ángulo zenital va solo de 0 a π). De la figura puede deducirse que, si se utilizan coordenadas esféricas

$$\varphi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{array} \right\}, \ |J(\varphi)| = r^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

el conjunto es fácil de parametrizar:

$$\varphi \in [0, \pi/4], \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, R].$$

Así pues, si X es el conjunto, como

$$V = \int_X 1 \, dx \, dy \, dz,$$

el paso a esféricas da

$$\boxed{V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^R r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \pi R^3}.$$

Ejercicio 29. Calcular la masa del conjunto del ejercicio anterior si la densidad es proporcional a la altura.

Solución. En lugar de integrar la función 1 en las coordenadas (x, y, z) (para calcular el volumen), se ha de integrar la función kz (k es la constante de proporcionalidad). Así pues

$$M = \int_X kz \, dx \, dy \, dz$$

que, cambiando a coordenadas esféricas queda

$$\boxed{M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^R r \cos\varphi r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi R^4}{\sqrt{8}}}.$$

Ejercicio 30. Calcular el volumen del sólido limitado por dos esferas de radio R, una con centro en el borde de la otra.

Solución. Coloquemos una esfera en $(0,0,0)$ y la otra en $(0,0,R)$. Un esquema del corte de este conjunto por el plano $x = 0$ puede verse en la Figura 1.13. El conjunto (que llamaremos X) es la unión de dos esferas a la que se quita

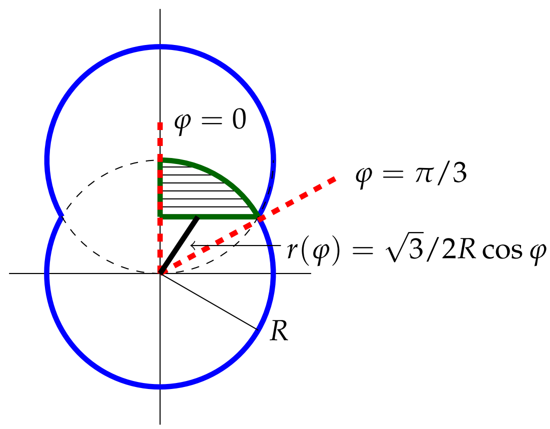

Figura 1.13: El conjunto del Ejercicio 30 está marcado con el borde azul. El ejercicio está resuelto restando al volumen de las dos esferas el doble del volumen de la rotación alrededor del eje OZ del conjunto rayado.

la intersección. Como puede verse en la Figura 1.13, esta intersección es dos veces la rotación alrededor del eje OZ de la parte rayada. Si calculamos el volumen de esta parte, podemos solucionar fácilmente el problema.

Para parametrizar la intersección, observando la Figura 1.13, se constata que $\theta \in [0, 2\pi]$, que $\varphi \in [0, \pi/3]$ (¿por qué es obvio que el límite superior de φ es $\pi/3$?) y, finalmente, el radio r depende de φ. Un sencillo argumento de trigonometría (que el alumno debería realizar) muestra que $r \in [\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\varphi, R]$.

Así pues, si la intersección la denominamos Y, se tiene

$$V(Y) = \int_Y 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\varphi}^R 1 \cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta,$$

es decir
$$V(Y) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{24}\pi R^3.$$
Como el volumen de una de las esferas es $\frac{\pi}{3}R^3$, queda
$$\boxed{V(X) = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{24}\pi R^3}.$$

Ejercicio 31. Calcular el momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por su centro de una esfera de radio r de densidad constante.

Solución. Puesto que se nos deja elegir el eje, lo colocamos en una de las direcciones de los ejes coordenados y el centro de la esfera en el origen. Pongamos que el eje es OZ, así que la distancia al cuadrado del punto (x, y, z) a dicho eje es $x^2 + y^2$. Por ello
$$I = \int \rho\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$
Cambiando a esféricas, queda
$$x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$
y como el conjunto es la esfera entera,
$$\boxed{I = \int \rho\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{8}{15}\rho\pi R^5}.$$
Que tiene las dimensiones adecuadas ML^2.

Ejercicio 32. Calcular el momento de inercia respecto de su eje de un cono circular recto de altura h (utílicese una ecuación genérica del cono). Se supone que la densidad es constante.

Solución. La ecuación genérica de un cono circular recto con eje en el OZ es
$$x^2 + y^2 = az^2$$
(según $a > 0$ sea mayor o menor, el cono será más o menos abierto).

Como hay cierta asimetría entre las variables x, y y la z, utilizaremos coordenadas cilíndricas:
$$\varphi \equiv \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\},\ |J(\varphi)| = r.$$

Como la altura es h, haremos que z vaya de $-h$ hasta 0. El ángulo θ da la vuelta entera (es un sólido de rotación) mientras que el radio r va desde 0 hasta el radio del círculo correspondiente a altura $-z$:

$$r^2 = az^2, \Rightarrow r \in [0, \sqrt{a}z].$$

La distancia al cuadrado del punto (x, y, z) al eje OZ es $x^2 + y^2$. El momento de inercia pedido (si X es el cono) es

$$I = \int_X \rho \left(x^2 + y^2\right) \, dx \, dy \, dz$$

que, al pasar a cilíndricas queda

$$\boxed{I = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{0} \int_0^{\sqrt{a}z} \rho r^2 \cdot r \, dr \, dz \, d\theta = \frac{\rho a^2 \pi h^5}{10}},$$

que tiene las dimensiones adecuadas ML^2.

Ejercicio 33. Calcúlese el centro de gravedad de un octante de esfera de radio R si la densidad es constante.

Solución. Colocando el octante en el primer octante ($x > 0, y > 0, z > 0$), su parametrización en esféricas es

$$r \in [0, R], \ \theta \in [0, \pi/2], \ \varphi \in [0, \pi/4].$$

Puesto que la densidad es constante, pueden tenerse en cuenta aspectos de simetría del conjunto. Está claro que este octante de esfera es simétrico respecto de cada plano $x = y$, $x = z$ e $y = z$. Esto implica que las coordenadas C_x, C_y y C_z del centro de masas son iguales, de modo que basta con calcular una de ellas.

Como la densidad es constante, la masa M es un octavo de la masa de la esfera de misma densidad ρ,

$$M = \frac{1}{6} \rho \pi R^3.$$

La coordenada C_z es, si X es el conjunto

$$C_z = \int_X \rho z \, dx \, dy \, dz$$

y, cambiando a esféricas queda

$$C_z = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^R \rho r\cos\varphi r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{6}{\rho\pi R^3}\frac{\rho\pi R^4}{32},$$

en fin

$$\boxed{C_x = C_y = C_z = \frac{3}{16}R},$$

que tiene las dimensiones adecuadas L y es "razonable" pues está en la parte inferior, que tiene más masa que la superior.

Ejercicio 34. Calcúlese el momento de inercia de una pieza troncocónica (un cono que une los círculos de radios $R_1 > R_2$, que están a distancia h) a la que se le ha eliminado una parte cilíndrica de radio s, en el centro. Se supone que la densidad es constante. El eje es el de la propia pieza.

Solución. En la Figura 1.14 puede verse un esquema del corte del conjunto descrito en el enunciado con el plano $x = 0$. Está claro que este problema es preferible hacerlo utilizando coordenadas cilíndricas. La ecuación de la gene-

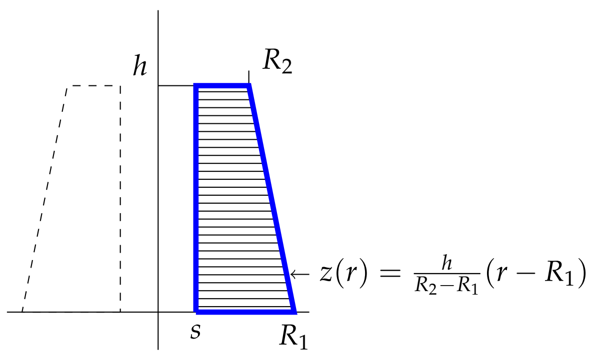

Figura 1.14: Esquema del conjunto del Ejercicio 34: el conjunto es la rotación alrededor del eje OZ del área rayada. La ecuación $z(r)$ es la de la recta oblicua.

ratriz del cono como altura en función de distancia al eje OZ es, como se ve en la Figura 1.14,

$$z(r) = \frac{h}{R_2 - R_1}(r - R_1),$$

donde r es la distancia de las coordenadas cilíndricas. Despejando r en función de z queda

$$r = \frac{R_2 - R_1}{h}z + R_1,$$

lo que permite parametrizar el conjunto en cilíndricas como

$$\theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, h],\ r \in [s, \frac{R_2 - R_1}{h} z + R_1].$$

Puesto que la distancia al cuadrado de un punto (x, y, z) al eje OZ es $x^2 + y^2$, el momento de inercia pedido es

$$I = \int_X \rho \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz$$

que, cambiando a cilíndricas da

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_s^{z(R_2-R_1)/h+R_1} \rho r^2 \cdot r\, dr\, dz\, d\theta$$

que, tras echar las cuentas queda

$$\boxed{I = \frac{\pi h}{10}\left(R_1^4 + R_1^3 R_2 + R_1^2 R_2^2 + R_1 R_2^3 + R_2^4 - 5s^4\right)}.$$

que, al menos, tiene las dimensiones adecuadas L^2 y es positivo siempre y cuando $s < R_2$, como en la Figura 1.14.

Ejercicio 35. La temperatura de una esfera metálica de radio R es de 0°C en el centro y directamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro. Calcúlese la temperatura media.

Solución. Primero se precisa el volumen, que es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. La temperatura media es

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \int_X T(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

si X es la esfera y $T(x, y, z)$ es la temperatura del punto (x, y, z). Siendo el conjunto esférico y la función simétrica en todas las variables, conviene utilizar el cambio a esféricas. La distancia al cuadrado de un punto al centro es $x^2 + y^2 + z^2$, así que

$$T(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

(compruébese que $T(x, y, z)$ es 0 en el origen). La parametrización de la esfera es $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, \pi]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, por tanto

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R k r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

que da

$$\boxed{\overline{T} = \frac{3}{4\pi R^3}\frac{4k}{5}\pi R^5 = \frac{3k}{5}R^2}.$$

que tiene la dimensión de la temperatura, pues $k \sim$ °C/m^2.

Ejercicio 36. Explicar cómo se calcularía el centro de masas de una pieza formada por tres esferas tangentes, de radios r_1, r_2 y r_3, cuyas densidades son constantes ρ_1, ρ_2 y ρ_3. Se sabe que los centros están en los puntos C_1, C_2 y C_3.

Solución. Como las densidades son constantes y los conjuntos son perfectamente simétricos respecto de sus centros respectivos, los centros de masas de cada esfera están en su centro: C_1, C_2 y C_3. La masa de cada esfera es $M_i = 4/3\pi r_i^3 \rho_i$.

Ahora *el centro de masas de los centros de masas es el centro de masas*, así que si $C = (C_x, C_y, C_z)$ es el centro de masas pedido, se tiene que

$$\boxed{C = \frac{M_1C_1 + M_2C_2 + M_3C_3}{M_1 + M_2 + M_3}}.$$

Por cierto: da igual que las esferas sean o no tangentes.

Ejercicio 37. ¿Puede calcularse el momento de inercia de un sólido rígido "raro" respecto de un eje "dividiéndolo en partes más sencillas"? ¿Por qué?

Solución. Claramente, *sí* puede hacerse. Si el sólido X está compuesto por las partes disjuntas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, se tiene que

$$I = \int_X \rho(x,y,z) d_E^2(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

donde $\rho(x,y,z)$ es la densidad del sólido en el punto (x,y,z) y $d_E^2(x,y,z)$ es el cuadrado de la distancia del punto (x,y,z) al eje E. Por las propiedades elementales de la integración:

$$\boxed{I = \int_{X_1} \rho(x,y,z) d_E^2(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \cdots + \int_{X_n} \rho(x,y,z) d_E^2(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

que es la suma de los momentos de cada parte respecto del mismo eje.

Ejercicio 38. Calcular el centro de masas de una semiesfera (una esfera centrada en el origen, de radio R, cortada por el plano $z = 0$) si la densidad es directamente proporcional a la distancia al centro. Lo mismo si es directamente proporcional a dicha distancia al cuadrado. Comparar los resultados para radios menores que uno y para radios mayores que uno.

Solución. En ambos casos la parametrización en esféricas es

$$r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi/2].$$

Por cuestiones de simetría y porque la función es par en las variables x e y, resulta que $C_x = C_y = 0$, así que solo hay que calcular la coordenada vertical.

En el primer caso, la masa es (ya se ha hecho el cambio a esféricas)

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi/2} kr \cdot r^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta = k\frac{\pi R^4}{2}.$$

Ahora la coordenada C_z^1 se calcula así:

$$\boxed{C_z^1 = \frac{1}{M_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R krr \operatorname{sen} \varphi \cdot r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{2}{k\pi R^4} \frac{k\pi^2 R^5}{10} = \frac{1}{5}\pi R}.$$

La masa de la segunda esfera es

$$M_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi/2} kr^2 \cdot r^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta = k\frac{5\pi R^5}{2}.$$

mientras que el centro de masas es

$$\boxed{C_z^2 = \frac{1}{M_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R kr^5 \operatorname{sen}^2 \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{5}{2k\pi R^5} \frac{k\pi^2 R^6}{12} = \frac{5}{24}\pi R^2}.$$

Como se ve, cuando $R < 24/25$, el centro de masas primero está más alto que el segundo, mientras que cuando $R > 24/25$, ocurre lo contrario (la función x^2 es menor que x para $x < 1$ y mayor para $x > 1$).

Ejercicio 39. Calcular el centro de masas de una esfera de radio R con densidad directamente proporcional a la distancia al centro, a la que se le ha quitado una circunferencia concéntrica de radio $r < R$.

Solución. No hay nada que hacer en este ejercicio…El centro de masas es $(0, 0, 0)$ (el centro de ambas esferas), pues la densidad es par en todas las coordenadas.

Ejercicio 40. Calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros circulares rectos de radio 1 y ejes respectivos $x = y = 0$ y $x = 1, y = 0$ desde $z = 0$ hasta $z = h$.

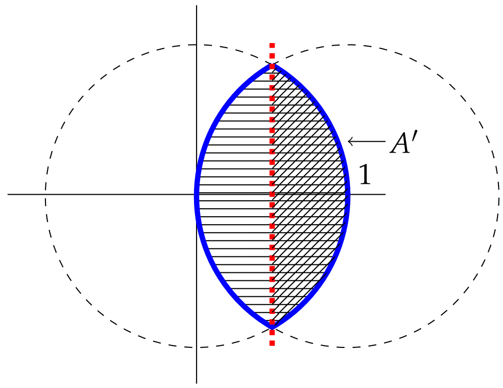

Figura 1.15: Esquema del conjunto del Ejercicio 40. La línea roja lo separa en dos mitades.

Solución. La planta de este cuerpo puede verse en la Figura 1.15. Si se tiene en cuenta que *todos los cortes con planos $Z = z$ son iguales*, este problema es muy sencillo de resolver utilizando el Teorema de Fubini: no hay más que calcular el área del elemento lenticular de la Figura 1.15 y multiplicar por la altura, pues si X es el conjunto en cuestión:

$$A(X) = \int_0^h A(C)\,dz = h \cdot A(C),$$

pues $A(C)$, el área de dicha figura lenticular es constante.

Para calcular $A(C)$ puede procederse como en el Ejercicio 30 (muy complicado) o simplificar el problema dándose uno cuenta de que $A(C)$ es dos veces el área A' de una de las mitades que queda a un lado de la línea roja de la Figura 1.15. Ahora bien, A' es el área de un sector circular de radio 1 y abertura $2\pi/3$ *menos* el área de un triángulo de base $\sqrt{3}$ y altura $1/2$ (¿por qué?). Así pues

$$A' = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{12}.$$

Por tanto,

$$A(C) = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6},$$

y en consecuencia

$$\boxed{A = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}h}.$$

Capítulo 2

Cálculo vectorial

Ejercicio 41. Escribir la ecuación de la cardioide en coordenadas polares a partir de su descripción. (Un círculo que gira alrededor de otro del mismo radio).

En la Figura 2.1 puede verse un esquema de la construcción de esta curva.

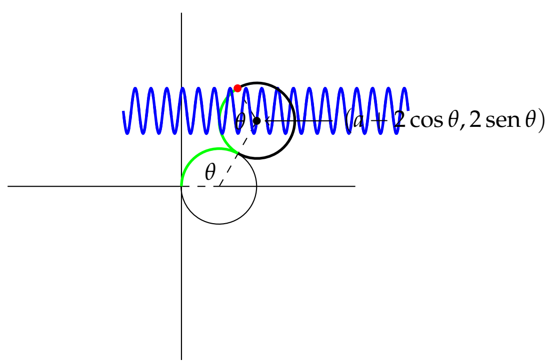

Figura 2.1: La cardioide (la línea azul): los dos arcos de color verde son iguales. El círculo de borde grueso gira alrededor del otro y el punto rojo marca la trayectoria. El radio de ambos círculos es a.

Solución. Si se utiliza como parámetro el ángulo (en sentido horario) girado por el círculo que rota, como se ve en la Figura 2.1, el centro del círculo externo está justo en la línea que forma un ángulo θ con el eje OX y pasa por el centro del círculo fijo. Si este centro está en $(a, 0)$, entonces el centro del círculo externo está en $(a - 2a * \cos\theta, 2a * \operatorname{sen}\theta)$ (¿por qué?). Ahora solo hay que calcular la posición del punto rojo.

Un sencillo argumento geométrico muestra que el ángulo que forman, por un lado la línea que une el punto rojo con el centro del círculo que gira y por otro el eje OX es $2\theta - \pi$. Así que el ángulo que el punto rojo está girado respecto del centro negro es $2\theta - \pi$. Por tanto, el punto rojo tendrá coordenadas

$$x(\theta) = C_x + a\cos(2\theta - \pi),\ y(\theta) = C_y - a\operatorname{sen}(2\theta - \pi),$$

donde C_x y C_y son las coordenadas del centro del círculo que gira. Como estas coordenadas son conocidas, resulta que

$$\begin{cases} x(\theta) = a - 2a\cos\theta + a\cos(2\theta - \pi) \\ y(\theta) = 2a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}(2\theta - \pi). \end{cases}$$

que pueden simplificarse a

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1 - 2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y(\theta) = a(2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta). \end{cases}$$

que son las ecuaciones de la cardioide “a derechas.”

¿Cómo serían las de la cardioide mirando respectivamente al sur, oeste y norte?

Ejercicio 42. Escribir la ecuación de la cicloide a partir de su descripción (la curva trazada por un punto de una circunferencia cuando esta gira sobre una recta).

Ejercicio 43. Escribir ecuaciones polares para la lemniscata cuyas ecuaciones cartesianas son

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Solución. Si se piden ecuaciones polares, habitualmente se quiere el radio despejado en función del ángulo. Antes de nada, recordemos que las coordenadas polares son

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

y que siempre suponemos que $r > 0$. El dominio de θ puede variar según lo que sea más cómodo o lo que geométricamente tenga sentido.

Sustituyendo en la fórmula, queda

$$r^4 = 2r^2 \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

como $r = 0$ es solo el origen (y podemos olvidarnos de él si hace falta), se puede simplificar

$$r^2 = 2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

y una igualdad trigonométrica elemental hace que quede

$$r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}.$$

Ahora hace falta dilucidar el dominio de θ. Está claro que si $\theta' = \theta + 2\pi$, entonces

$$\cos 2\theta' = \cos 2(\theta + 2\pi) = \cos(2\theta + 4\pi) = \cos 2\theta.$$

Por tanto, basta con estudiar el dominio de θ entre 0 y 2π, pues más allá $r(\theta + 2\pi)$ coincidirá con $r(\theta)$ y el punto en coordenadas cartesianas será el mismo.

El siguiente paso es saber para qué ángulos está definido $r(\theta)$ (y es positivo). En este caso es fácil, pues ocurre solo si

$$2\cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow \cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow 2\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$$

(en toda una circunferencia).

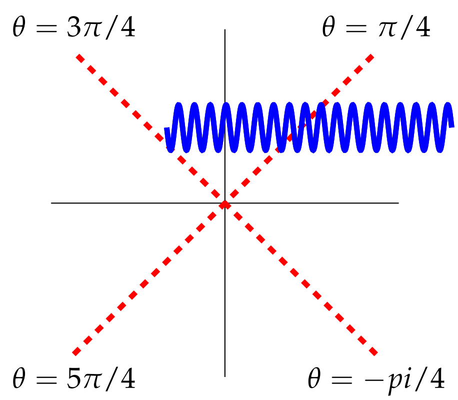

Figura 2.2: La lemniscata, Ejercicio 43.

Por tanto, una parametrización polar válida de esta curva es

$$\boxed{r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta},\ \theta \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]}.$$

La Figura 2.2 muestra un dibujo de la Lemniscata.

Ejercicio 44. Intentar escribir ecuaciones polares para el folium de Descartes, de ecuación

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

donde a es un número real positivo.

Solución. Como en el Ejercicio 43, se sustituyen en la ecuación implícita las coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

y queda

$$r^3\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right) - 3ar^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Puesto que $r = 0$ es solo un punto, podemos dividir por r y despejar:

$$r(\theta) = \frac{3a\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}.$$

De esta fórmula se deducen dos hechos:

- $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, así que basta considerar $\theta \in [0, 2\pi]$ (o una vuelta entera cualquiera).
- Como $|\cos^3\theta| > |\operatorname{sen}^3\theta|$ si y solo si $|\cos\theta| > |\operatorname{sen}\theta|$, entonces:
    1. Por un lado, $r(\theta) > 0$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.
    2. Además $r(\theta) > 0$ para $\theta \in [-\pi/4, 0]$.
    3. Y finalmente $r(\theta) > 0$ para $\theta \in [\pi/2, 3\pi/4]$.

Es decir, se puede parametrizar $r(\theta)$ para $\theta \in [-\pi/4, 3\pi/4]$ y queda

$$\boxed{r(\theta) = \frac{3a\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}, \theta \in [-\pi/4, 3\pi/4]}.$$

La Figura 2.3 muestra precisamente el Folium de Descartes y en ella puede apreciarse por qué $r(\theta)$ solo está definido en $[-\pi/4, \pi/4]$.

Ejercicio 45. Calcular ecuaciones polares para la espiral logarítmica: aquella curva para la que el ángulo cuya tangente forma con el radio vector es constante.

Solución. En este caso hay que descifrar la descripción. Si $r(\theta)$ es la función que describe la distancia del punto al origen en función del ángulo (i.e. el radio vector), entonces las ecuaciones cartesianas son

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

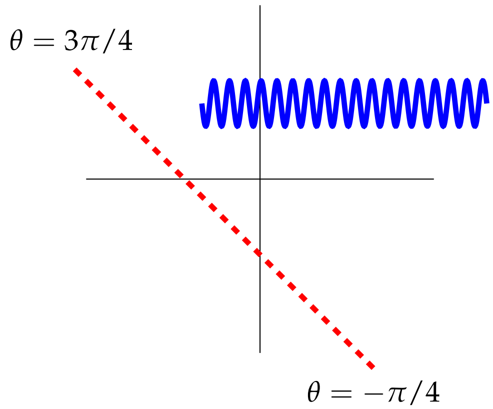

Figura 2.3: La lemniscata, Ejercicio 44. La línea roja marca la asíntota a la que se acerca en cada dirección, $\theta = -\pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$.

de manera que el vector tangente a esta curva es

$$\vec{v}(\theta) = (\dot{r}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta, \dot{r}(\theta)\operatorname{sen}\theta + r(\theta)\cos\theta).$$

El ángulo que forma este vector con la curva puede “medirse” utilizando el coseno, es decir, el producto escalar de los vectores normalizados:

$$\frac{\vec{v}(\theta)}{\|\vec{v}(\theta)\|} \cdot \frac{(x(\theta), y(\theta))}{\|r(\theta)\|} = \frac{\dot{r}(\theta)r(\theta)\cos^2\theta + \dot{r}(\theta)r(\theta)\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\dot{r}^2(\theta) + r^2(\theta)}r(\theta)} = \frac{\dot{r}(\theta)}{\sqrt{\dot{r}^2(\theta) + r^2(\theta)}}.$$

Esto puede reescribirse como

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{r^2(\theta)}{\dot{r}^2(\theta)}}}.$$

Si $r(\theta)$ es constante, entonces el vector tangente forma siempre un ángulo de $\pi/2$ con el radio vector y la curva es una circunferencia. Este es el primer caso.

Si $r(\theta)$ no es constante, entonces la única forma de que el producto escalar sea constante es que $r(\theta) = kr(\theta)$. Es decir, que la derivada de r sea kr para alguna constante $k \neq -1$. Esta es una ecuación diferencial (tema que no hemos estudiado) sencilla:

$$\dot{r}(\theta) = kr(\theta),$$

que, sin entrar en más detalles, se resuelve como

$$r(\theta) = Ce^{k\theta},$$

para $C \in \mathrm{R}_{\geq 0}$. Así pues, la ecuación de la espiral logarítmica es

$$\boxed{r(\theta) = Ce^{k\theta}}.$$

Ejercicio 46. Calcular la longitud de (en este ejercicio pueden salir integrales que "no se pueden calcular"):

1. El lazo del folium de Descartes,
2. Un arco de parábola,
3. Un arco de circunferencia,
4. Un arco de elipse de radios a y b,
5. Un arco de la curva $y = x^n$,
6. Un arco de la cardioide,
7. Una vuelta de la espiral logarítmica,
8. Un arco de la cicloide,
9. Un arco de la espiral $(\rho \cos(t), \rho \operatorname{sen}(t), at)$ para $a > 0$.
10. La longitud del arco de la hipérbola $xy = 1$ que comienza en $(1, 1)$ y termina en $(l, 1/l)$.

Solución. Este ejercicio, como se verá, no consiste más que en una colección de derivadas y planteamiento de integrales (y, solo eventualmente, el cáclculo explícito de estas). *Calcular longitudes requiere saber derivar*, poco más.

1. Como se vio en el ejercicio 44, la ecuación polar del folium de Descartes es
$$r(\theta) = \frac{3a}{2} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta}, \theta \in [-\pi/4, 3\pi/4],$$
y el lazo es para $\theta \in [0, \pi/2]$. En cartesianas, queda
$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = \dfrac{3a}{2} \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta} \cos \theta \\ y(\theta) = \dfrac{3a}{2} \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta} \operatorname{sen} \theta \end{array} \right. , \quad \theta \in [0, \pi/2].$$
Para calcular la longitud hay que hacer uso del vector tangente:
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(\theta) = (\text{demasiado largo}) \\ \dot{y}(\theta) = (\text{tambin}) \end{array} \right. , \quad \theta \in [0, \pi/2].$$
Y la longitud será
$$\boxed{L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2(\theta) + \dot{y}^2(\theta)}\, d\theta}.$$

2. Un arco de parábola puede escribirse como

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, a]$$

por ejemplo (esta es la parábola más simple). Su vector tangente es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in [0, a].$$

Así que la longitud de dicho arco será

$$\boxed{L = \int_0^a \sqrt{1 + 4t^2}\, dt}$$

que puede hacerse con cambios trigonométricos hiperbólicos pero no vamos a calcularla.

3. La circunferencia se parametriza como

$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos\theta \\ y(\theta) = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

(el arco va de α a β). Su vector tangente es, pues:

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = -R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{y}(\theta) = R\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Por tanto

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2\left(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)}\, d\theta = (\beta - \alpha)R}.$$

(la longitud de un arco de circunferencia es el radio multiplicado por el arco).

4. La ecuación paramétrica de un arco de elipse de radios a y b es

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

(nótese que llamamos t al parámetro porque *el ángulo que forma el vector* $(x(t), y(t))$ *con el eje OX no es* t salvo que $a = b$. El vector tangente es, pues,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a\,\mathrm{sen}\,t \\ \dot{y}(t) = b\cos t \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

y, por tanto,

$$\boxed{L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt},$$

que no puede calcularse explícitamente mediante funciones elementales.

5. La curva $y = x^n$ ya está parametrizada:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^n \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

El vector tangente es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = nt^{n-1} \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Por tanto

$$\boxed{L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}\}}\, dt}$$

que tampoco admite escritura en funciones elementales.

6. La cardioide se describió en el Ejercicio 41 y tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1 - 2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y(\theta) = a(2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta). \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

Su vector tangente es

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = 2a(\operatorname{sen}(2\theta) + \operatorname{sen}\theta) \\ \dot{y}(\theta) = 2a(\cos(2\theta) + \cos\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$

si se calcula el módulo

$$\|(\dot{x}(\theta), \dot{y}(\theta))\| = 4a\sqrt{2 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta}$$

que, utilizando la igualdad $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ puede escribirse

$$\|(\dot{x}(\theta), \dot{y}(\theta))\| = 4a\sqrt{2 + \cos\theta}.$$

Por tanto,

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} 4a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}\, d\theta}.$$

Esta integral puede calcularse "a mano" pero no vamos a hacerlo.

7. La espiral logarítmica se calculó en el Ejercicio 45 y se vio que su ecuación paramétrica puede escribirse
$$\begin{cases} x(\theta) = e^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$
(Utilizando las constantes más sencillas). Por tanto
$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\operatorname{sen}\theta = e^{\theta}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ \dot{y}(\theta) = e^{\theta}\operatorname{sen}\theta + e^{\theta}\cos\theta = e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [\alpha, \beta].$$
Así que
$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\theta}\sqrt{2}\,d\theta = \sqrt{2}\left(e^{\beta} - e^{\alpha}\right)}.$$
8. La cicloide, del Ejercicio 42, tiene como ecuaciones paramétricas las siguientes:
$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1].$$
Su vector tangente es, por tanto,
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a - a\cos t \\ \dot{y}(t) = a\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1],$$
así que
$$\boxed{L = \int_{t_0}^{t_1} a\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt},$$
que puede calcularse explícitamente pero no vamos a hacerlo.
9. Puesto que nos dan las ecuaciones, solo necesitamos calcular el vector tangente:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\rho\operatorname{sen} t \\ \dot{y}(t) = \rho\cos t \\ \dot{z}(t) = a \end{cases}$$
y la longitud para $t \in [t_0, t_1]$ queda
$$\boxed{L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho^2 + a^2}\,dt = \sqrt{\rho^2 + a^2}(t_1 - t_0)},$$
así que la longitud de un arco de espiral es proporcional al arco recorrido y es la misma que la de un arco de circunferencia de radio $\sqrt{\rho^2 + a^2}$.

10. La ecuación $xy = 1$ puede reescribirse

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1/t \end{cases}$$

y el arco que comienza en $(1, 1)$ y termina en $(l, 1/l)$ corresponde al intervalo $t \in [1, l]$. El vector tantente es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = -1/t^2 \end{cases}, \quad t \in [1, l],$$

por lo que la longitud es

$$\boxed{L = \int_1^l \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}\, dt}}.$$

Ejercicio 47. Calcular la longitud de un arco de catenaria (cuya ecuación es $y = \cosh(x)$.

Solución. En paramétricas y explícitamente

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

(Esa es la definición del coseno hiperbólico). Derivando

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh} t \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

por lo que

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t}\, dt = \operatorname{senh} b - \operatorname{senh} a.}$$

> *Nota.* En los ejercicios que siguen, si no se especifica la dirección de una trayectoria o la posición de un objeto, elíjase la que se desee.

Ejercicio 48. Se considera el campo de vectores $\vec{F} = (-x, -y)$ en el plano. Se pide calcular el trabajo realizado por dicho campo a lo largo de las siguientes trayectorias:

1. La mitad de la cardioie (desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$), se supone que la cúspide está en (0,0) y orientada hacia $x > 0$,
2. Una vuelta de una espiral logarítmica,
3. La parábola $y = x^2$ para $x \in [a, b]$,
4. La elipse completa de radios a, b,
5. El lazo del folium de Descartes con la ecuación normal,
6. Una circunferencia de radio r,
7. El arco de la hipérbola $xy = 2$ que comienza en $(1, 2)$ y termina en $(2, 1)$.

Solución. Se observará que, a diferencia del Ejercicio 46, los trabajos son, en general, integrales más sencillas que las longitudes (siempre que el campo que se integra sea razonablemente elemental).

1. Esta cardioide tiene ecuación

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,2\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

(¿por qué?), yendo desde el punto $(4, 0)$ hasta $(0, 0)$. El vector velocidad es

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = -2\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,2\theta \\ \dot{y}(\theta) = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Por tanto, el trabajo del campo $(-x, -y)$ en esa trayectoria es

$$W = \int_0^{\pi} (-1 - 2\cos\theta + \cos 2\theta, -2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta)\cdot (-2\,\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,2\theta, 2\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

que queda

$$\boxed{W = \int_0^{\pi} +2\,\mathrm{sen}\,2\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = 8}.$$

2. En paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

de donde

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

así que el trabajo del campo $(-x, -y)$ en esa trayectoria es

$$W = \int_a^b (-t, -t^2) \cdot (1, 2t)\, dt$$

es decir,

$$\boxed{W = \int_a^b -t - 2t^3\, dt = \frac{a^2 - b^2 + a^4 - b^4}{2}}.$$

3. La elipse, como se sabe, tiene las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Así que el vector velocidad es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a\,\mathrm{sen}\, t \\ \dot{y}(t) = b\cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Por tanto, el trabajo del campo $(-x, -y)$ en esa trayectoria es

$$W = \int_0^{2\pi} (-a\cos t, -b\,\mathrm{sen}\, t) \cdot (-a\,\mathrm{sen}\, t, b\cos t)\, dt$$

que da

$$\boxed{W = 0}.$$

4. Del Ejercicio 44 se deduce que el lazo del folium tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{3a}{2} \dfrac{\mathrm{sen}\, 2\theta}{\cos^3\theta + \mathrm{sen}^3\theta} \cos\theta \\[2ex] y(\theta) = \dfrac{3a}{2} \dfrac{\mathrm{sen}\, 2\theta}{\cos^3\theta + \mathrm{sen}^3\theta} \mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Pero antes de ponerse a hacer cuentas como un loco, conviene reflexionar…En lugar del lío que hemos escrito arriba, podemos poner

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Como el campo que hemos de integrar es *muy especial*, $X = (-x, -y)$, vamos a ver si hay alguna relación sencilla entre X y el vector velocidad, que es

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = \dot{\rho}(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{y}(\theta) = \dot{\rho}(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

El producto escalar de X con este vector es

$$X(\theta) \cdot (\dot{x}(\theta), \dot{y}(\theta)) = \dot{\rho}(t)\rho(\theta),$$

que es muy sencillo, independientemente de cómo sea $\rho(\theta)$. Además, visto esto:

$$W = \int_0^{\pi/2} \dot{\rho}(\theta)\rho(\theta)\, d\theta$$

que, como debería saberse da:

$$\boxed{W = \left.\frac{\rho^2(\theta)}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 0}.$$

que en este caso es 0 porque la curva describe un lazo, así que $\rho(0) = \rho(\pi/2)$.

5. *Del caso anterior y un poco de reflexión* se deduce que cualquier curva que trace un lazo da lugar a un trabajo nulo para este campo, así que

$$\boxed{W = 0}.$$

6. Este arco se puede parametrizar

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2/t \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Su vector velocidad es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = -2/t^2 \end{cases}, \quad t \in [1, 2]$$

así que

$$W = \int_1^2 \left(t, \frac{2}{t}\right) \cdot \left(1, \frac{-2}{t^2}\right) dt$$

es decir

$$\boxed{W = \int_1^2 t - \frac{4}{t^3}\, dt = 0}.$$

Ejercicio 49. Se supone que el campo gravitatorio cerca de la tierra es constante (como se supone siempre). Calcular el trabajo realizado por dicho campo al caer desde altura $h = 9$m hasta altura $h = 0$ por la parábola $y = x^2$. Misma pregunta si se cae por la recta $y = 3x$. ¿Por qué se obtiene el resultado que se obtiene?

Solución. Escribamos el campo gravitatorio como $X = (0, -g)$, donde g es constante. La primera curva puede escribirse como $(3-t, (3-t)^2)$, para $t \in [0, 3]$ (obsérvese cómo hay que escribir la curva como "yendo hacia atrás." La segunda puede parametrizarse como $(3-t, 3(3-t))$, sobre el mismo intervalo. Los trabajos respectivos son:

$$W_1 = \int_0^3 (0, -g) \cdot (-1, -2(3-t))\, dt = 2g \int_0^3 (3-t)\, dt = 9g$$
$$W_2 = \int_0^3 (0, -g) \cdot (-1, -3)\, dt = 9g$$

es decir, el mismo trabajo. Esto se debe a que el campo X es conservativo y las dos curvas tienen el mismo origen y el mismo fin. El campo es conservativo por ser constante.

Ejercicio 50. Calcular el trabajo realizado por el campo $\vec{F} = (-x, y, xz)$ a lo largo de las siguientes curvas (en un intervalo $[t_0, t_1]$):
1. Una espiral $(\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t, at)$,
2. La curva (t, t^2, t^3),
3. La curva $(\cos t, -\operatorname{sen} t, t^3)$,
4. La curva $(2 \operatorname{sen} t, 3 \cos t, t^2)$.

Solución. Sin entrar en detalles, los vectores velocidad respectivos son
1. $(-\rho \operatorname{sen} t, \rho \cos t, a)$
2. $(1, 2t, 3t^2)$
3. $(-\operatorname{sen} t, -\cos t, 3t^2)$
4. $(2\cos t, -3\cos t, 2t)$

y no hay más que calcular los trabajos de $\vec{F} = (-x, y, xz)$.
1. En el primer caso

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} (-\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t, a\rho \cos t) \cdot$$
$$(-\rho \operatorname{sen} t, \rho \cos t, a)\, dt$$

en fin

$$\boxed{W_1 = r\left(a^2 \operatorname{sen} t_1 - r\cos^2 t_1 - a^2 \operatorname{sen} t_0 + r\cos^2 t_0\right)}.$$

2. Para la segunda curva, se tiene

$$W_2 = \int_{t_0}^{t_1} \left(-t, t^2, t^4\right) \cdot \left(1, 2t, 3t^2\right)\, dt =$$
$$\boxed{\frac{6\left(t_1^7 - t_0^7\right) + 7\left(t_1^4 - t_0^4\right) - 7\left(t_1^2 - t_0\right)}{14}}.$$

3. En este caso,

$$\boxed{\begin{array}{l} W_3 = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \big(-\cos t, -\operatorname{sen} t, t^3 \cos t\big) \cdot \\ \big(-\operatorname{sen} t, \cos t, 3t^2 \cos t\big)\ dt \end{array}}$$

que dejamos indicado por su pesadez.

4. Finalmente,

$$W_4 = \int_{t_0}^{t_1} (-2\cos t, -3\cos t, 4t\cos t) \cdot$$
$$(2\cos t, -3\cos t, 2t)\ dt$$

que da

$$\boxed{W_4 = \int_{t_0}^{t_1} 5\cos^2 t + 8t^2 \cos t\, dt}$$

que dejamos indicada por su pesadez.

Ejercicio 51. Si el campo $F = (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ representa aproximadamente el de un punto de masa, calcular el trabajo requerido para desplazarse a lo largo de un arco de la espiral $\rho = \theta$ para $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Misma pregunta para el arco de la cardioide desde $\theta = \pi/4$ hasta $\theta = \pi$. Misma pregunta para una circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

Solución. Hay dos maneras de hacer este ejercicio.

Primera forma: La primera es "sin pensar", tomando la definición y echando cuentas, que es lo que hacemos a continuación. Las parametrizaciones y vectores velocidad son las siguientes, en cada caso:

1. Para la espiral:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = \theta\cos\theta \\ y(\theta) = \theta\operatorname{sen}\theta \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(\theta) = \cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta \\ \dot{y}(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta \end{array} \right.$$

2. Para la cardioide

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = 1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(\theta) = -2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta \\ \dot{y}(\theta) = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \end{array} \right.$$

3. Para la circunferencia

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\theta) = 2\cos\theta \\ y(\theta) = 2\operatorname{sen}\theta \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(\theta) = -2\operatorname{sen}\theta \\ \dot{y}(\theta) = 2\cos\theta \end{array} \right.$$

Por tanto el primer trabajo es

$$W_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\frac{-\theta \cos\theta}{\theta^2}, \frac{-\theta \operatorname{sen}\theta}{\theta^2} \right) \cdot$$
$$\cos\theta - \theta \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta)\, d\theta$$

que queda

$$\boxed{W_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{-1}{\theta}\, dt = \log\frac{t_0}{t_1}}.$$

4. En el caso de la cardiodie las cuentas parecen más largas pero si se realizan con cuidado, queda

$$W_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left(\frac{-1 - 2\cos\theta - \cos 2\theta}{8\cos\theta + 2\cos 2\theta + 6}, \frac{-2\sin\theta - \sin 2\theta}{8\cos\theta + 2\cos 2\theta + 6} \right) \cdot$$
$$(-2\sin\theta - 2\sin 2\theta, 2\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

que queda (tras un buen trabajo...)

$$W_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin 2\theta}{8\cos\theta + 2\cos 2\theta + 6}\, d\theta$$

que se deja al alumno su cálculo…
5. Finalmente, para la circunferencia queda

$$W_3 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\cos\theta}{4}, \frac{-2\operatorname{sen}\theta}{4} \right) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta)\, d\theta$$

que da

$$\boxed{W_3 = 0}.$$

Segunda forma: La segunda manera de enfrentarse a este ejercicio es, *antes de ponerse a echar cuentas, tratar de estudiar el campo y las curvas*. Un campo con una simetría tan grande como el que se propone ha de tener propiedades relevantes. En concreto, si escribimos $X = (F(x,y), G(x,y))$, se verifica que

$$\frac{\partial F}{y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial G}{x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

que son iguales. Esto significa que el campo X es, en el conjunto en que esté definido, *conservativo*. Pero X está definido en todo $\mathbb{R}^2$ menos en el origen. Como consecuencia

Resultado: El trabajo de X en cualquier curva que no rodee al origen "de manera cerrada" es 0.

El "de manera cerrada" significa que no contenga un lazo alrededor del origen. En este problema: la espiral (suponiendo que $\theta_0 > 0$, pues si no X no está definido en θ_0, claro) no tiene lazos, y el arco de cardioide descrito tampoco, así que en ambos casos el trabajo es 0 (sin calcular nignuna integral).

En el caso de la circunferencia, *hay que calcular la integral* puesto que rodea el punto en que X no está definido de manera cerrada y no se puede saber (con nuestras herramientas) cuánto vale el trabajo sin realizar el cálculo.

Ejercicio 52. Mismas preguntas que en el ejercicio anterior pero para el campo central $F = (-y, x)$.

Solución. Este campo *no es conservativo* (pues las parciales cruzadas no son iguales), así que en princpio se deben realizar todos los cálculos.

1. Para la espiral, queda

$$W_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (-\theta \operatorname{sen}\theta, \theta\cos\theta) \cdot (\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta)\, d\theta$$

   que da

$$\boxed{W_1 = \frac{t_1^3 - t_0^3}{3}}.$$

2. Para la cardioide,

$$\begin{aligned} W_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} &(1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta, 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta)\cdot \\ &(-2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}2\theta, 2\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

   que, tras arduos cálculos da

$$\boxed{W_2 = -3 - 2\sqrt{2}}.$$

3. Y, finalmente, para la circunferencia

$$\boxed{W_3 = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta)\, d\theta = 8\pi}$$

Ejercicio 53. Calcular el área de la superficie esférica de radio R.

Solución. Realizaremos el ejercicio de dos maneras: en cartesianas y en coordenadas adaptadas a la esfera (latitud y longitud, por así decir).

En cartesianas: Una esfera de radio R es dos veces una semiesfera. El hemisferio "norte" de la esfera centrada en el origen puede parametrizarse como

$$\eta(u,v) \equiv \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases} , \quad u \in [-R,R], v \in [-\sqrt{R^2-u^2}, \sqrt{R^2-u^2}]$$

(es decir, como se ve una bóveda "desde abajo": para cada punto (x,y) del disco horizontal, hay uno de la bóveda a una altura z). Con esta parametrización, se calcula el vector normal utilizando las derivadas parciales de cada coordenada:

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

y el elemento de superficie (la norma de este vector) es

$$\|d\vec{\eta}\| = \frac{|R|}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}.$$

Solo queda integrar este elemento de superficie en el disco (y multiplicar por dos, pues solo estamos haciendo un hemisferio):

$$\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-u^2}}^{\sqrt{R^2-u^2}} \frac{|R|}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} \, dv \, du = 2\pi R^2.$$

(Claro que esta integral *hay que hacerla*). Así que

$$\boxed{S = 2 \cdot 2\pi R^2} = 4\pi R^2,$$

valor bien conocido.

Latitud-Longitud: La superficie esférica tiene unas coordenadas naturales, que son el ángulo de latitud y la "longitud" o azimut (medido desde el polo norte). Con estas dos variables puede parametrizarse así

$$\eta(\theta,\varphi) \equiv \begin{cases} x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} , \quad \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi]$$

y el vector normal queda

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -R\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} =$$
$$R^2 \left(-cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi, \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\right)$$

cuya norma es

$$\|d\vec{\eta}\| = R^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

Por tanto, el área de la esfera (entera) es

$$\boxed{S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2}.$$

Como se ve, es mucho más natural la operación con ángulos que en coordenadas cartesianas (aparte de no requerir consideraciones sobre dividir la esfera, signos, etc…).

Ejercicio 54. Calcular el área de un cilindro de altura h y radio R.

Solución. La coordenadas más naturales que parametrizan un cilindro son, obviamente, la altura y el ángulo de cada punto de la superficie. Así pues, escribimos

$$\eta(\theta, z) \equiv \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, h].$$

Con esta parametrización, el vector normal se calcula muy fácilmente

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\operatorname{sen}\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0),$$

cuya norma es

$$\|d\dot{\eta}\| = R.$$

(Esto quiere decir que “todos los elementos de superficie del cilindro son iguales respecto de la parametrización”, si tomáramos el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, h]$ y lo deformáramos en el cilindro pedido, lo que ocurriría es que todos los rectángulos infinitesimales $d\theta dz$ se estirarían lo mismo: el radio R).

El cálculo de la superficie es una integral constante:

$$\boxed{S = \int_0^{2\pi}\int_0^h R\,dz\,d\theta = 2\pi R^2}.$$

Es decir, el área externa de un cilindro es la longitud de la circunferencia base multiplicada por la altura. Esto es así precisamente porque el cilindro es totalmente perpendicular a la circunferencia base.

Ejercicio 55. Calcular el área de un cono de altura h y radio R.

Solución. Necesitamos conocer la ecuación de una recta que suba h unidades recorriendo R en horizontal. Esta es la definición de "pendiente". Es decir

$$z = \frac{h}{R}r$$

si r es la distancia al origen y z mide la altura. Como se ve, estamos poniendo el cono "boca abajo" pero la superficie no cambia. El cono es la revolución de esta recta alrededor del eje OZ, así que si r es la "distancia al eje OZ" y θ es el ángulo, se tiene la siguiente parametrización

$$\eta(r,\theta) \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = \frac{h}{R}r \end{cases}, \quad r \in [0,R], \theta \in [0,2\pi]$$

(obsérvese como z depende de r, cosa que no ocurría en el cilindro). De aquí sale

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \frac{h}{R} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R}\left(-hr\cos\theta, hr\operatorname{sen}\theta, rR\right)$$

cuya norma es

$$\|\vec{\eta}\| = \frac{r\sqrt{R^2+h^2}}{R}.$$

De aquí que la superficie del cono *sin contar el círculo superior*, que no nos interesa, es:

$$\boxed{S = \int_0^R\int_0^{2\pi} r\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}\,d\theta, dr = \pi R\sqrt{R^2+h^2}}.$$

(Que, como curiosidad, coincide con el área de una elipse de radios R y $\sqrt{R^2+h^2}$: el cateto horizontal y la hipotenusa del triángulo rectángulo dado por la generatriz y los ejes).

Ejercicio 56. Calcular el área de la zona del hiperboloide que está entre los planos $z=0$ y $z=1$. Se supone que a y c son constantes positivas.

$$\begin{aligned} x(u,v)&=a(\cos u + v \operatorname{sen} u)\\ y(u,v)&=a(\operatorname{sen} u - v\cos u)\\ z(u,v)&=cv \end{aligned} \tag{2.1}$$

Solución. Habrá que calcular para qué valores de u y v está z en esos límites. Pero no hay límite para u, pues z no depende de él. Los límites, por tanto, son, para v: $v \in [0, 1/c]$.

Está claro que para v fijo, las funciones $x(u,v)$ e $y(u,v)$ son periódicas de periodo 2π (¿por que?), así que si se quiere parametrizar solo una vez la dicha superficie, se ha de limitar u a un periodo: $u \in [0, 2\pi]$.

El vector normal se calcula ahora fácilmente:

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ a(-senu + v\cos u) & a(\cos u + v \operatorname{sen} u) & 0 \\ a \operatorname{sen} u & a\cos u & c \end{vmatrix} =$$
$$a\left(c(v\operatorname{sen} u + \cos u), -c(v\cos u) - \operatorname{sen} u), -av\right)$$

cuyo determinante es

$$\|d\dot{\eta}\| = a^2\sqrt{a^2 + v^2(a^2+c^2)}.$$

Ahora se puede calcular el área, teniendo en cuenta los límites de integración determinados antes:

$$\boxed{S = a^2 \int_0^{1/c}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+v^2(a^2+c^2)}\, du\, dv}.$$

Ejercicio 57. Un *toro* de radios r y R, con $r<R$, tiene por ecuaciones

$$\eta \equiv \begin{cases} x(u,v)=(R+r\cos v)\cos u \\ y(u,v)=(R+r\cos v)\operatorname{sen} u \\ z(u,v)=r\operatorname{sen} v \end{cases}$$

con $u \in [0,2\pi]$ y $v \in [0,2\pi]$. Calcular su área. Calcular el área de un arco de toro (es decir, para $u \in [\alpha, \beta]$ y $v \in [0, 2\pi]$.

Solución. Calcularemos el área de un arco y de ahí deduciremos el del toro completo poniendo $r \in [0, 2\pi]$.

El vector normal es:

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen} u(R + r\cos v) & \cos u(R + r\cos v) & 0 \\ -r\cos u \operatorname{sen} v & -r\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & r\cos v \end{vmatrix} =$$

$$r\cos v\,(R\cos u + r\cos u\cos v, R\operatorname{sen} u + r\operatorname{sen} u\cos v, (R + r)\operatorname{sen} v)$$

y su norma es

$$\|d\dot{\eta} = r(R + \cos(v))\|.$$

De aquí que el área de un arco de toro sale

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{2\pi} r(R + \cos v)\,dv\,du = 2\pi(\beta - \alpha)rR},$$

que es el producto de la longitud de la circunferencia "pequeña" por la de la grande. El área del toro completo es

$$\boxed{S = 4\pi^2 rR},$$

el producto de la longitud de las dos circunferencias.

Ejercicio 58. Calular ∇f para las funciones $f = \rho$, $f = \frac{1}{\rho}$, $f = \rho^2$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Expresar el resultado (hasta dentro de lo posible) en función de ρ.

Solución. El operador Nabla (cuyo símbolo ∇ *no es* una letra griega) indica, aplicado a funciones, el *gradiente*: el vector de las parciales *respecto de las coordenadas cartesianas*. En este ejercicio se tiene:

1. Para el primer caso

$$\boxed{\nabla\rho = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{1}{\rho}\,(x, y, z)}.$$

Obsérvese que su norma

$$\|\nabla\rho\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2}} = 1$$

es constante.

2. La función inversa de la distancia al origen $\frac{1}{\rho}$ tiene como gradiente:

$$\boxed{\nabla \frac{1}{\rho} = \frac{-1}{\rho^3}\,(x, y, z)}.$$

   Su norma es

$$\|\nabla \frac{1}{\rho}\| = \frac{1}{\rho^2}.$$

3. Finalmente, la función $f = \rho^2$ tiene por gradiente

$$\boxed{\nabla \rho^2 = 2(x, y, z)}.$$

Téngase en cuenta que la expresión (x, y, z) en todas las respuestas anteriores es *el campo de vectores que, en cada punto, vale el vector* (x, y, z).

Ejercicio 59. Calcular la divergencia del campo radial $\vec{F} = (x, y, z)$.

Solución. La divergencia de un campo de vectores $F = (F_x, F_y, F_z)$, denotada $\nabla \cdot F$, puede calcularse así:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(F_x, F_y, F_z\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

la suma de las parciales de cada componente con respecto a la variable correspondiente.

En el caso que nos ocupa

$$\boxed{\nabla \cdot (x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3}.$$

Esto significa que, en cada punto del espacio, el campo de vectores (x, y, z) tiende a "salir del punto" a razón de "tres unidades de campo por unidad de longitud." Por ejemplo, alrededor del origen el campo es "como una fuente": consiste en flechas que se alejan del origen. En otros puntos las flechas entran y salen del punto pero "tienden a salir más que a entrar": es decir, todos los puntos son, en total, fuentes, para este campo.

Ejercicio 60. Si $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, calcular $\nabla \cdot F$ para $F = \rho v$, donde v es un vector constante de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Lo que se pide calcular es la divergencia (un escalar). Un vector constante puede escribirse $v = (c, c, c)$ para $c \in \mathbb{R}$, así que el campo será

$$F = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(c, c, c).$$

La divergencia, cuya definición se da en 59, requiere calcular las parciales de cada componente, en este caso

$$\nabla \cdot F = c\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

es decir,

$$\boxed{\nabla \cdot F = c\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}.$$

> *Nota.* En los ejercicios que siguen, si no se especifica la orientación de la superficie respecto del campo, se supone que se puede tomar cualquiera.

Ejercicio 61. Hallar el flujo del campo $F = (x^2, y^2, z^2)$ en la superficie de la esfera S de centro origen y radio R.

Solución. Hagamos el ejercicio de dos modos: con cuentas (largas) y sin ellas.

Con cuentas: Necesitamos la parametrización de la esfera, que se puede encontrar en el Ejercicio 53. Utilizaremos la angular:

$$\eta(\theta,\varphi) \equiv \begin{cases} x = R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi]$$

cuyo vector normal da

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -R\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} =$$

$$R^2\left(-cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi, \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right).$$

Ahora, el flujo no es más que la integral del producto escalar de ambos campos de vectores en la superficie:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_S(F) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & R^2\left(\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta, \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta, \cos^2\varphi\right)\cdot \\ & R^2\left(\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi, \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right)\, d\theta\, d\varphi = 0\end{aligned}}$$

(se puede ver que da cero con un argumento de simetría).

Sin cuentas: Este ejercicio puede resolverse sin tantas cuentas mediante el siguiente razonamiento:

La parametrización de la esfera produce un vector normal que apunta o bien siempre "hacia dentro" o bien siempre "hacia afuera." Supongamos que ocurre lo primero. El módulo del vector normal es constante (esto debería ser sencillo de comprobar) y la dirección es perpendicular a la esfera.

El campo (x^2, y^2, z^2) tiene la siguiente propiedad. Sea (x, y, z) un punto cualquiera de la esfera; el producto escalar del vector normal $d\vec{\eta}$ por el campo tendrá un valor real c. Considérese el punto antipodal $(-x, -y, -z)$: en este punto, el vector normal a la esfera *apunta en la dirección opuesta* y tiene el mismo módulo. Sin embargo, el vector (x^2, y^2, z^2) es el mismo; por tanto, el producto escalar es igual pero de signo contrario. Como cada punto tienen una antípoda, todos los flujos en cada punto se anulan con los de su antípoda y el flujo total es 0.

La solución que se acaba de explicar requiere *que el campo valga lo mismo* en abmos puntos y que *el vector normal* sea opuesto. Si no fuera así, el razonamiento no serviría.

Ejercicio 62. Hallar el valor de $\int_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS$ donde S es la superficie del cono de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, para $0 \leq z \leq b$.

Solución. Lógicamente, hace falta parametrizar el cono y calcular los límites de las variables. La ecuación del cono puede escribirse

$$\frac{z^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}\left(x^2+y^2\right)$$

y esta expresión hace natural parametrizarlo como

$$\eta(r,\theta) = \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = ar\operatorname{sen}\theta \\ z = br \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], r \in [0,1]$$

(la última condición, $r \in [0,1]$ es porque se dice en el enunciado que $z \in [0, b]$).

De aquí sale que

$$d\vec{\eta} = d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\theta & a\operatorname{sen}\theta & b \\ -ar\operatorname{sen}\theta & ar\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = ar\left(-b\cos\theta, -b\operatorname{sen}\theta, a\right)$$

cuyo módulo es

$$d\eta = ra\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

y, por lo tanto, la integral es

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot ra\sqrt{(a^2 + b^2)}\, dr\, d\theta$$

que vale

$$\boxed{S = \frac{a\sqrt{(a^2 + b^2)}}{3}}.$$

Nota. En los ejercicios que siguen, a veces se utilizan flechas sobre los elementos de curva, $d\vec{\gamma}$ y de superficie $d\vec{S}$, solamente para comodidad del lector, no son necesarios.
Recordatorio brevísimo. Dado un campo de vectores $\vec{X}$, una superficie S y una curva γ que rodea a la superficie en sentido positivo, se tiene:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{X}\, d\vec{S} = \int_\gamma \vec{X}\, d\vec{\gamma}$$

(Fórmula de Stokes).
Por otro lado, si U es un dominio rodeado por la superficie S, entonces

$$\int_U \vec{\nabla} \cdot \vec{X}\, dx\, dy\, dz = \int_S \vec{X}\, d\vec{S}$$

donde se entiende que el vector $d\vec{S}$ apunta hacia el exterior de la superficie. (Fórmula de Gauss o de la Divergencia).

Ejercicio 63 (Piskunov pág. 814)**.** Utilizar la fórmula de Stokes para reescribir o calcular las siguientes integrales de dos maneras distintas (se supone que γ es el borde de una superficie S, recorrido en sentido positivo):

1. $\int_\gamma y\, dx + z\, dy + x\, dz$
2. $\int_\gamma (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$ donde γ es la intersección de una circunferencia de radio a centrada en el origen y el plano $x + y + z = 0$.
3. $\int_\gamma x^2 y^3\, dx + dy + z\, dz$ donde γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y el plano $z = 0$.

Solución. Vamos de uno en uno.

1. Esta integral se convierte, por la fórmula de Stokes, en

$$\boxed{\int_S \vec{\nabla} \times (y,z,x)\, d\vec{S} = \int_S (-1,-1,-1)\, d\vec{S}}.$$

2. En este caso la divergencia del campo es

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

   Por tanto, el trabajo del enunciado es $\boxed{0}$.

3. La divergencia del campo

$$\vec{X} = \left(x^2y^3, 1, z\right)$$

   es

$$\nabla \times \vec{X} = \left(0,0,-3x^2y^2\right)$$

   Así que la integral del enunciado es igual a

$$\int_S \left(0,0,-3x^2y^2\right)\, d\vec{S}.$$

   La superficie S es el círculo de radio R centrado en el origen y contenido en el plano $z = 0$. Utilizando coordenadas adecuadas, se puede parametrizar como

$$\vec{\eta} \equiv \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 0 \end{cases}, \quad r \in [0,R], \theta \in [0,2\pi],$$

   cuyo vector normal es

$$d\vec{\eta} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)\,.$$

   Por tanto, la integral del enunciado vale

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{-3\pi R^5}{20}}.$$

Ejercicio 64 (Piskunov pág. 814)**.** ¿Cuánto vale la integral $\int_S (x,y,z)\, d\vec{S}$ si S es una superficie cerrada (que encierra un volumen V finito)?

Solución. Utilizando la fórmula de Gauss,

$$\boxed{\int_S (x,y,z)\, d\vec{S} = \int_V 1+1+1\, dx\, dy\, dz = 3\,\mathrm{vol}(V)}.$$

Ejercicio 65. Calcular el área del lazo del folium de Descrates, que tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\ \ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in [0,\infty].$$

Solución. Lógicamente, parece natural utilizar la fórmula de Green para esto:

$$\int (-y,x)\, d\vec{\gamma} = \int_U 2\, dx\, dy = 2\mathrm{A}(U),$$

donde U es el dominio limitado por la curva. El vector tangente a γ es

$$d\vec{\gamma} = \left(\frac{6at^3 - 3a}{(1+t^3)^2}, \frac{-3at^4 - 6at}{(1+t^3)^2} \right),$$

por tanto

$$\int (-y,x)\, d\vec{\gamma} = \int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\, dt = 3a^2.$$

Así que el área del folium es

$$\boxed{A = \frac{3a^2}{2}}.$$

Ejercicio 66 (Ibid.)**.** Como el ejercicio anterior, para la cuva de ecuaciones $x = a(1-\operatorname{sen} t), y = a(1-\cos t)$ para $t \in [0, 2\pi]$. ¿Qué curva es esta?

Solución. La fórmula de Green dice que

$$\int_\gamma (-y,x) d\vec{\gamma} = \int_U 2\, dx\, dy,$$

donde U es el recinto delimitado por la curva en cuestión. En este caso, para verificar que es un lazo, comprobamos fácilmente que $x(2\pi) = x(0)$ y que $y(2\pi) = y(0)$ —si no, la curva no es un lazo.

Una vez visto esto, se tiene que

$$2A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-a(1-\cos t), a(1-\operatorname{sen} t)) \cdot (-\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt =$$
$$a\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + cos t - 1) = -a.$$

Esto significa que γ recorre el recinto U en sentido horario. El área de U es

$$\boxed{A = \frac{a}{2}}.$$

La curva es una circunferencia de radio a centrada en (a, a):

$$\gamma \equiv \begin{cases} x = a - a\operatorname{sen} t = a + a\cos(\pi/2 - t) \\ y = a - a\cos t = a - a\operatorname{sen}(\pi/2 - t) \end{cases}$$

que justamente da la vuelta en sentido horario por el signo negativo del seno.

Ejercicio 67 (Piskunov 815)**.** Utilizar la fórmula de Gauss para transformar las siguientes integrales de superficie en integrales de volumen ("suficientemente normal" significa al menos diferenciable dos veces con continuidad), suponiendo que S rodea un dominio tridimensional U.

1. $\displaystyle\int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)(1,1,1)\, dS$
2. $\displaystyle\int_S (xy, yz, xz)\, dS$
3. $\displaystyle\int_S \nabla f\, dS$, para f una función suficientemente normal.

Solución. 1. La divergencia del vector integrando es

$$\vec{\nabla} \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)(1,1,1) = 2(x + y + z)$$

así que

$$\boxed{\int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)(1,1,1)\, dS = 2\int_U (x + y + z)\, dx\, dy\, dz}.$$

2. La divergencia del integrando es

$$\vec{\nabla} \cdot (xy, yz, xz) = x + y + z$$

así que

$$\boxed{\int_S (xy, yz, xz)\, dS = \int_U x + y + z\, dx\, dy\, dz}.$$

3. Como el campo gradiente es

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

su divergencia es

$$\vec{\nabla} \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

(que se llama "laplaciano de f" y se escribe Δf). Por tanto,

$$\boxed{\int_S \nabla f = \int_U \Delta f \, dx \, dy \, dz}.$$

Ejercicio 68 (Ibíd)**.** Con ayuda de la fórmula de Gauss, calcular las siguientes integrales:

1. $\int_S \left(x^2, y^2, z^2\right) \, dS$, donde S es el cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, z \in [0, b]$
2. $\int_S (x, y, z) \, dS$ donde S es un cilindro de radio a y altura h con eje OZ.

Solución. 1. Primero calculamos la divergencia del campo:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(x^2, y^2, z^2\right) = 2x + 2x + 2z$$

por tanto

$$int_S \left(x^2, y^2, z^2\right) \, dS = 2 \int_U x + y + z \, dx \, dy \, dz$$

en el cono *sólido*. Una parametrización de este es (en cilíndricas):

$$\Phi \equiv \begin{cases} x = ar \cos\theta \\ y = ar \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}, \quad z \in [0, b], r \in [0, z/b], \theta \in [0, 2\pi].$$

Por tanto, la integral que se pide es (atención al Jacobiano $|J(Phi)| = r$:

$$I = 2 \int_0^b \int_0^{z/b} \int_0^{2\pi} (ar \cos\theta + ar \operatorname{sen}\theta + z) \, r \, d\theta \, dr \, dz,$$

así que

$$\boxed{I = \frac{\pi b^2}{2}}.$$

2. La divergencia del campo (x, y, z) es bien conocida: 3. Así que la integral pedida es

$$\int_S (x, y, z)\, dS = \int_U 3\, dx\, dy\, dz$$

donde U es el cilindro. Pero, claramente, esta integral es el triple del volumen de U, así que

$$\boxed{I = 3\pi a^2 h},$$

tres veces el volumen de un cilindro de radio a y altura h.

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales

Nota. Las ecuaciones diferenciales fundamentales que se utilizan en el curso son:

1. El *principio de conservación de la masa*. En un sistema en el que hay entrada y salida de masa con flujos respectivos
$$\phi_<(t),\ \phi_>(t)$$
(flujo de entrada y flujo de salida, en unidades de masa por unidad de tiempo), si la masa en el sistema en el instante t es $m(t)$, entonces
$$\frac{dm(t)}{dt} = \phi_<(t) - \phi_>(t)$$
pues, claramente,
$$dm(t) = (\phi_<(t) - \phi_>(t))\ dt$$
(esta igualdad es, precisamente, el principio de conservación de la masa). Como se ve, esta ley es de primer orden.
2. La *segunda Ley de Newton*. Un sistema mecánico compuesto por una partícula, que ocupa una posición $x(t)$, sujeta a una familia de fuerzas $F_1(t), \ldots, F_n(t)$ (que pueden variar en función del

tiempo) cumple la siguiente ley:

$$\ddot{x}(t) = m(t)\,(F_1(t) + \cdots + F_n(t))$$

donde $m(t)$ es la masa de la partícula en el instante t (puede variar, por ejemplo, en un cohete que gasta combustible).

3. La ley del *interés*. Si un capital $c(t)$ está depositado a un interés en tiempo continuo de $r(t)$ —podría variar con el tiempo— y se le añade más capital con un flujo de $\phi_<(t)$ y se gasta con un flujo $\phi_>(t)$, entonces

$$\frac{dc(t)}{dt} = \phi_<(t) - \phi_>(t) + c(t)r(t),$$

que es una ecuación de primer orden. El flujo de entrada $\phi_<(t)$ se puede entender como una inversión periodica y el de salida como un gasto periodico.

4. La ley de *enfriamiento* de Newton. Un cuerpo que posee una temperatura $T(t)$ en un ambiente a temperatura $A(t)$ que está más frío, pierde temperatura de manera proporcional al gradiente:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - A(t)).$$

La constante k depende de la materia de que está formado el cuerpo (y, también de la superficie expuesta al ambiente, pero esto se obvia).

Por otro lado, la ecuación diferencial

$$y' + ay = b \tag{3.1}$$

donde a y b son constantes tiene como solución general:

$$y = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$$

donde k es una constante que depende de la condición inicial:

$$k = y(0) - \frac{b}{a}.$$

Esta solución de esta ecuación diferencial es sencilla de derivar (se puede ver en los apuntes de teoría varias veces).

Ejercicio 69. Una piscina con 1000l de agua contiene una disolución de alcohol al 1% en volumen. Tiene una salida por la que desagua a 1l/s y una entrada por la que se vierte la misma cantidad de agua pero con una concentración de alcohol del 3% en volumen. Escribir la evolución de la concentración dentro de la piscina, calcular en qué momento llega al 2% y calcular la concentración tras 1h. La densidad del alcohol es $0.79\text{g}/\text{cm}^3$.

¿Es el volumen de la piscina relevante para el problema?

Solución. Llamemos $m(t)$ a la *masa* de alcohol (en kg) en la piscina en el instante t. Por el principio de conservación de la masa (ver página 76), $m(t)$ cumple que

$$\frac{dm(t)}{dt} = \phi_<(t) - \phi_>(t)$$

donde $\phi_<(t)$ es el flujo entrante y $\phi_>(t)$ el flujo saliente (ambos con dimensiones MT^{-1}, claro). Calculemos estos flujos. El de entrada:

$$\phi_<(t) = 3\% \cdot 1\text{l/s} \cdot 0.789\text{kg/l} = 0.02367\text{kg/s}.$$

El de salida: la concentración es la que hay en la piscina en ese momento, que será $m(t)$ kilogramos dividido entre 1000l. Así que

$$\phi_>(t) = \frac{m(t)\text{kg}}{1000\text{l}} \cdot 1\text{l/s} = m(t)\text{kg/s}.$$

Por tanto:

$$\frac{dm(t)}{dt} = 0.02367 - m(t).$$

Esta ecuación diferencial está resuelta en general en la página (3.1). En este caso, tenemos

$$y' + y = 0.02367,$$

por tanto

$$y(t) = y(0) \cdot 0.02367e^t + 0.02367,$$

que está en unidades de masa. La masa inicial es $y(0)$, que se nos dice corresponde a un 1% en volumen, es decir $10\text{l} \times 0.79\text{kg/l} = 7.9\text{kg}$. Por tanto

$$m(t) = 0.186993e^t + 0.02367.$$

Se nos pregunta cuándo llega la concentración al 2%, es decir (puesto que la piscina tiene 1000l), cuándo hay 20l de alcohol, o lo que es lo mismo, $20 \cdot 0.79 = 15.8\text{kb}$ de alcohol.

Ejercicio 70. El periodo de semidesintegración del radio es de 1600 años. Se parte de una masa de 2g. Calcúlese en qué momento se tendrán $1.99g$. ¿Qué masa habrá dentro de 100 años?

Misma pregunta con el plutonio 238, cuyo periodo de semidesintegración es 88 años.

Solución. La ecuación de la radiación (y del decaímiento radiactivo) es del mismo tipo que la del enfriamiento. Si la masa en un instante t es $m(t)$, entonces

$$\dot{m}(t) = -km(t)$$

donde $k > 0$ es una constante que es intrínseca a la sustancia radiactiva. (Obsérvese que la ecuación es la misma que la del enfriamiento si el entorno está a $0°$). Como se sabe, la solución de esta ecuación es

$$m(t) = m(0)e^{-kt}, \tag{3.2}$$

donde $m(0)$ es la masa inicial.

La constante k tiene que ver con el periodo de semidesintegración de la manera que sigue: el periodo de semidesintegración T es el tiempo en que una masa m de una sustancia radiactiva se desintegra hasta quedar en masa $m/2$ (la mitad). Es decir,

$$m(T) = \frac{m(0)}{2}.$$

Pero por otro lado, por (3.2), se tiene que

$$m(T) = m(0)e^{-kT},$$

por lo que

$$m(0)e^{-kT} = \frac{m(0)}{2} \Longrightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Longrightarrow kT = \log 2 \Longrightarrow k = \frac{\log 2}{T}.$$

Así pues, conocido el periodo de semidesintegración, se conoce la constante que dicta la evolución de la masa según la ecuación (3.2).

Si las unidades de tiempo se establecen como años, entonces la evolución de una masa de radio es:

$$\dot{m}(t) = -\frac{\log 2}{1600}m(t),$$

cuya solución es, para $m(0) = 2\text{g}$,

$$\boxed{m(t) = 2e^{-0.000433t} \Longrightarrow t \simeq 0.9954},$$

es decir, unos 363 días (casi un año).

Para conocer la masa al cabo de 100 años, no hay más que sustituir t por 100 en la fórmula anterior:

$$\boxed{m(100) \simeq 1.915\text{g}}.$$

Para el plutionio 238 sirven las mismas fórmulas:

$$k = \frac{\log 2}{88} \simeq 0.00788,$$

por lo que

$$m(t) \simeq 2e^{-0.00788t}.$$

El momento en que $m(t) = 1.99$ se calcula como

$$\boxed{1.99 = 2e^{-0.00788t} \Longrightarrow t \simeq 0.005},$$

que es 1.825 días. Dentro de 100 años habrá

$$\boxed{m(100) \simeq 2e^{-0.788} \simeq 0.9095\text{g}},$$

menos de la mitad de lo que había (claro).

Ejercicio 71. Una inversión (a interés compuesto en tiempo continuo) comenzó con 100 Euros y al cabo de cinco años consiste en 120 Euros. Calcular el tipo interés.

Solución. Como se explica en la página 77, la ecuación del interés compuesto a tiempo continuo (sin inversión ni gastos añadidos) es, si $c(t)$ es el capital en tiempo t:

$$\dot{c}(t) = rc(t),$$

donde r es el tipo de interés (que se supone constante). La solución de esta ecuación es conocida

$$c(t) = c(0)e^{rt}.$$

En este problema se pide calcular el tipo de interés sabiendo la inversión inicial y el capital al cabo de un tiempo. Si las unidades de tiempo son años, entonces se nos dice que

$$120 = 100e^{5r},$$

por lo que

$$\boxed{e^{5r} = 1.2 \Longrightarrow r = \log 1.2/5 \Longrightarrow r \simeq 0.036 = 3.6\%/\text{año}},$$

que es un interés no demasiado malo (pero sí malo) en el año 2016.

Ejercicio 72. Calcular a partir de qué tiempo compensa más invertir 1000 Euros al 8% anual (interés compuesto continuo) que 1500 Euros al 4% anual.

Solución. La ecuación del interés sin inversión ni gasto es

$$\dot{c}(t) = rc(t),$$

para un capital $c(t)$ en el momento t. La solución es conocida:

$$c(t) = c(0)e^{rt},$$

donde $c(0)$ es el capital inicial. Por tanto, la primera inversión $c_1(t)$ sigue la ley

$$c_1(t) = 1000e^{0.08t}$$

mientras que la segunda sigue la ley

$$c_2 = 1500e^{0.05t}.$$

Está claro que $c_1(0) < c_2(0)$ y el problema nos pide calcular cuándo $c_1(t) = c_2(t)$, puesto que las curvas de sendas fórmulas solo se cortan una vez (¿por qué?). Así que hay que resolver

$$\boxed{1000e^{0.08t} = 1500e^{0.05t} \Longrightarrow t \simeq 13.52}.$$

Por tanto, la primera inversión compensa más que la segunda a partir de la mitad del año decimocuarto.

Ejercicio 73. De un muelle de 1m (de peso irrelevante) cuelga una masa de 1kg. La constante de Hooke del muelle es $30N/m$. Calcular la posición del muelle al cabo de $2s$ si se parte de la posición de reposo del muelle a velocidad 0. Obviar el rozamiento. La aceleración gravitatoria es 10m/s^2.

Solución. Este es un problema sencillo de la Segunda Ley de Newton (ver página 76). Solo hay dos fuerzas actuando, como se ve en la Figura 3.1: la gravedad y la de Hooke.

Coloquemos el origen de coordenadas en la unión del muelle con el techo y hagamos que $y > 0$ hacia abajo (cuidado con esta orientación). Sea $y(t)$ la posición del centro del cuerpo en el instante t.

Según la Segunda Ley de Newton,

$$1 \cdot \ddot{y}(t) = F_H + F_g = -30(y(t) - 1) + 10 \cdot 1.$$

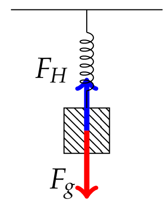

Figura 3.1: Representación gráfica del problema 73. Solo hay dos fuerzas actuando: la gravedad y la de Hooke. La de Hooke se ha puesto hacia arriba pero hay momentos en que irá en el mismo sentido que la gravedad.

Expliquemos los signos: a la izquierda no hay más que “masa” por “aceleración.” A la derecha: la fuerza del muelle siempre va *contra* la elongación. Por eso la constante de Hooke multiplicada por la posición siempre lleva un signo negativo. Téngase en cuenta que la elongación no es $y(t)$ sino la diferencia entre esta y la longitud del muelle. La fuerza de la gravedad tiene signo positivo porque la coordenada $y(t)$ crece en el mismo sentido en que dicha fuerza (hacia abajo).

Sin unidades y escribiéndola como una ecuación de segundo orden lineal:

$$\ddot{y}(t) + 30y(t) = 40. \tag{3.3}$$

La ecuación característica es

$$T^2 + 30 = 0$$

que tiene por raíces

$$T = \pm\sqrt{30}i.$$

La solución general de la ecuación (3.3) es

$$y(t) = k_1 \operatorname{sen} \sqrt{30}t + k_2 \cos \sqrt{30}t + \frac{4}{3}.$$

Solo queda sustituir las condiciones iniciales: posición inicial de reposo (es decir, el objeto está en la posición 1) y velocidad inicial cero:

$$y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0.$$

La primera condición hace que

$$1 = k_2 + \frac{4}{3},$$

así que $k_2 = -1/3$. La segunda condición hace que

$$0 = \sqrt{30}k_1,$$

así que $k_1 = 0$. Por tanto,

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{3}\cos\frac{t}{5} + \frac{4}{3}}.$$

Al cabo de dos segundos:

$$\boxed{y(2) = \frac{4}{3} - \frac{\cos 2\sqrt{30}}{3} \simeq 1.347}.$$

¿Es razonable ese valor para la constante de Hooke?

Ejercicio 74. Igual que el ejercicio 73 pero asumiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad (y de sentido contrario), con una constante de $0.1Ns/m$.

Solución. En este caso hay tres fuerzas que influyen en el movimiento. Una representación gráfica puede ser la de la Figura 3.2.

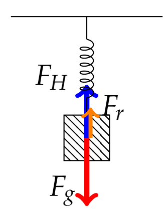

Figura 3.2: Representación gráfica del problema 74. Los sentidos de la fuerza de Hooke y de rozamiento son arbitrarios en este dibujo, no así la gravedad.

Ejercicio 75. ¿Puede la siguiente ecuación describir el movimiento de un muelle con rozamiento sin fuentes de energía aparte de la gravedad?

$$y''(x) - 0.03y'(x) + 0.7y(x) = 0.$$

Explicar por qué.

Solución. La ecuación característica es

$$T^2 - 0.03T + 0.7 = 0$$

cuyas soluciones son

$$T = \frac{0.03 \pm \sqrt{0.009 - 2.8}}{2} \simeq 0.015 \pm 0.8365i.$$

La parte real de estos números es positiva. Esto significa que la solución de la ecuación diferencial (que es homogénea) será más o menos de la forma

$$y(t) \sim e^{0.015t}(A \cos 0.8365t + B \operatorname{sen} 0.8365t),$$

para ciertos valores de A y B. De aquí se deduce que la amplitud de las oscilaciones crece con el tiempo (esta amplitud es $e^{0.015t}$), lo cual implica que el muelle va ganando energía con el paso del tiempo. Si no hay ninguna fuente de energía, esto es imposible.

Ejercicio 76. Se ha planteado la ecuación diferencial del movimiento de un muelle con rozamiento sin generadores de energía y, aplicando el método de variación de las constantes, se han obtenido las raíces $2 \pm 4i$. ¿Puede esto ocurrir? ¿Y si las raíces son $-2 \pm 4i$?

Solución. El primer caso no puede ocurrir porque si las raíces del polinomio característico tienen parte real positiva, esto quiere decir que la solución será más o menos de la forma

$$y(t) \sim e^{2t}(\cdots)$$

donde lo que va entre paréntesis es la ecuación de una onda de amplitud 1. Esta función tiene amplitud creciente, lo cual significa que la energía del sistema (el muelle) crece, algo imposible si no hay generadores.

Las raíces $-2 \pm 4i$ son perfectamente compatibles con el sistema propuesto.

Ejercicio 77. En una caída libre con rozamiento proporcional a la velocidad (y de sentido contrario), ¿de qué parámetros depende la velocidad límite?

Solución. Se supone que la respuesta no se sabe de memoria, claro. La ecuación que rige este movimiento es (ver página 76) la dada por la Segunda Ley de Newton que, en este caso queda

$$m \cdot \ddot{y}(t) = g \cdot m - k\dot{y}(t),$$

para cierta constante $k > 0$ (del rozamiento). En esta escritura, $y(t)$ es la posición, m es la masa y g la gravedad. Si ponemos $v(t) = \dot{y}(t)$, la ecuación anterior se puede reescribir

$$m\dot{v}(t) + kv(t) = gm,$$

que, dividiendo por m se convierte en

$$\dot{v}(t) + \frac{k}{m}v(t) = g.$$

Esta ecuación se sabe resolver (ver página (3.1)) y su solución es

$$v(t) = \left(v(0) - \frac{gm}{k}\right) e^{-kt/m} + \frac{gm}{k}.$$

La velocidad límite es justamente el límite de esta expresión cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \left(v(0) - \frac{gm}{k}\right) + \frac{gm}{k}e^{-kt/m} = \frac{gm}{k}.$$

Es decir, la velocidad límite depende de la aceleración gravitatoria g, de la masa m y de la constante de rozamiento k. Por supuesto, no depende ni de la velocidad inicial ni de la posición.

Ejercicio 78. Un cuerpo de masa m y longitud $2l$ (en las unidades adecuadas) está sujeto por cada uno de sus extremos a dos paredes, que están separadas una distancia L, mediante sendos muelles de longitudes A y B. Las constantes de Hooke respectivas son k_1 y k_2. Si la posición del muelle es $x(t)$ y no hay rozamiento, expresar cual es la ecuación que describe su movimiento cuando la posición inicial es $x(0)$ y la velocidad inicial $v(0)$.

Solución. La Figura 3.3 muestra un esquema de cómo puede plantearse este problema. Nótese (es importante) que se fija el origen de coordenadas, en este caso en el extremo izquierdo del sistema, y que la coordenada que se estudia, $x(t)$, es el punto medio del cuerpo. En el dibujo, las fuerzas se han dispuesto en sentidos contrarios y hacia la compresión de los muelles pero no tiene en absoluto por qué ser así: lo importante es que las fuerzas vayan en el sentido correcto siguiendo la Ley de Hooke:

$$F = -kX(t)$$

donde $X(t)$ es la elongación del muelle (positiva si el muelle está estirado, negativa si el muelle está encogido) y el sentido es *contra tal elongación* (es

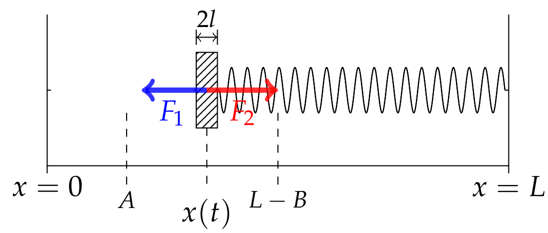

Figura 3.3: Representación gráfica del problema 78. Los sentidos de las fuerzas son arbitrarios en este dibujo..

decir, la fuerza de la ecuación precedente apunta hacia la posición de reposo del muelle).

Siguiendo el esquema de la Figura 3.3, colocamos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo del sistema y llamamos $x(t)$ a la posición del centro geométrico del cuerpo. La Segunda Ley de Newton (ver página 76) en este caso es

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F_1 + F_2.$$

Donde F_1 es la fuerza impresa por el muelle de la izquierda y F_2 la impresa por el muelle de la derecha.

Calculemos F_1. Como la longitud del muelle de la izquierda es A, al ser $x(t)$ la posición del centro, la elongación real será $x(t) - l - A$ (positiva si el muelle está estirado, negativa si está comprimido, en el dibujo está estirado). Por tanto:

$$F_1 = -k_1(x(t) - l - A).$$

Nótese cómo, si $x(t) - l - A < 0$ entonces la fuerza “empuja hacia la derecha” mientras que si $x(t) - l - A > 0$, la fuerza “tira hacia la izquierda.”

Para calcular F_2 seguimos un razonamiento similar. En este caso, la elongación del muelle será $(L - x(t)) + l - (L - B)$, pues el muelle está sujeto por la derecha, no por la izquierda (así que el sentido de la elongación es opuesto). Por tanto

$$F_2 = -k_2((L - x(t)) + l - (L - B)) = -k_2(B + l - x(t)),$$

que “funciona al revés que F_1”: si $x(t) - l - B < 0$ entonces el muelle “empuja” hacia la izquierda, mientras que si $x(t) - l - B > 0$, entonces el muelle “tira” hacia la derecha.

Una vez fijadas las coordenadas y determinadas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo móvil, la Segunda Ley de Newton (página 76) nos dice que,

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F_1 + F_2 = -k_1(x(t) - l - A) - k_2(B + l - x(t)), \tag{3.4}$$

que, quitando paréntesis, queda

$$m\ddot{x}(t) = (-k_1 - k_2)x(t) + l(k_1 - k_2) + k_1 A - k_2 B.$$

Si llevamos la incógnita al lado izquierdo obtenemos

$$m\ddot{x}(t) + (k_1 + k_2)x(t) = K$$

donde $K = l(k_1 + k_2) + k_1 A - k_2 B$. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = \frac{K}{k_1 + k_2} + c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{k_1 + k_2}t}{\sqrt{m}} + c_2 \cos \frac{\sqrt{k_1 + k_2}t}{\sqrt{m}}.$$

Las constantes c_1 y c_2 dependen, claro, de las condiciones iniciales.

Ejercicio 79. El mismo problema que el 78 pero asumiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad y de signo contrario, con constante r.

Solución. Sin entrar en más detalles, lo único que hay que añadir a la ecuación (3.4) es la fuerza de rozamiento, que según se nos dice, tendrá la forma

$$F_r = -k_r \dot{x}(t),$$

para una constane $k_r > 0$. La ecuación que hay que resolver es, por tanto:

$$m\ddot{x}(t) + k_r \dot{x}(t) + (k_1 + k_2)x(t) = K.$$

Y la solución se puede calcular con el método de variación de las constantes, por ejemplo.

Ejercicio 80. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver las ecuaciones:

a) $y^{3)} - y = 1$	b) $y^{4)} - 2y'' + y = 1$
c) $y'' - 2y' + 1 = x$	d) $y'' - 2y' = x^2$

Solución. Se supone que el método es conocido y lo aplicamos sin entrar en demasiados detalles. Solo resolvemos la ecuación a) para no recargar el texto con los mismos comentarios.

a) El polinomio característico es

$$P(T) = T^3 - 1,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

las tres raíces cúbicas de la unidad. Por tanto, las soluciones fundamentales son

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{r_2 x},\ y_3(x) = e^{r_3 x},$$

y la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = A_1 e^x + A_2 e^{r_2 x} + A_3 e^{r_3 x},$$

para constantes $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$. Una solución particular vendrá dada por una expresión

$$y_p(x) = A_1(x) e^x + A_2(x) e^{r_2 x} + A_3(x) e^{r_3 x},$$

(esto es la "variación de las constantes"). Se imponen las condiciones correspondientes a una ecuación de orden 3:

$$\begin{aligned} A_1(x)' e^x + r_2 A_2(x)' e^{r_2 x} + r_3 A_3(x)' e^{r_3 x} &= 0 \\ A_1(x)' e^x + r_2^2 A_2'(x) e^{r_2 x} + r_3^2 A_3(x)' e^{r_3 x} &= 0 \end{aligned}$$

y, aparte, se tiene la ecuación diferencial original que, con las condiciones anteriores, queda

$$A_1(x)' e^x + r_2^3 A_2(x)' e^{r_2 x} + r_3^3 A_3(x)' e^{r_3 x} = 1$$

Estas tres ecuaciones lineales tienen las soluciones:

$$A_1(x) = \frac{e^{-x}}{3},\ A_2(x) = \frac{e^{-r_2 x}}{3},\ A_3(x) = \frac{e^{-r_3 x}}{3}.$$

Con esto ya podemos escribir una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y_p(x) = \frac{e^{-x}}{3} e^x + \frac{e^{-r_2 x}}{3} e^{r_2 x} + \frac{e^{-r_3 x}}{3} e^{r_3 x}.$$

Y, para terminar, la solución general es esta solución particular más una general de la homogénea:

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{3} e^x + \frac{e^{-r_2 x}}{3} e^{r_2 x} + \frac{e^{-r_3 x}}{3} e^{r_3 x} + c_1 e^x + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 (x)}.$$

b) En este caso, el polinomio característico es

$$P(T) = T^4 - 2T^2 + 1 = (T^2 - 1)^2,$$

que tiene dos raíces $T = \pm 1$ ambas con multiplicidad 2. Esto significa que las soluciones fundamentales de la ecuación homogénea son

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = xe^x,\ y_3(x) = e^{-x},\ y_4(x) = xe^{-x}.$$

Y el resto del problema es como el a), pero con un sistema lineal de orden 4.

c) El polinomio característico es

$$P(T) = T^2 - 2T + 1 = (T - 1)^2,$$

que tiene una única raíz doble, $T = 1$. Así que la soluciones fundamentales de la homogénea son

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = xe^x.$$

Y se procede igual que en los anteriores (aunque el sistema es 2×2).

1. Esta ecuación tiene por polinomio característico

$$P(T) = T^2 - 2T,$$

cuyas raíces son $T = 0$ y $T = 2$. La raíz 0 da lugar a la solución de la homogénea $y_1(x) = 1$, la raíz 2 a $y_2(x) = e^{2x}$, así que la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = A_1 + A_2 e^{2x},$$

y se procede como en los anteriores.

Ejercicio 81. ¿Pueden ser los siguientes números las raíces del polinomio característico de una ecuación diferencial asociada a un problema mecánico Newtoniano sin generadores de energía? ¿Por qué?

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 + 3i, \lambda_3 = 4 + i.$$

¿Y los siguientes?

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 + 3i, \lambda_3 = 2 - 3i.$$

Solución. La primera familia no puede serlo porque no correspondería a una ecuación diferencial con coeficientes reales (pues si fuera así, las raíces complejas deberían ser conjugadas).

La segunda familia no puede serlo porque las raíces del polinomio característico tienen parte real positiva y esto haría que las ondas que describen el sistema mecánico tuvieran amplitud creciente: el sistema estaría ganando energía espontáneamente.

Ejercicio 82. Se sabe que la densidad del aire es inversamente proporcional a suma de la altura más 100 unidades y que la fuerza de rozamiento del aire es proporcional a la velocidad (y en sentido contrario) y a la densidad (del aire). Dar unas ecuaciones para la caída libre de un cuerpo. La aceleración de la gravedad se supone constante e igual a 9.8 en valor absoluto.

Solución. En este problema mecánico actúan solo F_g, la gravedad y F_r, el rozamiento. La fuerza de la gravedad se supone constante (porque la aceleración gravitatoria se supone constante) pero la de rozamiento no. Si se coloca el origen de coordenadas (para la altura) en el suelo y $x(t)$ es dicha altura, entonces, por la Segunda Ley de Newton (ver página 76):

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -9.8 \cdot m + F_r,$$

y la fuerza de rozamiento, según se nos dice en el enunciado es

$$F_r = -(k_1 \cdot k_2/(x(t) + 100))\dot{x}(t) = -\frac{k_1 k_2}{x(t) + 100}\dot{x}(t),$$

que es lo que significa que sea "proporcional a la velocidad en sentido contrario) y proporcional a la densidad (y que la densidad sea inversamente proporcional a la altura más cien). Por tanto, la ecuación diferencial de este sistema es:

$$m\ddot{x}(t) = -9.8m - \frac{k_1 k_2}{x(t) + 100}\dot{x}(t).$$

Esta ecuación es mejor no tratar de resolverla.

Apéndice A

Anexo 1

Ejercicio 83. Calcular el momento de inercia de la pieza de la figura, suponiendo que la densidad es constante, respecto de un eje paralelo al OY que pasa por el centro de masas.

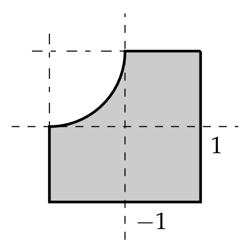

Figura A.1: Pieza del ejercicio 83.

Ejercicio 84. Calcúlese la energía cinética de un disco sólido de densidad constante, de radio 3cm y altura 1cm que gira sobre su eje a una velocidad de R revoluciones por segundo.

Ejercicio 85. La siguiente figura representa una pieza metálica cuya altura es irrelevante y cuyo centro de masas (en el plano (X, Y)) desea calcularse. La densidad es constante. En el interior tiene un hueco circular de radio 1cm y centro en $(5\text{cm}, 0)$. El radio exterior es de 7cm y el radio interior es de 1cm. El ángulo de abertura es $\pi/3$ y la figura es simétrica respecto del eje OX. Dense las coordenadas (x, y) de dicho centro de masas.

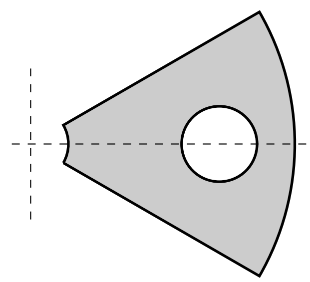

Figura A.2: Pieza del ejercicio 85.

Ejercicio 86. Calcular el momento de inercia de la figura del ejercicio 85 (supóngase que tiene una densidad superficial constante ρ) respecto del eje OY, del eje OX y de un eje perpendicular al plano XY que pasa por el centro de coordenadas.

Ejercicio 87. Se sabe que el momento de inercia de una pieza cuadrada respecto del eje E es menor que respecto del eje OY. ¿Qué puede afirmarse con certeza?

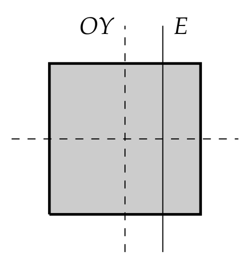

Figura A.3: Pieza del ejercicio 87.

Ejercicio 88. La figura siguiente representa una pieza de densidad constante ρ. Consiste en un octante de esfera (sólido) de radio R a la que previamente se ha quitado, mediante un torno, un cilindro de radio $r < R$ (en la figura, en la dirección del eje OZ). Calcular su masa, su centro de masas y el momento de inercia respecto del eje OZ.

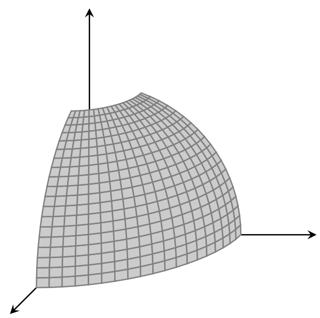

Figura A.4: Pieza del ejercicio 88.

Ejercicio 89. Una pelota de tenis está compuesta por una capa de goma de 3.2mm cuyo radio interno es de 2.54cm y una capa externa de fieltro de 1mm. La densidad de la goma es de 1.2kg/l y la del fieltro es de 0.1kg/l. ¿Cuál es la energía cinética de una tal pelota que se desplaza a 150km/h y va girando a 10 revoluciones por segundo (alrededor de un eje que pasa por su centro)?

Ejercicio 90. Un disco para el lanzamiento (deporte) está fabricado de un material de densidad 0.6kg/l. Puede suponerse que la forma es la de un elipsoide con ejes de 0.1, 0.1m y 0.03m. Calcúlese la energía cinética si vuela a 10m/s y gira a 3 herzios.

Ejercicio 91. Calcular el centro de masas de un triángulo sólido de densidad superificial ρ constante y compararlo con el de tres puntos de masa en los vértices. ¿cuál es la diferencia?

Ejercicio 92. Calcular el centro de masas de un tetraedro sólido de densidad constante ρ y compararlo con el de tres puntos de masa en los vértices. ¿Cuál es la diferencia?

Apéndice B

Anexo II

Ejercicio 93. Calcular el centro de masas del arco de circunferencia que va de $\pi/2 - \alpha$ a $\pi/2 + \alpha$ si la densidad es constante, suponiendo que el radio es r.

Ejercicio 94. Calcular la temperatura media del arco de circunferencia que va de $\pi/2 - \alpha$ a $\pi/2 + \alpha$ si la temperatura es proporcional a la altura, para radio r.

Ejercicio 95. Calcular el momento de inercia del arco de circunferencia que va de $\pi/2 - \alpha$ a $\pi/2 + \alpha$ respecto de su eje de simetría, si la densidad es constante.

Ejercicio 96. Calcular el centro de masas de la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ si la densidad es constante.

Ejercicio 97. Calcular la masa de un arco de catenaria $y = a\cosh x$, para $x \in [-b, b]$, suponiendo que la densidad es constante.

Calcular el centro de masas de dicho arco.

Ejercicio 98. Calcular el centro de masas de un arco de la espiral

$$(r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t, at)$$

desde $t = 0$ hasta $t = \alpha$. ¿Está siempre en el eje OZ? ¿Cuándo está?

Ejercicio 99. Calcular el momento de inercia de un arco de espiral de paso a y radio r respecto del eje de la espiral. El arco se supone que va de 0 a α. Se supone que la densidad es constante.

Ejercicio 100. Se tiene un muelle en reposo, que define una espiral de radio r y paso a. ¿Cuánto tiene que estirarse para que la longitud de una vuelta se duplique?

Ejercicio 101. La temperatura en una esfera (en la superficie) es directamente proporcional al seno de la latitud medida desde el polo norte (i.e. en el polo norte, latitud 0, en el polo sur, latitud π). Se considera la trayectoria de un objeto que sigue un círculo máximo que pasa por los polos desde latitud $\pi/6$ hasta latitud $\pi/3$. Calcular la temperatura media en dicho trayecto.

Lo mismo si la trayectoria es

$$(\sqrt{1-t^2}\cos(t), \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{sen}(t), t), \quad t \in [0, a],$$

para $a > 0$ suficientemente pequeño.

Apéndice C

Anexo III

(Sobre la fórmula de Green)

Nota importante: En todos los ejercicios, si aparecen integrales "complicadas", se supone que basta dejarlas indicadas. El alumno puede recurrir a una aplicación como WolframAlpha para calcularlas, bien exactamente, bien aproximadamente.

Ejercicio 102. Calcular, utilizando integrales de línea, el área del pétalo limitado por la curva polar

$$\rho = \cos 3\theta, \theta \in [-\pi/6, \pi/6]$$

(la curva completa es un *trifolium*).

Ejercicio 103. Calcular, utilizando integrales de línea, el área del pétalo limitado por la curva polar

$$\rho = \cos n\theta, \theta \in [-\pi/(2n), \pi/(2n)]$$

(la curva completa es una flor con n pétalos). En este y en los ejercicios siguientes, n representa un número natural.

Ejercicio 104. Calcular, utilizando integrales de línea, el área de *un pétalo* limitado por la curva

$$\rho = 0.5 + \cos n\theta$$

para lo cual habrá que calcular la abertura de uno de dichos pétalos e integrar en los límites adecuados.

Ejercicio 105. Calcular, utilizando integrales de línea, el área de *un pétalo* limitado por la curva

$$\rho = r_0 + \cos n\theta$$

para r_0 un número entre 0 y 1. Habrá, previamente, que calcular la abertura de dicho pétalo e integrar en los límites adecuados.

Ejercicio 106. Calcular, mediante integrales de línea, el área del conjunto limitado por la curva

$$\rho = s + \cos n\theta, \theta \in [0, 2\pi]$$

donde s es un número real mayor que 1 y n es un número natural.

Ejercicio 107. Considérese el campo de vectores

$$X = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

definido en el conjunto limitado exteriormente por la circunferencia centrada en el origen de radio 1 e interiormente por la circunferencia centrada en el origen de radio ϵ, para ϵ pequeño.

Ejercicio 108. Razonando como en el ejercicio anterior, comprobar que

$$\int_\gamma X \, d\gamma = 2\pi$$

para cualquier curva cerrada simple γ que rodea al origen de coordenadas en sentido antihorario.

Ejercicio 109. Considérese el campo de vectores

$$X = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

definido en todo $\mathbb{R}^2$ menos el origen de coordenadas. Calcúlese, razonando como en el ejercicio anterior (pero para este campo) el valor de

$$\int_\gamma X \, d\gamma$$

para cualquier curva cerrada simple que rodea el origen de coordenadas en sentido antihorario.