PRÁCTICAS DE AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

P. FORTUNY AYUSO

1. Introducción

Las prácticas que se realizarán este curso en los grupos del profesor Fortuny se centrarán en el cálculo de parametrizaciones utilizando algunas herramientas gratuitas disponibles en Internet (alguna incluso con aplicaciones instalables en móviles).

- La primera es Desmos, una calcudora gráfica cuya página web es `desmos.com` y cuya utilización es elemental: pueden introducirse tanto expresiones solo en la variable x, que se sobreentienden como funciones cuya gráfica quiere representarse, ecuaciones en x y en y, que dan lugar a la curva correspondiente y desigualdades, que se representan como un área del plano. Hay una aplicación descargable para móviles.
- La segunda herramienta es Wolfram|Alpha, una calculadora simbólica desarrollada por la misma empresa que produce Mathematica. Su página web es `wolframalfa.com` y hay una aplicación para móviles y para ordenadores.
- Una aplicación gratuita que es capaz de dibujar dos superficies implícitas. El autor no es conocido. Hay una copia (por si el autor borra su programa original) en la página web del profesor: `http://pfortuny.net/2surfaces.html`. Su utilización es algo más pesada pero también elemental.

Esas tres aplicaciones se utilizarán como herramientas en los ejercicios que se propondrán en cada sesión.

Date: Curso 17-18.

2. Primera sesión: parametrizaciones elementales

En esta primera sesión se espera que los alumnos se familiaricen con Desmos y con Wolfram|Alpha y realicen (sobre un papel) las parametrizaciones en coordenadas cartesianas de los siguientes conjuntos:

(1) El área del plano delimitada por las siguientes desigualdades: $x^2 + y^2 \leq 5$, $x + 2y - 4 > 1/2$ y $e^x < y$.
(2) El área delimitada por: $y > \cos(x) - 0.3$, $x - y > 0.5$ y $x + y < 4$.
(3) El área delimitada por: $y < x^2$ y $x^4 - 2 < y$.
(4) El área contenida en el círculo de centro $(1, 2)$ y radio 0.5 que queda por encima de la gráfica de $f(x) = x^3$.

3. Segunda sesión: más parametrizaciones elementales

Seguimos realizando parametrizaciones de conjuntos planos para adquirir práctica.

(1) Parametrizar la parte interior de la elipse con centro $(0,0)$ y radios 1 y 2 que está por encima de la parábola $y = x^2 - 1$.
(2) Parametrizar en polares el círculo de centro $(1,0)$ y radio 1.
(3) Parametrizar en polares la parte del círculo de centro $(1,0)$ y radio 1 que está incluida en la parte interna de la parábola $x = y^2$ (nótese que está en horizontal, esta parábola).
(4) Parametrizar en polares la parte del círculo restante del ejercicio anterior.
(5) Parametrizar en polares el conjunto que cumple que $x > 0, y > 0$ y
$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} < 2.$$
(6) Parametrizar (como se pueda) la parte que queda en el semiplano $x > 0$ y es interna a la curva
$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} = 2.$$

4. Tercera sesión

Parametrizar los siguientes conjuntos:

(1) La parte del plano que está dentro del pétalo orientado hacia la derecha de $\rho = \cos 7\theta$ sobre la recta $y = 1/10x$.
(2) La intersección del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2 con el círculo $x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$. En cartesianas y en polares.
(3) Un pentágono regular con un vértice en $(0,1)$ y simétrico respecto del eje OY. En polares. ¿En cuántas partes dividirías el conjunto?
(4) La parte del plano acotada por $x^2 - y^2 = 1$ y las rectas $y = 1$, $y = -1$. En cartesianas y en polares.

Calcular:

(1) La longitud de un arco de espiral logarítmica, dada por $\rho = 2e^{3t}$, con $t \in [\alpha, \beta]$.
(2) La longitud de la cardioide $\rho = 2(1 - \cos t)$, para $t \in [0, 2\pi]$.
(3) El área delimitada por la cardioide anterior.

5. Cuarta Sesión

En esta sesión, utilizando o no las herramientas de las anteriores sesiones, se trata de parametrizar los siguientes conjuntos:

(1) El corte de un cono sólido con:
- Un plano paralelo al eje del cono que no contenga a dicho eje.
- Un plano perpendicular a dicho eje.
- Un plano paralelo a la generatriz, que no la contenga.

(2) La parte de la *superficie* esférica de centro el origen y radio R que está incluida en el cilindro de centro $(R/2, 0, 0)$, radio $R/2$ y eje paralelo a OZ. A esta superficie se le llama la "bóveda de Viviani".

(3) La curva que delimita la superficie anterior. Para esto es conveniente fijarse en cuál es la proyección de dicha curva sobre el plano $Z = 0$.

(4) La superficie externa de una rosquilla (o si se quiere, de una cámara de un neumático). Esta figura se denomina, técnicamente, *toro*. Tiene dos elementos definitorios: el radio mayor (el de la rueda, por así decir) y el radio menor (el ancho de la cámara).