L'Hôpital

Pedro Fortuny Ayuso
Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
de la Universidad de Valladolid
Junio de 1999

TRIBUNAL
Presidente
Dr. D. Felipe Cano Torres
Vocales
Dr. D. Vincent Cossart
Dr. D. Pedro Martínez Gadea
Dr. D. Jean-François Mattei
Secretario
Dr. D. José Cano Torres.

DIRECTOR
Dr. D. José Manuel Aroca Hernández-Ros

A mis padres

Índice general

CAPíTULO 0

Introducción

1. Planteamiento del problema

Abordamos en la presente memoria la resolución de dos tipos de ecuaciones diferenciales:

a) Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y grado arbitrario, de la forma

$$f(x, y, y') = 0, \; f \in A[y']$$

donde A es un subanillo del anillo de series de potencias formales $\mathbb{C}[[x, y]]$ sujeto a ciertas restricciones que enunciaremos más adelante.

b) Los campos de vectores holomorfos (foliaciones por curvas) en superficies analíticas eventualmente singulares.

Ambos casos se pueden estudiar conjuntamente, con las herramientas correspondientes a las formas diferenciales, si se traslada **a)** a **b)** considerando la superficie $S = f(x, y, z) = 0$ en $(\mathbb{C}^3, 0)$ y la forma diferencial $\omega = zdx - dy$ restringida a S.

En la teoría clásica se trabaja en el caso $A = K[y]$, donde K es un cuerpo diferencial de funciones en la variable x. Ritt [**40**] traslada el problema al anillo diferencial $K < y >= K[y, y', y'', \ldots]$ y, de modo natural, considera el anillo

$$R = K < y > / < f >$$

como el espacio de soluciones (una solución de la ecuación es, por ejemplo, el elemento $y+ < f >$). El problema es que R no es, en general, un cuerpo, pero se puede demostrar el siguiente resultado

Proposición. *Dada una ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$ como arriba, existe un par (Σ, φ) único donde Σ es una extensión de K y $\varphi : R \to \Sigma$ es un morfismo de $K-$álgebras diferenciales tal que cualquier otra extensión diferencial (Δ, ψ) de R factoriza a través de (Σ, φ).*

La construcción de dicha extensión es bien conocida: basta tomar $\Sigma = K(y)[y']/(f)$, definiendo la derivación del siguiente modo: $\partial x = 1, \partial y = y', \partial y' = -(f_x + f_y y')/f_z$, donde los subíndices indican derivación parcial. Así pues, el cuerpo de soluciones es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre K.

Una vez construido el cuerpo de soluciones de $f = 0$, se plantea una alternativa, respecto al estudio de la ecuación: entenderla como un problema relativo a K o relativo a $\mathbb{C}$. Geométricamente, la diferencia estriba en plantear la ecuación como una cierta fibración sobre la recta compleja entendida como punto genérico, o estudiar las soluciones localmente en los puntos del plano. El primer enfoque estudia los invariantes de la ecuación por el grupo de cambios de coordenadas de la forma

$$x = \psi(u), y = \varphi(u, v) \text{ con } \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(uv)} \neq 0$$

mientras que el segundo enfoque permite cambios de coordenadas cualesquiera en (x, y).

El primero de los puntos de vista ha llevado a la definición, ya clásica, de las singularidades *fijas y móviles* de la ecuación $f = 0$. En el contexto clásico (véase [**25**] y trabajos paralelos), estas definiciones son algo ambiguas: siempre se dan “a posteriori”, una vez que se ha comprobado que hay ciertas singularidades que dependen sólo del numerador y otras del denominador. Además, dependen muy fuertemente del orden y del grado de la ecuación. La única definición precisa que hemos encontrado es la de Matsuda, en [**30**], que exponemos más adelante. Desde otra perspectiva, en los últimos años se han demostrado gran cantidad de resultados alrededor de la estructura de las soluciones de campos de vectores y foliaciones en el plano complejo: sobre la existencia de integrales primeras [**33**]; el teorema de la Separatriz de Camacho y Sad [**5**], simplificado y clarificado por J. Cano [**9, 10**]; la solución al problema de Poincaré en el caso no dicrítico, por M. Carnicer [**12**], etc... Todos estos resultados son de naturaleza más bien geométrica -y analítica. No son fácilmente traducibles a las ecuaciones de grado (u orden) mayor que uno. Pensamos que el planteamiento valorativo puede dar algo más de luz al ampliar el punto de vista.

1.1. Estudio clásico de las singularidades. Singularidades fijas y móviles. Presentamos brevemente la manera clásica de abordar el problema de las singularidades de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Nuestra referencia será [**25**], que nos parece bastante completo y claro. Aunque en ese trabajo se incluyen capítulos para ecuaciones de grado y orden superior a uno, nos ha parecido oportuno restringir este comentario a las de orden y grado uno, por ser suficientemente esclarecedor de las técnicas y del tipo de problemas que se encuentran.

Para situarnos en contexto, fijemos una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

donde g y h son polinomios en y con coeficientes en $\mathbb{C}\{x\}$[1] y que escribiremos

$$\begin{cases} g(x,y) = p_0(x) + p_1(x)y + \cdots + p_m(x)y^m \\ h(x,y) = q_0(x) + q_1(x)y + \cdots + q_n(x)y^n \end{cases}$$

Por una parte, pueden aparecer singularidades en la ecuación en los siguientes casos:

1. Un cero (x_1, y_1) de h pero independiente de y. Es decir, $h(x_1, \cdot) = 0$. Por ejemplo,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x_1}$$
2. Un cero común de g y h. Por ejemplo, el punto $(x_1, 0)$ en la ecuación
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \operatorname{sen}(x - x_1)}{x - x_1}$$

Donde se supone que x_1 puede ser ∞ (y se hace el cambio $X = x^{-1}$, etc.).

Como trabaja en el espacio $\overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y$ (busca cualquier tipo de solución meromorfa), ha de considerar el punto del infinito en y: haciendo el cambio $Y = y^{-1}$ y tomando $\varphi(x,Y) = -Y^2 f(x,Y) = G(z,Y)/H(x,Y)$, pueden aparecer también singularidades

3. En un x_1 tal que $H(x_1, \cdot) = 0$.
4. En un cero común (x_1, Y_1) de G y H.

Estos cuatro tipos de singularidades se presentan exclusivamente para puntos aislados de la variable x y en este sentido, *no dependen de las "condiciones iniciales"*. Como explica Ince, "se pueden determinar a priori estudiando la función f". Por esto, se denominan *singularidades fijas*.

Una vez determinadas las singularidades fijas, se procede a "rodearlas" (en la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}_x$) con un pequeño disco centrado en cada una y se "unen" todos esos discos con segmentos que parten de su frontera y llegan al infinito. Hecho esto, se estudia la ecuación anterior en el conjunto U, complementario de la unión de los discos y los segmentos (que es un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}_x$). En este abierto, se tiene, para cada condición inicial (x_0, y_0), una solución (holomorfa, meromorfa o multiforme: todos los tipos son válidos). Esto se expresa diciendo que se tiene "la solución general"

$$F(x; x_0, y_0).$$

[1]En realidad, Ince acepta también que los p_i y los q_j puedan ser funciones analíticas multiformes (raíces, logaritmos, etc...). Nos parece que expresar un concepto tan general en el contexto "holomorfo" en el que trabajamos es complicar la exposición sin añadir nada interesante.

Dado ahora un punto $x_1 \in U$, escribamos $y_1 = \lim_{x\to x_1} F(x; x_0, y_0)$. Puede ocurrir que f sea analítica en (x_1, y_1), en cuyo caso este punto es no singular. Pero se pueden dar los siguientes casos:

1. El límite es $y_1 = \infty$, pero (tomando φ como antes) la función φ es analítica en $(x_1, 0)$. Por tanto, F tiene un polo en x_1.
2. El límite y_1 es finito, pero $f(x_1, y_1) = \infty$. En este caso se tiene que, $h(x_1, y_1) = 0$ y $g(x_1, y_1) \neq 0$. Así pues, $1/f$ es analítica en (x_1, y_1) y estamos en un punto rama de $F(x; x_0, y_0)$.
3. El límite es $y_1 = \infty$ y además $\varphi(x_1, y_1) = \infty$. El punto x_1 es un polo que además es una rama de F.

Todas estas singularidades dependen de la condición inicial (x_0, y_0). Si cambia ésta, cambian las singularidades, de modo que se tiene un *continuum* de singularidades, dependientes de x. De aquí que se les llame *singularidades móviles*.

Una vez descritos estos tipos de singularidades, como la teoría clásica está centrada en encontrar soluciones meromorfas (o multiformes) en toda la recta compleja, que se comporten similarmente bajo cambio de las condiciones iniciales, se estudian las ecuaciones diferenciales que no tienen singularidades móviles. Para el caso de orden y grado uno, el estudio es completo y se reduce al siguiente

TEOREMA. *Una ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *(como arriba) no posee singularidades móviles si y sólo si es una ecuación de Riccati. Es decir,* $f(x, y) = p_0(x) + p_1(x)y + p_2y^2$ *donde* p_0, p_1 *y* p_2 *son fracciones racionales (cocientes de polinomios).*

Geométricamente es sencillo comprobar que las ecuaciones diferenciales descritas arriba son precisamente las que corresponden a foliaciones de $\overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y$ para las que existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_k \in \overline{\mathbb{C}}_x$ de modo que la proyección

$$\pi : \overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y - \bigcup_i \{x_i\} \times \overline{\mathbb{C}}_y \to \overline{\mathbb{C}}_x - \bigcup_i \{x_i\}$$

es transversal en todos los puntos a las hojas de la foliación. Puede verse un estudio más detallado de las estructuras transversales a foliaciones en, por ejemplo, [**44**]. Más simplificadamente, entendiendo siempre las ecuaciones diferenciales de arriba como foliaciones en $\overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y$, una singularidad fija corresponde bien a una hoja "vertical", bien a una singularidad aislada de la foliación, mientras que las móviles se corresponden (esencialmente) con los puntos rama o los puntos de "tangente vertical" de las hojas respecto de la proyección sobre $\overline{\mathbb{C}}_x$.

2. Teorías valorativas de ecuaciones diferenciales

2.1. La teoría de Matsuda. Matsuda, en [**30**], estudia los cuerpos de funciones algebraicos de una variable, y el comportamiento de las derivaciones en esos cuerpos respecto de una valoración. Su objetivo es caracterizar las ecuaciones diferenciales ordinarias "de tipo clásico" desde el punto de vista de las valoraciones en el cuerpo diferencial. Puesto que trabaja en cuerpos de funciones de una variable, se puede decir que estudia las ecuaciones diferenciales sobre la superficie de Riemann de un cuerpo de ese tipo, en el que todas las valoraciones son *equivalentes*: los anillos locales de todas ellas son isomorfos. En realidad, más que una teoría de valoraciones diferenciales, su obra es un estudio de las ecuaciones diferenciales algebraicas de primer orden desde una perspectiva valorativa. En todo caso, pensamos que dicho trabajo es interesante por sí mismo como investigación sobre la relación entre el álgebra diferencial y la teoría de valoraciones: ésta es la razón por la que incluimos un resumen. Nos limitaremos a enunciar los teoremas fundamentales, haciendo algunos comentarios.

Necesitamos fijar la notación para poder mostrar los resultados principales de [**30**]:

- En esta sección, K será un cuerpo (de cualquier característica), R un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre K: es decir, una extensión de K de grado de trascendencia 1 tal que existe una variable $y \in R$ sobre K para la cual la extensión $K(y) \to R$ es algebraica y finita. Una comita $'$ (prima) será una derivación de K. Llamaremos *cuerpo de coeficientes de* R al cuerpo formado por los elementos de R que son algebraicos sobre K.
- Un cuerpo R de funciones algebraicas de una variable sobre K se dirá que es *un cuerpo diferencial de funciones algebraicas de una variable sobre* K si es un cuerpo diferencial y K es cerrado para la derivación. De ahora en adelante, R y K son fijos y cumplen esta condición. Hacemos notar que si K es diferencial y R es separable sobre K, entonces, fijada una variable $y \in R$ sobre K y un elemento $u \in R$, entonces la derivación de R es única con la condición $y' = u$.
- Si ahora $f(X, Y)$ es un polinomio irreducible sobre K, tal que $\frac{\partial f}{\partial Y} \neq 0$, entonces existe un R (con las condiciones anteriores) tal que $R = K(y, y')$ y $f(y, y') = 0$. Si, además, f es irreducible en $\overline{K}[X, Y]$, entonces el cuerpo de coeficientes de R es K.
- La letra $\mathfrak{p}$ denotará un *lugar* en R. Llamaremos $\nu_{\mathfrak{p}}$ a la valoración asociada al lugar $\mathfrak{p}$.

El primer resultado de Matsuda es el siguiente

TEOREMA. *En las condiciones anteriores, si* $\mathfrak{p}$ *es un lugar en* R*, cualquier derivación de* R *es continua para la topología inducida por* $\mathfrak{p}$*.*

De aquí se deduce que la derivación se puede extender al completado $\mathfrak{p}-$ádico de R, al que llamaremos $\overline{R}$.

DEFINICIÓN. Sean R y K como antes. Se dice que R *no tiene singularidades móviles* si el anillo de valoración $\mathcal{O}$ de cualquier lugar $\mathfrak{p}$ de R es cerrado por derivación. (Notemos que K forma parte del enunciado porque $'$ es la identidad en K).

Esta es la relación más elemental entre valoraciones y derivaciones que hemos encontrado. Como se verá, es muy útil para el tipo de problemas estudiados en [**30**], y es aplicable -con ciertas condiciones (ver el trabajo de Seidenberg [**46**])- a extensiones de grado de trascendencia mayor que 1.

Continuando con la exposición de Matsuda, se tiene el siguiente resultado sobre las extensiones algebraicas:

TEOREMA. *Sean* S *y* R *cuerpos de funciones algebraicas de una variable sobre* L *y* K*, respectivamente. Supongamos que* $R \subset S$ *y que cualquier elemento de* R *algebraico sobre* K *es algebraico sobre* L *y que cualquier elemento de* R *trascendente sobre* K *lo es sobre* L*. Supongamos además que* R *y* S *son extensiones diferenciales de* K *y* L *(en el sentido de este capítulo) y que* S *es una extensión diferencial de* R*. Entonces* R *no tiene singularidades móviles si y sólo si* S *no las tiene.*

El interés de las singularidades móviles es el siguiente su relación con las ecuaciones de tipo Riccati:

TEOREMA. *Sea* $K \to R$ *como siempre y sea* $y \in R$ *una variable sobre* K*. Sea* $f(Y)$ *el polinomio mínimo de* y' *sobre* $K(y)$*:*

$$f(Y) = \sum a_i(y)Y^{n-i},\ 0 \leq i \leq n,\ a_0 = 1,\ a_i \in K(y).$$

Si R *no tiene singularidades móviles, entonces los* a_i *son polinomios en* y *con coeficientes en* K *cuyos grados son como mucho* $2i$*.*

Definimos un cuerpo *de Riccati* como una extensión $K \subset R$ con $R = K(y)$ y tal que $y' = a + by + cy^2$. Es elemental comprobar que un cuerpo de Riccati no tiene singularidades móviles. Pero, además, se tiene

TEOREMA. *Sea* $K \subset R$ *como antes y supongamos que* R *tiene género* 0 *y que, además,* R *tiene un lugar de grado* 1 *-es decir, hay una* *función en R que tiene un cero simple. Si R no tiene singularidades móviles, entonces es un cuerpo de Riccati sobre el cuerpo de coeficientes K^*.*

Como consecuencia se obtiene el criterio de Fuchs para que una ecuación diferencial no tenga singularidades móviles:

PROPOSICIÓN (Criterio de Fuchs). *Sea R un cuerpo diferencial de funciones algebraicas de una variable sobre K de la forma $R = K(y, y')$. Supongamos que K es algebraicamente cerrado y de característica 0. Sea $f(Y)$ el polinomio característico de y' con respecto a $K(y)$:*

$$f(Y) = \sum a_i(y) Y^{n-i}, \ 0 \leq i \leq n, \, a_0 = 1, \, a_i \in K(y).$$

Entonces R no tiene singularidades móviles si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

i) *Cada coeficiente a_i de f es un polinomio en y de grado a lo sumo $2i$.*
ii) *Si $\mathfrak{p}$ es un lugar en R que no es un polo de y pero que es ramificado respecto de $K(y)$, las clases residuales ξ, η de y y y' módulo $\mathfrak{p}$ satisfacen que $\xi' = \eta$ y, además*

$$\nu_{\mathfrak{p}}(y' - \eta) \geq e_{\mathfrak{p}} - 1$$

donde $e_{\mathfrak{p}}$ es el índice de ramificación de $\mathfrak{p}$ sobre $K(y)$.
iii) *Si un lugar $\mathfrak{p}$ de R es un polo de y ramificado con respecto a $K(y)$, entonces*

$$\nu_{\mathfrak{p}}(y') \geq \nu_{\mathfrak{p}}(y) - 1$$

Es un ejercicio muy esclarecedor traducir estas condiciones algebraicas a condiciones más geométricas, para comparar este resultado con el enunciado clásico -que se puede ver, por ejemplo, en [**25**] (capítulos XII y XIII), más analítico y mucho menos formal. El siguiente resultado "se debe esencialmente a Briot y Bouquet" (cf. [**30**], p. 22):

TEOREMA. *Sea R un cuerpo diferencial algebraico de una variable sobre su cuerpo de coeficientes K. Supongamos que K es perfecto y que está formado por constantes si su característica es distinta de 0. Entonces, si R no está formado por constantes y no tiene singularidades móviles, su género (en el sentido del género de una superficie de Riemann) es o bien 0 o bien 1.*

El resultado de Briot y Bouquet, tal como viene enunciado en [**38**] es:

TEOREMA. *Considérese la ecuación diferencial polinómica*

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0.$$

Si la integral de esta ecuación es uniforme [es decir, la solución no es una función multiforme], entonces el género de la curva

$$f(u, u') = 0$$

es necesariamente igual a 0 *ó a* 1.

A continuación se definen los cuerpos de Clairaut:

DEFINICIÓN. Un cuerpo diferencial R, de funciones algebraicas de una variable sobre K se dice que es un cuerpo *de Clairaut sobre* K si está generado sobre K por sus constantes.

TEOREMA. *Cualquier cuerpo de Clairaut sobre un cuerpo* K *de característica* 0 *está libre de singularidades móviles.*

Por otro lado,

TEOREMA. *Si* R *es un cuerpo de Riccati sobre* K *-su cuerpo de coeficientes-, existe una extensión diferencial* L*, de* K *que es separable sobre* K *y tal que el cuerpo diferencial* $R(L)$ *deducido de* R *al añadirle a* K *los elementos de* L*, es un cuerpo de Clairaut sobre* L*.[Para la noción de cuerpo* deducido de otro al añadir elementos *véase* [**16**]*].*

Terminamos este resumen de la Teoría de Matsuda con el estudio que hace de los cuerpos de Poincaré. Recordamos que un cuerpo *elíptico* es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable de género 1. Si R es un cuerpo de ese tipo, que es diferencial sobre su cuerpo de coeficientes K, diremos que R es *de Poincaré* si es de la forma $K(x, y)$ con $x' = y$ y además

$$y^2 = A(x) = \lambda \prod (x - a_i),\ 1 \leq i \leq 3, \lambda, a_i \in K, \lambda \neq 0$$

donde los a_i son constantes diferentes dos a dos. El teorema que sigue es una generalización del equivalente de Poincaré en [**39**]:

TEOREMA. *Sea* R *un cuerpo diferencial de funciones algebraicas de una variable sobre su cuerpo de coeficientes* K*. Supongamos que es un cuerpo elíptico que admite un lugar de grado* 1 *y que no es de característica* 2 *ni* 3*. Entonces, si* R *está libre de singularidades móviles, existe una extensión* L *de* K *que es algebraica y separable sobre* K *y tal que el cuerpo diferencial* $R(L)$ *deducido de* R *al añadirle a* K *los elementos de* L *es, o bien un cuerpo de Poincaré o bien un cuerpo de Clairaut sobre* L*.*

Matsuda continúa sus estudio con los casos de característica 0 e investigando los puntos de Weierstrass de una extensión de cuerpos. No comentamos esta parte, porque se sale de los propósitos de esta memoria.

2.2. Una nota de Seidenberg. En [**46**] A. Seidenberg propone un estudio de la relación entre valoraciones y diferenciales[2], pues, como él mismo dice, "las derivaciones tienen que ver con el contacto, como las valoraciones, así que es natural preguntarse por un estudio que las relacione". En la referencia citada, establece un teorema de existencia: una derivación del anillo local de una variedad algebraica que envía el anillo en el anillo, hace lo mismo con un cierto anillo de valoración que domina al anterior. Más precisamente, demuestra el siguiente resultado:

TEOREMA. *[[**46**]] Sea $\mathcal{O} = k[x_1, \dots, x_n]$ un dominio íntegro finito*[3] *sobre un cuerpo k de característica 0 y sea $\mathfrak{m}$ un ideal primo de $\mathcal{O}$. Supongamos que D es una derivación del anillo local $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ (es decir, $D(\mathcal{O}_\mathfrak{m}) \subset \mathcal{O}_\mathfrak{m}$). Entonces existe un anillo de valoración centrado en $\mathfrak{m}$ tal que la (extensión de la) derivación D lo envía en sí mismo.*

Cuando el anillo $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ es de dimensión 2, se puede probar que la valoración es única, con la hipótesis de que $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$ (en el caso liso, esto significa que D es un campo de vectores no singular) y que tiene como cuerpo residual k.

El último resultado que demuestra es el siguiente:

TEOREMA ([**46**]). *Sea $\mathcal{O}$ un anillo local regular de dimensión r que contiene a los números racionales y cuyo ideal maximal es $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_r)$. Sea D una derivación íntegra de $\mathcal{O}$ (es decir, $D(f)$ es un elemento íntegro sobre $\mathcal{O}$ para todo $f \in \mathcal{O}$). Supongamos que $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$ y sea ν una valoración centrada en $\mathfrak{m}$ cuyo anillo es cerrado para D. Entonces, la sucesión inicial de $\nu-$ideales:*

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{q}_2 > \dots > \mathfrak{q}_n > \dots$$

depende exclusivamente de D (y no de ν). La intersección $\mathfrak{p} = \cap \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{q}_i}$ es un ideal primo $1-$dimensional que tiene un punto regular en $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{m}$. Si definimos la "parte inicial" de la manera obvia, entonces las partes iniciales de los elementos de $\mathcal{O}$ que tienen orden 1 y valor mayor que $\nu(\mathfrak{m})$ generan un ideal primo $1-$dimensional en $\mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_r]$, que depende exclusivamente de D (y no de ν). Este ideal primo define la

[2] Aunque la noción de Matsuda es la misma, y su trabajo es posterior en el tiempo, lo hemos introducido antes por ser el menos relacionado con nuestro estudio.

[3] Las x_i no son necesariamente algebraicamente independientes.

tangente a $\mathfrak{p}$ *en* $\mathfrak{m}$*. (Así, para* $r > 2$*,* D *también determina canónicamente una dirección en* $\mathfrak{m}$*).*

El "punto débil" de la definición de Seidenberg es que depende *de modo esencial* del modelo que se estudia: si, por ejemplo, se parte de un campo de vectores holomorfo, regular en un entorno del origen de $\mathbb{C}^n$, los resultados anteriores aseguran la existencia de una única valoración que cumple las propiedades. Sin embargo, si se explota el origen y se considera el centro de tal valoración y el campo inducido en la variedad explotada, ya no se tiene la unicidad y ni siquiera $\mathcal{O}$ es cerrado para D.

De hecho, en el caso de dimensión 2, las demostraciones de los teoremas anteriores, muestran que la valoración que se obtiene es la del "contacto" con la curva (eventualmente formal) solución de D.

En el Apéndice A presentamos un estudio detallado de este tipo de valoraciones y su relación con las valoraciones de L'Hôpital, que son el objeto de estudio fundamental de la presente memoria.

2.3. La teoría de Rosenlicht. Mostramos en este apartado un breve resumen de la teoría de valoraciones diferenciales construida en [**41**], que es la base de nuestra teoría general. Enunciaremos los resultados fundamentales -hasta el de extensión de valoraciones "diferenciales" a los cierres algebraicos; no nos detendremos en casi ninguna demostración, pues pueden consultarse todas en dicha referencia.

Llamaremos K a un cuerpo diferencial de característica 0, cuya derivación denotaremos ∂. El cuerpo de constantes de ∂ lo llamaremos κ. Si ν es una valoración sobre K y $\mathcal{O}$ es su anillo de valoración, supondremos que $\mathcal{O} = \kappa + \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es el maximal de $\mathcal{O}$ (es decir, que el anillo de valoración es *racional* sobre el cuerpo de constantes de ∂). Diremos que ν es una *valoración diferencial para* ∂ si, para cualesquiera $a, b \in K^*$ tales que $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$ se tiene que

$$\nu\left(\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b}\right) > 0.$$

Ésta definición, cambiando las condiciones sobre los cuerpos residuales, es la que utilizaremos en nuestra teoría de valoraciones de L'Hôpital. El primer resultado que Rosenlicht demuestra es el siguiente:

LEMA. *Con las notaciones y condiciones anteriores, una valoración* ν *es diferencial para* ∂ *si y sólo si, para cualesquiera* $a, b \in K$ *con* $\nu(a) \neq 0 \neq \nu(b)$ *se tiene que*

$$\nu(a) \geq \nu(b) \text{ si y sólo si } \nu(\partial a) \geq \nu(\partial b).$$

Una vez hecha la demostración, Rosenlicht comienza a probar resultados de extensión de valoraciones diferenciales (que nosotros llamamos de L'Hôpital) a cuerpos más grandes. Hacemos notar que él impone la condición de "racionalidad" del anillo de valoración respecto del cuerpo de constantes de ∂ porque está interesado sobre todo en los cuerpos de Hardy. El primer teorema de extensión es el siguiente:

TEOREMA. *Sea K un cuerpo diferencial de característica 0, κ un subcuerpo diferencial de K, $\mathcal{C}$ un subcuerpo del cuerpo de constantes de K y ν una valoración sobre K trivial en $\mathcal{C}$. Supongamos que $C = \mathcal{C} \cap \kappa$ se aplica sobreyectivamente en la imagen de κ en el cuerpo residual de ν. Sea T un subgrupo del grupo multiplicativo K^* tal que $\kappa^* \subset T$, que $K = \mathcal{C}(T)$, tal que toda constante de T está en C, tal que $(a \in T, \nu(a) = 0) \Rightarrow (a \in \kappa^*)$, y tal que si $a, b \in T$ y $\nu(a), \nu(b) > 0$ entonces $\nu(\partial a \cdot b/\partial b) > 0$. Entonces ν es una valoración diferencial de K -en el sentido de este apartado- y $\mathcal{C}$ es el cuerpo de constantes de K.*

Para la demostración es preferible probar antes el siguiente

LEMA. *En las condiciones del teorema, cada elemento no nulo $x \in \mathcal{C}[T]$ se puede escribir como una suma finita $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i t_i$, donde los ξ_i están en $\mathcal{C}^*$, los t_i están en T y $\nu(t_1) < \cdots < \nu(t_n)$.*

Este resultado se demuestra por recurrencia sobre el número de elementos de T necesarios para escribir x. Todas las condiciones del teorema son imprescindibles. Una vez probado el lema, el teorema es consecuencia de que K es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{C}[T]$ y las propiedades de las valoraciones diferenciales se comprueban sin dificultad. De nuevo son imprescindibles todas las condiciones impuestas a los cuerpos y a la valoración. Los detalles pueden consultarse en [**41**], en las páginas 309-310.

Enunciamos simplemente el resultado final de [**41**], pues el resto del artículo está centrado en propiedades más específicas de los cuerpos de Hardy.

TEOREMA. *Sea k un cuerpo diferencial y ν una valoración diferencial de k. Cualquier extensión de ν a una valoración en una extensión algebraica de k es diferencial para la extensión -única- de la derivación.*

2.4. Kolchin-Morrison. Derivaciones continuas. En [**26**] se introduce la denominación de *cuerpo valorado diferencial* para indicar un cuerpo diferencial $(K,')$, con una valoración ν *de rango* 1[4], que

[4]Esta condición es fundamental para que tenga sentido la construcción de la norma asociada a ν

cumple lo siguiente: si $||$ denota la norma asociada a la valoración, entonces existen elementos α y β del grupo de valores tales que

$$\alpha|a| \leq |a'| \leq \beta|a|$$

para cualquier elemento $a \in K$ de norma menor o igual que uno (i. e., si la norma asociada a ν es $|a| = e^{-\nu(a)}$, se pide la condición para los elementos de valor mayor o igual que 0, es decir, para los del anillo de valoración).

Para enunciar el resultado fundamental de Kolchin precisamos una definición:

Definición. Sea $(K,')$ un cuerpo diferencial y $P(y)$ un polinomio diferencial en la variable diferencial y. El polinomio P es una combinación lineal sobre K de ciertos monomios $y^{e_0}y'^{e_1}\ldots y^{(k)e_k}$. Llamaremos *denominación de* P al mayor número natural de la forma $\sum_k (k+1)e_k$. Si z es otra variable diferencial y d es la denominación de P, entonces $P(y/z)$ tiene denominadores en z de grado menor o igual que d. En general, para cualquier $s \geq 1$, llamaremos $s-$denominación de P al mayor de los números $\sum_k (k+s)e_k$. Si, en fin, K es un cuerpo diferencial y A es un subanillo diferencial de K y u es un elemento de K diferenciablemente algebraico sobre A, llamaremos $s-$denominación de u sobre A al número

$$\text{mín}\{d \in \mathbb{N} : \exists P \in A[y] \text{ pol. difer. con } s\text{-denominación } d \text{ y } P(u) = 0\}.$$

Se tiene (ver [**26**]) el siguiente resultado:

Teorema. *Sea $(K,',\nu)$ un cuerpo diferencial valorado no trivial (diferencial no nula y valoración no trivial). Sea A un subanillo diferencial no nulo tal que $|a| \geq 1$ para cualquier elemento no nulo $a \in A$. Sea $u \in K$ un elemento diferenciablemente algebraico sobre A. Sea s un número natural mayor o igual que uno. Llamemos d_s a la $s-$denominación de u sobre A. Entonces: existe γ en el grupo de valores de ν tal que*

$$|u - \frac{a}{b^s}| \geq \frac{\gamma}{|b|^{d_s}}$$

para cualesquiera elementos $a, b \in A$ con $b \neq 0$ y $u \neq \frac{a}{b^s}$.

Bien entendido, este teorema es una generalización del teorema de Liouville (ver [**28**]) sobre las aproximaciones de números algebraicos por sucesiones de racionales. Lo enunciamos para que el lector se dé cuenta de la similitud:

Teorema (Liouville). *Si α es un número complejo algebraico sobre los enteros cuyo polinomio mínimo tiene grado n, entonces existe $\gamma \in$*

$\mathbb{R}$, *mayor que* 0 *tal que*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{|q|^n}, \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

El teorema de Kolchin tiene la siguiente consecuencia:

TEOREMA ([**26**]). *Sea* $\sum_0^\infty c_k X^{s_k}$ *una serie de potencias con exponentes naturales (no nulos). Si la sucesión* $(\frac{s_{k+1}}{s_k})$ *no está acotada, entonces la serie es diferenciablemente trascendente sobre* $K(X)$.

En [**34**], se generaliza la noción definida por Kolchin de la siguiente manera: partimos de un cuerpo L, una valoración no arquimediana ν en L, que suponemos de rango 1 y trivial sobre el cuerpo primo de L. Sea K un subcuerpo de L y $D : K \to L$ una derivación.

DEFINICIÓN. Sea S un subconjunto de K. Se dice que D *está acotada inferiormente en* S si existe un $\gamma \in \Gamma$ (el grupo de valores de ν) tal que, para cualquier $s \in S$ diferente de cero, se tiene que

$$\nu(\frac{Ds}{s}) \geq \gamma.$$

Un tal γ se llamará una *cota inferior de* D *en* S.

PROPOSICIÓN ([**34**]). *Sea* R *un dominio de cuerpo de fracciones* K *y sea* γ *una cota inferior para* D *en* R. *Entonces* γ *es una cota inferior para* D *en todo* K.

PROPOSICIÓN ([**34**]). *Si* ν *no es la valoración trivial, entonces* D *es continua para la topología inducida en* K *por* ν *si y sólo si* D *está acotada inferiormente en* K.

Enunciamos sin demostración los resultados principales del trabajo de Morrison [**34**]. En adelante, (L, ν) será un cuerpo con una valoración de rango 1 y F y K serán subcuerpos de L. Supondremos que D es una derivación de L y llamaremos con la misma letra a las restricciones de D a K y F (que no tienen por qué ser derivaciones de esos cuerpos).

TEOREMA. *Supongamos que* K *es una extensión algebraica finita de* F. *Si* D *está acotada inferiormente (es continua) en* F, *entonces también lo está en* K.

TEOREMA. *Supongamos que* L *tiene característica* 0. *Sea* $F_0 = F(DF)$ *(el menor cuerpo que incluye a* F *y las derivadas de sus elementos). Sea* K *un subcuerpo de* L *finitamente generado sobre* F. *Si* D *está acotada inferiormente en* F *y si* F_0 *es algebraico sobre* F, *entonces la restricción de* ν *a* F_0 *se extiende a una valoración* ν' *en* L *respecto de la cual* D *está acotada inferiormente en* K.

TEOREMA. *Sean $F \subset K \subset L$ tres cuerpos y ν una valoración de L. Sea $D : K \to L$ una derivación. Supongamos que D tiene una cota inferior γ en F, que K es algebraico sobre F y que F tiene característica 0. Entonces D es continua en K con cota inferior γ.*

DEFINICIÓN. Denotaremos $Der_F(K, L)$ al conjunto de todas las $F-$derivaciones de K en L y $Der_F^\nu(K, L)$ a las que son continuas para una valoración ν de L.

LEMA. *Si K es un cuerpo de funciones algebraicas de una variable sobre F y éste es algebraicamente cerrado en K y $\nu|_F = 0$, entonces $Der_F^\nu(K, K) = Der_F(K, K)$*

PROPOSICIÓN. *Sea $F \subset K \subset L$ una cadena de cuerpos, ν una valoración de L y D una derivación de K en L. Supongamos que K es una extensión de F de grado de trascendencia uno y finitamente generada. Si ν es la valoración trivial en F y $D|_F$ está acotada inferiormente, entonces $D|_K$ también lo está.*

TEOREMA. *Sea F un cuerpo de característica 0, K una extensión de F de grado de trascendencia finito y ν una valoración discreta de rango 1 de K, trivial en F, de dimensión d*[5]*. Sea (L, ν) una complección de (K, ν). Entonces se tiene la siguiente cadena de desigualdades:*

$$1 \leq \dim_F(Der_F^\nu(K, L)) \leq d + 1.$$

COROLARIO. *Sean F, K y ν como en el teorema anterior. Son equivalentes:*

i) *Todas las derivaciones $D : K \to K$ nulas en F son continuas para la topología inducida por ν.*
ii) *La dimensión de ν es grad.tr. $(K/F) - 1$*

TEOREMA. *Sea K un subcuerpo de un cuerpo valorado (L, ν) de característica 0. Supongamos que existe una base finita de trascendencia $\{y_1, \ldots, y_n\}$, de L sobre K, con respecto a la cual ν está homogéneamente definida en $K(y_1, \ldots, y_n)$ -es decir, que es monomial-. Sea D una derivación de $K(y_1, \ldots, y_n)$ en una complección $(\hat{L}, \hat{\nu})$ de (L, ν) tal que $\nu(\frac{Da}{a}) \geq 0$ para todo $a \in K^*$ y tal que $\nu(\frac{Dy_i}{y_i}) \geq 0$ para todo i. Entonces D es continua y se extiende de manera única a una derivación continua $\hat{D}$ de $(\hat{L}, \hat{\nu})$. Además, $\hat{\nu}$ es una valoración diferencial de rango 1 del cuerpo diferencial $(\hat{L}, \hat{D})$*

[5]Esta noción puede entenderse como el grado de trascendencia del completado respecto de ν de K, sobre F.

3. Anillos de Weierstrass

La memoria propiamente dicha comienza, antes de introducir la relación entre campos de vectores y valoraciones, con el estudio de una categoría de anillos que incluya todos los que aparecen en la teoría de ecuaciones diferenciales: los anillos de series formales, convergentes y de tipo Gevrey. La propiedad común a todos ellos es la existencia de un teorema de Preparación de Weierstrass. Con esta idea, presentamos una definición de *álgebra aceptable*, que pretende abarcar todos los anillos que se comportan "de modo coherente" respecto de las operaciones naturales en series de potencias. En concreto, exigimos (además de la propiedad de Preparación), que sean cerrados por derivación parcial, y que sean cerrados por "composición". Aunque hay resultados referentes a anillos que admiten derivaciones (cf. [**32**]) y a subanillos del anillo de series formales (cf. [**43**] y [**27**]), todos se centran en anillos que cumplen determinadas propiedades algebraicas (noetherianidad, henselianidad, etc.). Nuestro estudio es el recíproco: partimos de un anillo que cumple propiedades relativas a sus elementos y obtenemos resultados algebraicos. En concreto, para los anillos que denominamos "de Weierstrass", demostramos la noetherianidad, el teorema de División, la existencia de series implícitas y el "teorema de parametrización local" (en la versión de la finitud de una extensión de cuerpos). Con una condición adicional, somos capaces de probar el teorema de la función inversa y la henselianidad, así como la factorización única.

Además de las propiedades estrictamente algebraicas, nos interesamos en la construcción formal de la "explosión local de un anillo de Weierstrass". Para polinomios y series convergentes, la definición de explosión local es puramente geométrica -en el sentido de que se puede construir a partir de objetos geométricos y de los anillos locales en el divisor excepcional. Para las series de potencias formales, se utiliza la complección. Sin embargo, los anillos de Series Gevrey (por ejemplo) no tienen una contrapartida geométrica clara, lo que hace que la definición no se pueda dar en términos de "entornos de puntos del divisor excepcional". Por otro lado, estos anillos no son completos, con lo que el paso al completado local es una operación inadecuada. Nosotros presentamos una definición categorial de explosión local de un anillo de Weierstrass regular, en la que quedan incluidos los anillos de series formales, convergentes y Gevrey, por lo menos. No así el anillo de polinomios, pues su estructura es más bien global -aunque se localice en un punto, el localizado posee las mismas funciones racionales que el anillo global.

4. Nuestra Propuesta: Valoraciones de L'Hôpital

En el segundo capítulo introducimos una generalización de las valoraciones diferenciales de Rosenlicht, con el fin de adaptarlas a la situación general de foliaciones de dimensión uno sobre espacios analíticos -aunque en este trabajo nos centraremos casi exclusivamente en el caso de superficies- y derivaciones en anillos de Weierstrass.

El interés de la generalización que presentamos se debe, entre otros aspectos, a la existencia, por una parte, de ecuaciones diferenciales ordinarias de grado mayor que uno sin solución analítica y, por otra, de campos de vectores holomorfos en superficies singulares (incluso normales) sin curvas solución. En [**20**] se demuestra que la ecuación de orden uno y grado tres siguiente:

$$(y')^3 + x^2(y')^2 - 7xyy' + 12y^2 + x^8 = 0$$

no tiene ninguna solución. En [**4**] se prueba una condición necesaria para la existencia de separatrices (curvas invariantes) de campos de vectores en superficies normales. Se da, asimismo, un ejemplo de campo de vectores en una tal superficie, que no posee ninguna separatriz que pase por la singularidad.

Este tipo de comportamientos, así como el hecho de que las valoraciones son la generalización "natural" del concepto de curva analítica (y, en general, de germen de subespacio analítico), lleva al estudio de la relación entre las valoraciones y los campos de vectores. Todos los estudios que ya hemos esbozado nos indujeron a la definición de valoración de L'Hôpital. Especialmente interesante es la idea de que son la expresión, en teoría valorativa, de la regla de L'Hôpital clásica. De este modo, las valoraciones que cumplen nuestra definición son, por así decirlo, la representación algebraica de los "lugares bien relacionados con un campo de vectores".

Para una singularidad simple genérica (en un sentido que precisaremos) de un germen de campo de vectores en el origen del plano complejo, las valoraciones de L'Hôpital localizan las separatrices: sea X el campo

$$X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}$$

en un entorno de 0, y ν_x, ν_y las valoraciones de rango dos sobre $\mathcal{M}$, asociadas a las curvas $(x = 0)$ e $(y = 0)$. Se tiene que una valoración centrada en $\mathbb{C}\{x, y\}$, que siga los puntos infinitamente próximos de una curva, es de L'Hôpital para X si y sólo si es ν_x ó ν_y. De hecho, existen más valoraciones de L'Hôpital para X, pero las presentaremos en su momento. Baste decir por ahora, que determinan las separatrices en una situación genérica. Asimismo, si un campo de vectores Y tiene una singularidad aislada en el origen del plano y tiene una solución formal no convergente, entonces la única valoración de L'Hôpital que existe para Y es la que sigue los puntos infinitamente próximos de dicha rama no convergente.

Todo el capítulo segundo está dedicado al estudio de tales valoraciones. Comenzamos con la teoría general, para después exponer sucintamente los tipos de valoraciones de las $\mathbb{C}-$álgebras de dimensión 2. Las clasificamos -como habitualmente, aunque la notación no está fijada- en divisoriales, de contacto con una rama formal, de contacto con una rama algebraica, de contacto con un divisor, valoraciones "con infinitos exponentes de Puiseux" y valoraciones "con un exponente de Puiseux irracional". El resultado clave es el Teorema 63. Supongamos que ∂ es un germen de campo de vectores en el origen del plano complejo, y que $(A, \mathfrak{m})$ es el anillo local de partida. Sea $\tilde{\partial}$ el transformado del campo tras una explosión[6]. Fijemos una valoración ν. Sea Q el centro de ν en el divisor excepcional. Entonces

TEOREMA. 63 *Si ν es una valoración centrada en $(A, \mathfrak{m})$ de L'Hôpital para ∂, distinta de la del orden en $\mathfrak{m}$, entonces Q es singular para $\tilde{\partial}$.*

De aquí deducimos inmediatamente que las valoraciones "que tienen infinitos pares de Puiseux" no son de L'Hôpital para ningún campo.

Para valoraciones divisoriales (es decir, las que corresponden a una cadena finita de explosiones con centros puntos), si Q es el *último centro* de una tal valoración ν, se tiene:

TEOREMA. 67 *Sea ν una valoración divisorial centrada en A. Sea Q el centro propio de ν. Sea ∂ una foliación por curvas sobre Spec(A), sin integral primera y sea $\tilde{\partial}$ la transformada estricta de ∂ en Q. Entonces*

$$\nu \text{ es de L'Hôpital para } \partial \Leftrightarrow \tilde{\partial} \text{ es dicrítica en } Q.$$

De donde se deduce que una foliación es dicrítica si y sólo si admite una valoración de L'Hôpital divisorial.

En el resto del capítulo hacemos el estudio exhaustivo de las valoraciones no divisoriales que son de L'Hôpital para campos de vectores en el plano complejo. Resumimos todos los resultados en el siguiente enunciado (para la notación referimos al lector a dicho capítulo):

[6] Algebraicamente no hay ninguna diferencia, por ser la explosión un morfismo birracional, pero es claro que geométricamente son dos objetos distintos (uno "abajo" y otro "arriba")

Teorema. *Sea X un germen de campo de vectores en el origen del plano complejo y sea ν una valoración no divisorial del cuerpo de funciones meromorfas $\mathcal{M}$. Sea P el centro de ν tras un número finito de explosiones, que suponemos (por el teorema de Seidenberg de reducción) que es* simple *para X. Entonces:*

- *Si ν corresponde a una rama formal, entonces ν es de L'Hôpital si y sólo si dicha rama es una separatriz de X.*
- *Si ν corresponde a una rama analítica (o a un divisor), entonces ν es de L'Hôpital si y sólo si dicha rama es una separatriz de X y P es una singularidad genérica de X.*
- *Si ν corresponde a una valoración con un par de Puiseux irracional, entonces ν es de L'Hôpital si y sólo si P es una singularidad genérica de X.*

Para recuperar las valoraciones que corresponden a curvas analíticas en singularidades no genéricas, recurrimos a una definición "débil" de valoración de L'Hôpital. La pega es que aparecen "demasiadas" valoraciones de L'Hôpital. Terminamos el capítulo recordando brevemente al lector que el estudio de valoraciones de L'Hôpital para derivaciones dadas en superficies singulares es exactamente el mismo que en el plano complejo, puesto que las valoraciones son las mismas (esencialmente el tipo de una valoración viene determinado por el tipo cofinal) en ambos casos (cf. [**53**]). El siguiente capítulo es una presentación de la *bóveda estrellada* -que es el conjunto de valoraciones de L'Hôpital para un campo- y de la parte inicial de una derivación respecto de una valoración no divisorial.

La bóveda estrellada representa, de modo conciso y esquemático, la estructura de las valoraciones de L'Hôpital para un campo de vectores (una derivación) en un entorno de un punto del plano complejo. Introducimos una métrica en la superficie de Riemann, cuya topología inducida es distinta de la de Zariski. Sin embargo, es más adecuada a nuestra situación, pues diferencia mediante propiedades topológicas (en la superficie de Riemann) los campos que tienen un comportamiento genérico y los que tienen soluciones formales no convergentes.

La parte inicial de una derivación respecto de una valoración es un objeto definido sobre el álgebra graduada de la valoración (objeto de importancia crucial en el estudio de las valoraciones). De manera análoga a la superficie de Riemann, se demuestra que una derivación posee parte inicial respecto de una valoración cuando los puntos infinitamente próximos de la valoración son singulares para el campo y además, el campo es genérico.

5. Grado mayor que uno. Dimensión mayor que 2

Los dos últimos capítulos presentan una generalización del estudio de los campos de vectores en el plano complejo a las ecuaciones diferenciales de grado superior y a las variedades analíticas de dimensión cualquiera. Brevemente, el resultado final para ecuaciones de grado superior es el

TEOREMA. 124 *Sea* $f(x, y, y') = 0$ *una ecuación diferencial ordinaria, analítica,* de grado finito*. Supongamos que el germen de superficie analítica dado por* $f(x, y, z) = 0$ *tiene singularidad aislada y admite una resolución cuyo grafo dual asociado es un árbol. Entonces existe una separatriz de* $f(x, y, y') = 0$*.*

Para campos de vectores en dimensión mayor que 2, estudiamos las valoraciones de L'Hôpital y débilmente de L'Hôpital asociadas a curvas y a divisores. Demostramos que caracterizan las separatrices de campos singulares y los divisores dicríticos (i. e. genéricamente transversales al transformado de la foliación). Aunque no entramos en materia, estos resultados son susceptibles de generalización a valoraciones asociadas a hipersuperficies e incluso a variedades de dimensión o codimensión mayor que 1 invariantes por un campo de vectores.

CAPíTULO 1

Anillos de Weierstrass

1. Introducción

El objetivo de este capítulo es introducir una clase de anillos que permita el manejo de valoraciones y transformaciones birracionales de modo simultáneo. El nivel de generalidad que nos interesa es el suficiente para cubrir los ejemplos básicos: polinomios, series convergentes, series formales y series de tipo Gevrey.

Como el estudio es de naturaleza estrictamente local, nuestro área de interés se reduce a los tres últimos tipos. Estas tres clases de anillos poseen un Teorema de Preparación de Weierstrass, que permite expresar todas las propiedades importantes en sistemas de coordenadas adecuados. Así, describimos la categoría de los anillos que "satisfacen" el teorema de Weierstrass. Después planteamos el problema de la definición de explosión local para esta categoría.

A la hora de trabajar con explosiones, hay esencialmente tres anillos para los cuales el concepto de explosión local es "natural":

1. Los anillos de polinomios (más concretamente, los anillos de funciones racionales). Esta clase es cerrada por localización y si se toma el anillo local en un punto de una variedad algebraica (v. gr. un punto cerrado del divisor excepcional de la variedad obtenida al explotar otra), se obtiene un anillo que pertenece a la misma categoría que el de partida y que representa las funciones racionales definidas en entornos (de Zariski) de un punto.
2. Las $k-$álgebras completas. En este caso, la explosión local se construye con la complección por el ideal maximal del localizado del anillo de la explosión en un punto del divisor excepcional.
3. Los anillos de series de potencias convergentes. Puesto que la explosión de un espacio analítico produce otro espacio analítico, para estudiar las propiedades analíticas locales en un punto del divisor excepcional, basta considerar el anillo local en dicho punto del haz de funciones analíticas del espacio obtenido por la explosión.

Sin embargo, en la teoría local de las ecuaciones diferenciales, aparece de manera natural el anillo de series de potencias formales de clase Gevrey. Puesto que no se tiene una estructura geométrica clara asociada a ellos, no es posible definir la explosión local con las herramientas anteriores. Esto nos llevó a plantearnos la construcción de este morfismo para una clase de anillos que incluyera, al menos, los dos últimos, junto con los anillos de tipo Gevrey: esta familia es la de los anillos de Weierstrass. Pensamos que tal construcción justifica plenamente el formalismo que introducimos.

2. Definición y propiedades fundamentales.

En todo el capítulo, κ será un cuerpo de característica 0 -no necesariamente algebraicamente cerrado- y $\mathcal{O}$ un anillo conmutativo con unidad, que supondremos es una $\kappa-$álgebra local de maximal $\mathfrak{m}$. Siempre supondremos que el maximal es finitamente generado como ideal y que el completado de $\mathcal{O}$ para la topología $\mathfrak{m}-$ádica es isomorfo a un anillo de series de potencias en un número finito de variables. Imponemos además que el ideal $\mathfrak{m}$ admite un sistema de generadores de cardinal la dimensión de $\hat{\mathcal{O}}$. A los sistemas de generadores de $\mathfrak{m}$ con dicho cardinal los llamaremos -abusando momentáneamente de notación- *sistemas de parámetros de* $\mathfrak{m}$. Supongamos, por concretar, que la dimensión de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{m}}$ es $n+1$ y tomemos un sistema de parámetros $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ de $\mathfrak{m}$.

Un *polinomio de Weierstrass respecto de un sistema de parámetros* $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ será un elemento $f \in \mathcal{O}$ tal que su imagen en el completado $\hat{\mathcal{O}} \simeq \kappa[[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]]$ es un polinomio de Weierstrass ordinario respecto de x_{n+1}, de la forma

$$x_{n+1}^r + a_{r-1}x_{n+1}^{r-1} + \cdots + a_0$$

donde los a_i son elementos del ideal $(x_1, \ldots, x_n)\mathcal{O}$.

Por *elemento regular de orden* r en x_{n+1}, respecto del sistema de parámetros$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ entenderemos un elemento cuya imagen en $\kappa[[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]]$ es un elemento regular de orden r en x_{n+1} en el sentido habitual.

Definición 1. *Diremos que* $\mathcal{O}$ tiene la propiedad de Weierstrass respecto de $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *si para cualquier elemento* $f \in \mathcal{O}$ *regular en* x_{n+1} *de orden* r*, existen* $u, h \in \mathcal{O}$ *con*

$$f = uh$$

donde u *es una unidad de* $\mathcal{O}$ *y* h *un polinomio de Weierstrass de grado* r *en* x_{n+1}.

DEFINICIÓN 2. *Se dice que* $\mathcal{O}$ tiene la propiedad de Weierstrass respecto de un sistema de parámetros $(x_1, \dots, x_{n+1})$*, si* $\mathcal{O}$ *tiene la propiedad de Weierstrass para cualquier reordenación de dicho sistema.*

EJEMPLO 3. El morfismo $\mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}}$ no es necesariamente inyectivo. Tómese $\mathcal{O} = \mathcal{E}_n$, el anillo de funciones infinitamente diferenciables en n coordenadas, que cumple la propiedad de Weierstrass (resultado debido a Malgrange, ver [**29**]) pero que no se inyecta en su completado (el anillo de series de potencias formales).

DEFINICIÓN 4. *Diremos que una* κ*-álgebra local* $\mathcal{O}$ *de ideal maximal* $\mathfrak{m}$*, cuyo completado es isomorfo a una* $\kappa-$*álgebra de series de potencias formales en un número finito de variables, es* aceptable *si*

1. *es separada para la topología* $\mathfrak{m}-$*ádica.*
2. *dado un sistema de parámetros* $(x_1, \dots, x_n)$ *de* $\mathfrak{m}$ *y el morfismo de paso al completado*
$$\mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}} \simeq \kappa[[x_1, \dots, x_n]]$$
se tiene que, para cualesquiera $f \in \mathcal{O}$ *y* $g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{m}$*, la "sustitución"*
$$f(g_1, \dots, g_n)$$
que tiene perfecto sentido en el completado, es un elemento de [la imagen de] $\mathcal{O}$*.*
3. *Dado un sistema de parámetros* $(x_1, \dots, x_n)$*, las derivaciones parciales de* $\kappa[[x_1, \dots, x_n]] \simeq \hat{\mathcal{O}}$ *respecto de los* x_i *inducen derivaciones en [la imagen de]* $\mathcal{O}$*.*

EJEMPLO 5. Las condiciones de la definición anterior son mutuamente independientes:

- La $\mathbb{R}-$álgebra $\mathcal{O} = \mathbb{R}[[x^2, x^3, \dots]]$, es separada para la topología $\mathfrak{m}-$ádica, es cerrada por "sustitución" pero, evidentemente, no es cerrada para la derivación usual $x' = 1$ (aunque este ejemplo no es del todo válido, pues $\hat{\mathcal{O}}$ no es un anillo regular).
- El anillo de funciones $\mathcal{E}_n$ es cerrado para derivación y sustitución, pero no es separado para la topología $\mathfrak{m}-$ádica.
- Un ejemplo de $\mathbb{C}-$álgebra separada y cerrada por derivación parcial pero no cerrada por sustitución es $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x]][y]$ (el anillo de polinomios sobre un anillo de series de potencias formales).

LEMA 6. *Las condiciones* 2 *y* 3 *no dependen del sistema de parámetros.*

Demostración. El cambio de sistema de parámetros induce un isomorfismo en el completado, que se refleja en los respectivos anillos $\kappa[[x_1,\dots,x_n]]$ y $\kappa[[y_1,\dots,y_n]]$ (para sistemas $(x_1,\dots,x_n)$ e $(y_1,\dots,y_n)$). Si la condición 2 se cumple para el primer sistema, se debe cumplir para el segundo, pues el isomorfismo mencionado no es más que sustituir las x_i por sus expresiones en las y_j.

La prueba de la independencia de la condición 3 es similar: aplíquese la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

□

Teorema 7. *Si $\mathcal{O}$ es aceptable y tiene la propiedad de Weierstrass respecto de un sistema de parámetros $(x_1,\dots,x_n)$, entonces la tiene respecto de todos.*

Demostración. Lo primero que hacemos notar es que, si a es un elemento de $\mathcal{O}$ invertible en $\hat{\mathcal{O}}$, entonces a es invertible en $\mathcal{O}$, por ser regular de orden 0 respecto de cualquier sistema de parámetros.

Sea $(y_1,\dots,y_n)$ otro sistema de parámetros. Existen elementos $\lambda_{ij} \in \mathcal{O}$ tales que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Como esta transformación es un cambio de parámetros, alguno de los λ_n^i tiene que ser una unidad en $\mathcal{O}$ y, en la situación en que nos encontramos, es indiferente cuál sea, así que podemos suponer que es $\lambda_n^n \in \mathcal{O}^\star$. De aquí se deduce que $x_n = w_n y_n - v_n(x_1,\dots,x_{n-1})$, para ciertos w_n, unidad de $\mathcal{O}$ y $v_n \in \mathcal{O}$.

Sea f un elemento de $\mathcal{O}$, regular en y_n de orden r. Visto lo anterior, f es también regular en x_n de orden r y, por hipótesis, tenemos una igualdad

$$f = \overline{u}\overline{h}$$

donde $\overline{u}$ es una unidad de $\mathcal{O}$ y $\overline{h}$ es un polinomio de Weierstrass de $\mathcal{O}$ en la variable x_n de orden r. Sea $\mathcal{O}^x_{n-1}$ el subanillo de $\mathcal{O}$ siguiente:

$$\mathcal{O}^x_{n-1} = \mathcal{O}\bigcap \kappa[[x_1,\dots,x_{n-1}]].$$

Por ser $f = \overline{u}\overline{h}$, el anillo $\mathcal{O}/(f)$ está generado, como $\mathcal{O}^x_{n-1}-$álgebra por los elementos $(\overline{1}, \overline{x}_n, \dots, \overline{x}_n^{r-1})$ -donde las barras indican “clase residual módulo (f)"- y, por tanto, por $(\overline{1}, \overline{y}_n, \dots, \overline{y}_n^{r-1})$. De esto inferimos que hay ciertos $b_1, \dots, b_r \in \mathcal{O}_{n-1}^x$ y $u \in \mathcal{O}^\star$ tales que

$$f = u(y_n^r + b_1^{r-1} y_n^{r-1} + \cdots + b_r).$$

Por otra parte, en el anillo de series de potencias formales en $(y_1, \dots, y_n)$ se tiene otra igualdad

$$f = v(y_n^r + c_1^{r-1} y_n^{r-1} + \cdots + c_r).$$

donde los c_i son series de potencias, sin término independiente, en las variables $(y_1, \dots, y_{n-1})$. Como esta descomposición es única en $\kappa[[y_1, \dots, y_n]]$, resulta que $b_i = c_i$, para todo i, y, por tanto, que f se escribe como polinomio de Weierstrass en y_n con coeficientes en $\mathcal{O}_{n-1}^y$. $\square$

Este resultado nos permite dar la siguiente definición general:

Definición 8. *Se dirá que una $\kappa-$álgebra aceptable $\mathcal{O}$ es un* anillo de Weierstrass regular *si existe un sistema de parámetros respecto del cual $\mathcal{O}$ cumple la propiedad de Weierstrass.*

Ejemplo 9. *Nótese que ningún anillo de polinomios es un anillo de Weierstrass regular.*

Teorema 10. *En las condiciones de este capítulo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{O}$ es un anillo de Weierstrass regular.*
2. *$\mathcal{O}$ es un anillo aceptable y para cualquier sistema de parámetros $(x_1, \dots, x_n)$ del maximal y cualesquiera $f, g \in \mathcal{O}$ con g regular en la variable x_n, de orden d, existen $q, r \in \mathcal{O}$ tales que*
$$f = gq + r$$
y r es un polinomio en x_n con coeficientes en $\mathcal{O}_{n-1}^x$ de grado menor que d.

Demostración. Que 2 implica 1 es inmediato: dividiendo x_n^d entre f se obtiene $x_n^d = qf + r$; q debe ser una unidad (por ser f regular en x_n) y se termina. Para ver la implicación contraria se utiliza el mismo argumento que en el teorema anterior. $\square$

El siguiente lema, cuya demostración dejamos al lector, es esencial para probar las propiedades fundamentales de los anillos de Weierstrass regulares:

Lema 11. *Sea $\mathcal{O}$ un anillo de Weierstrass regular y $f \in \mathcal{O}$. Existe un sistema de parámetros $(x_1, \dots, x_n)$ en $\mathfrak{m}$ -el maximal de $\mathcal{O}$- tal que f es regular en x_n.*

NOTA 12. *De hecho, existen infinitos sistemas de parámetros que cumplen esa condición. Es más, fijado un sistema $(y_1, \ldots, y_n)$, las matrices inversibles (a_{ij}) con coeficientes en κ tales que el sistema de parámetros $(y'_1, \ldots, y'_n)$ dado siguiente*

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

cumple que f es regular respecto de y'_n, forman un abierto del grupo lineal $GL_n(\kappa)$, para la topología de Zariski.

Estamos en condiciones de demostrar las propiedades más importantes de los anillos de Weierstrass regulares. Las resumimos todas en el siguiente

TEOREMA 13. *Sea $\mathcal{O}$ un anillo de Weierstrass regular cuyo completado es $\kappa[[x_1, \ldots, x_n]]$. Se tiene que*

1. *$\mathcal{O}$ es noetheriano.*
2. *$\mathcal{O}$ es un Dominio de factorización única.*
3. *$\mathcal{O}$ es local regular de dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Se procede por inducción sobre n -la dimensión del completado. Si $n = 0$, el anillo $\mathcal{O}$ es un cuerpo, que es noetheriano. Supongamos que todo anillo de Weierstrass regular de dimensión n es noetheriano y que $\hat{\mathcal{O}}$ tiene dimensión $n+1$. Sea $I \subset \mathcal{O}$ un ideal y $f \in I$. Por el lema anterior, hay un sistema de parámetros $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathfrak{m}$ tal que f es regular en x_{n+1}, pongamos de orden d. Por la hipótesis sobre $\mathcal{O}$, podemos suponer que f es un polinomio de Weierstrass de orden d en x_{n+1}. Sea I' el ideal

$$I' = I \bigcap \mathcal{O}_n^x[x_{n+1}].$$

El anillo $\mathcal{O}_n^x$ es de Weierstrass regular; por inducción, es noetheriano y, por tanto, también lo es $\mathcal{O}_n^x[x_{n+1}]$: así pues, hay un sistema finito de generadores de I', pongamos $(f_1, \ldots, f_t)$. Veamos que $I = (f_1, \ldots, f_t, f)$. Sea g un elemento de I. Por la propiedad de división, existen $q \in \mathcal{O}$ y $r \in \mathcal{O}_n^x[x_{n+1}]$ tales que $g = fq + r$. Como f y g son elementos de I, también debe serlo r. De donde $r \in I'$. Como I' está generado por $(f_1, \ldots, f_t)$, se tiene que

$$g = fq + f_1\lambda_1 + \cdots + f_t\lambda_t.$$

2. Seguimos la demostración que hace Malgrange [**29**] para anillos de funciones analíticas reales. Se procede por inducción sobre la dimensión de $\hat{\mathcal{O}}$. Para $n = 0$ es cierto, porque $\mathcal{O}$ es un cuerpo. Supongámoslo

cierto para $n-1$ y sea $\mathcal{O}$ un anillo de Weierstrass cuyo completado tiene dimensión n. Recordamos que, como $\mathcal{O}$ es un anillo noetheriano, es suficiente demostrar que todo elemento irreducible en $\mathcal{O}$ es primo. Sea f un elemento irreducible de $\mathcal{O}$. Tras un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que f es regular en x_n y que es, de hecho, un polinomio de Weierstrass de $\mathcal{O}$ en la variable x_n. Hacemos notar que el anillo $\mathcal{O}[x_n]$ es un dominio de factorización única (lema de Gauss). El resultado que buscamos se sigue del siguiente lema, cuya demostración haremos más tarde:

LEMA 14. *Si $P \in \mathcal{O}$ es un polinomio de Weierstrass irreducible en $\mathcal{O}^x_{n-1}[x_n]$, entonces P es primo en $\mathcal{O}$.*

3. Que es local se tiene por definición. Que tiene dimensión n se demuestra por inducción sobre la dimensión del completado, de la siguiente manera: si ésta es 0, el anillo $\mathcal{O}$ es un cuerpo y tiene dimensión 0. Supongamos que el resultado es cierto cuando $\hat{\mathcal{O}}$ tiene dimensión n. Como $\mathcal{O}$ es noetheriano, basta demostrar que el número mínimo de generadores de cualquier ideal $\mathfrak{m}-$primario de $\mathcal{O}$ es $n+1$ (ver, por ejemplo, [**2**]). Sea I un ideal $\mathfrak{m}-$primario y sea $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ un sistema de parámetros para $\mathfrak{m}$. Como siempre, $\mathcal{O}^x_n$ denotará la intersección de $\mathcal{O}$ con el anillo de series en los n primeros parámetros, que es un anillo de Weierstrass regular cuyo completado tiene dimensión n. Por la hipótesis de inducción, $\mathcal{O}^x_n$ tiene dimensión n y por tanto

$$\dim(\mathcal{O}^x_n[x_{n+1}]) = n+1.$$

Supongamos, para llegar a una contradicción, que I está generado por t elementos, $f_1, \ldots, f_t$, con $t < n+1$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que los f_i son polinomios de Weierstrass en x_{n+1} -por la propiedad de sustitución. Nótese que, mientras el cambio sea de la forma $x_{n+1} = z_{n+1}$, no hay problema en que las series sean formales en la última variable. El ideal $I^c = I \cap \mathcal{O}^x_n$ es $\mathfrak{m}_n-$primario (donde $\mathfrak{m}_n$ es el maximal de $\mathcal{O}^x_n$). Éste ideal I^c coincide, por otra parte, con la contracción de $(f_1, \ldots, f_t)\kappa[[x_1, \ldots, x_{n+1}]]$ a $\mathcal{O}^x_n[x_{n+1}]$. Es decir,

$$I^c = (f_1, \ldots, f_t)\kappa[[x_1, \ldots, x_{n+1}]] \cap \mathcal{O}^x_n[x_{n+1}]$$

que, al ser los f_i polinomios en x_{n+1}, está generado por los mismos $(f_1, \ldots, f_t)$. Pero esto contradice el hecho de que $\dim(\mathcal{O}^x_n[x_{n+1}]) = n+1$, pues estábamos suponiendo que $t < n+1$.

El anillo $\mathcal{O}$ es regular porque su completado es un anillo de series formales -y, por tanto, su graduado es un anillo de polinomios. $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 14. Sean $g, h \in \mathcal{O}$ tales que P divide a gh. Sean $\overline{g}, \overline{h}$ los restos de dividir g y h, respectivamente, por P. El elemento P divide a $\overline{g}\overline{h}$ en el anillo $\mathcal{O}$. Por hipótesis de inducción (sobre la dimensión de $\hat{\mathcal{O}}$), P es primo en $\mathcal{O}^x_{n-1}[x_n]$, así que basta demostrar que P divide a $\overline{g}\overline{h}$ en este anillo.

Tenemos, por tanto, que $\overline{g}\overline{h} = PQ$ con $Q \in \mathcal{O}$ y que $\overline{g}\overline{h} = PQ' + R'$, con $Q', R' \in \mathcal{O}^x_{n-1}[x_n]$ (por división euclídea) y tal que el grado (en x_n) de R' es menor que el de P. Aplicando la unicidad de la división en el anillo de series formales en n variables, debe tenerse que $R' = 0$ y que $Q = Q'$. □

Proposición 15. *Los anillos de Weierstrass regulares son formalmente jacobianos; es decir, el módulo de diferenciales de Kähler separadas $\Omega_{\mathcal{O}|\kappa}$ es $\mathfrak{m}-$ádicamente regular.*

La demostración es consecuencia directa de las hipótesis impuestas a $\mathcal{O}$ sobre las derivadas parciales de sus elementos, y del siguiente resultado[1]:

Lema 16. *[[**3**], citado en [**55**]] Si $(A, \mathfrak{m}, \kappa)$ es un anillo local regular, $n-$dimensional, equicaracterístico, κ_0 es un cuerpo de coeficientes de A que contiene a κ y $(x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema regular de parámetros de A, entonces la compleción $\mathfrak{m}-$ádica de A es el anillo de series formales $\kappa_0[[x_1, \ldots, x_n]]$. Si, además, las derivadas parciales de en esa presentación aplican A en A, entonces A es formalmente jacobiano.*

Proposición 17. *Los anillos de Weierstrass regulares son excelentes.*

Es consecuencia del siguiente

Lema 18. *[[**31**]] Sea κ un cuerpo de característica 0. Sea A un anillo regular de dimensión n que contiene a κ. Supongamos que*

1. *Para cada maximal $\mathfrak{m}$ de A, la extensión de cuerpos $[A/\mathfrak{m} : \kappa]$ es algebraica y la altura de $\mathfrak{m}$ es n.*
2. *Existen $D_1, \ldots, D_n \in \mathrm{Der}_{\kappa}(A)$ y $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $D_i(x_j) = \delta_{ij}$.*

Entonces A es excelente.

3. Los anillos de Weierstrass como anillos de la geometría

Hasta ahora, la condición impuesta sobre las derivaciones de un anillo de Weierstrass regular no se ha utilizado más que para probar la excelencia. Nos ha parecido, sin embargo, conveniente hacer desde el principio un estudio de los anillos con dicha condición: por una parte, para

[1]Las hipótesis del lema siguiente son mucho más generales de lo que necesitamos.

evitar recargar la nomenclatura, y por otra, porque geométricamente tendría poco sentido utilizar $\kappa-$álgebras locales regulares no cerradas para las derivaciones parciales respecto de un sistema de parámetros -el cono tangente sería demasiado excepcional. Además, como se verá en la sección siguiente, esta propiedad es esencial para la prueba de la henselianidad en los que denominaremos anillos de Weierstrass grandes. En esta parte utilizamos la estructura diferencial de los anillos de Weierstrass para los teoremas clásicos de parametrización local, etc.... Primero de todo, damos la definición general:

DEFINICIÓN 19. *Un anillo $\mathcal{O}$ se llama* de Weierstrass*, si es un cociente de un anillo de Weierstrass regular por un ideal*

EJEMPLO 20. *Cualquier anillo local de una variedad analítica, los cocientes del anillo de series de potencias formales (anillos de variedades algebroides), los cocientes de anillos de tipo Gevrey... son todos anillos de Weierstrass.*

En la sección anterior vimos que la noción de sistema de parámetros para un anillo de Weierstrass regular coincide con la clásica. A partir de ahora, si $\mathcal{O}$ es de Weierstrass y regular, un *sistema de coordenadas* de $\mathcal{O}$ será un sistema de parámetros.

Para fijar ideas, en esta sección, $\mathcal{O}$ denotará siempre un anillo de Weierstrass regular y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal; fijado un sistema de coordenadas de $\mathcal{O}$, digamos $(x_1, \ldots, x_n)$, denotaremos $\mathcal{O}_r^x$ al anillo

$$\mathcal{O}_r^x = \mathcal{O} \cap \kappa[[x_1, \ldots, x_r]].$$

Sea I un ideal de $\mathcal{O}$. Definimos, siguiendo [**24**],

DEFINICIÓN 21. *Un* sistema de coordenadas casi-regular para I *es un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{O}$ tal que existe un $r \in \{0, \ldots, n\}$ que cumple las tres propiedades siguientes*

1. $I \cap \mathcal{O}_r^x = \{0\}$.
2. *$\mathcal{O}/I$ es una extensión entera de $\mathcal{O}_r^x$.*
3. *$\mathcal{O}/I$ está generado como $\mathcal{O}_r^x-$álgebra por las clases de los elementos $x_{r+1}, \ldots, x_n$ módulo I.*

Para ideales primos, definimos

DEFINICIÓN 22. *Si I es un ideal primo, diremos que un sistema de coordenadas casi-regular para I es* regular *si el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}/I$ está generado por la clase de x_{r+1} módulo I sobre el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_r^x$.*

Sea $S = (x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas de $\mathcal{O}$. Sea I un ideal de $\mathcal{O}$. Denotaremos por $d_S(I)$ a la dimensión del siguiente $\kappa-$espacio vectorial:

$$d_S(I) = \dim\left(\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0)\right) \in \kappa^n : f \in I\right\rangle\right).$$

LEMA 23. *El número $d_S(I)$ es independiente del sistema de coordenadas S.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de la regla de la cadena. Obsérvese que aquí es *imprescindible* que $\mathcal{O}$ sea cerrado para las derivadas parciales. □

Por tanto, podemos dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 24. *Dado un ideal I de $\mathcal{O}$ y un sistema de coordenadas de $\mathcal{O}$,*

$$d(I) = d_S(I)$$

DEFINICIÓN 25. *Un ideal I de $\mathcal{O}$ se dice* regular *si existe un sistema de generadores de I de cardinal $d(I)$.*

Dejamos al lector la demostración del siguiente resultado técnico:

LEMA 26. *De todo sistema de generadores de un ideal I, propio y regular, de $\mathcal{O}$ se puede extraer un subsistema de generadores de cardinal $d(I)$. Además, si $d(I) = n$, entonces $I = \mathfrak{m}$.*

TEOREMA 27. *[De existencia de series implícitas] Sean m, n dos naturales mayores o iguales que 1. Sea $\mathcal{O}$ un anillo regular de Weierstrass de dimensión $n + m$ y sea $(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ un sistema de coordenadas. Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}$ tales que*

$$f_j(0) = 0,\ \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right)_{ij} \neq 0.$$

Entonces, existen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{O}_m^z$ tales que

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, z) = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre n. Si $n = 1$, el resultado es consecuencia de la propiedad de Weierstrass. Supongamos que $n > 1$. Como el orden de los x_i no influye, podemos suponer que $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \neq 0$. Por el teorema de división,

$$f_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{z})(x_n - \xi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \mathbf{z}))$$
$$f_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = q_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})f_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + r_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, \mathbf{z}),\ j = 1, \ldots, n-1$$

con $\xi, r_j \in \mathcal{O}_{n+m-1}^{x,z}$ (el anillo $\mathcal{O}$ "sin la variable x_n"). Tenemos, por tanto, las siguientes igualdades:

a $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) = u(0) \neq 0$

b $\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(0) = q_j(0)\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0),$ para $j = 1, \dots, n-1$

c $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0) = q_j(0)\frac{\partial f_n}{\partial x_k}(0) + \frac{\partial r_j}{\partial x_k}(0),$ para $k, j = 1, \dots, n-1.$

De donde

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial x_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & 0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}(0)$$

por lo que la matriz formada por las $n-1$ primeras filas y columnas es invertible. Por inducción, existen $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathcal{O}_m^z$ tales que

$$r_j(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \mathbf{z}) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n-1.$$

La demostración termina tomando $\xi_n = \xi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \mathbf{z})$, que está en $\mathcal{O}_m^z$ por la propiedad de sustitución. □

La existencia de sistemas de parámetros regulares y casi-regulares está asegurada por el siguiente

TEOREMA 28 (De parametrización local). *Sea I un ideal de $\mathcal{O}$, que suponemos que es un anillo de Weierstrass regular. Entonces existe un sistema de coordenadas de $\mathcal{O}$ casi-regular para I. Además, si I es primo, existe un sistema de coordenadas regular.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f un elemento de I, que suponemos diferente de 0 (y que no es unidad, pues en este caso el ideal sería $\mathcal{O}$ y el resultado es cierto). Podemos suponer, además, que f es regular en x_n. Por la propiedad de Weierstrass, existen u y P, que son respectivamente, una unidad de $\mathcal{O}$ y un polinomio de Weierstrass de $\mathcal{O}$ en x_n, tales que $f = uP$. Sea I' el contraído de I al anillo $\mathcal{O}_{n-1}^x$. Por inducción, existe un sistema de coordenadas casi-regular para I' en $\mathcal{O}_{n-1}^x$; es decir, un sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_{n-1})$ de $\mathcal{O}_{n-1}^x$ y un $r \leq n-1$ tales que $I' \cap \mathcal{O}_r^y = \{0\}$, el anillo $\mathcal{O}_r^y/I'$ es una extensión entera de $\mathcal{O}_r^y$ y $\mathcal{O}_r^y/I'$ está generado como $\mathcal{O}_r^y-$álgebra por las clases módulo I' de $y_{r+1}, \dots, y_n$.

Tomando el sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)$ (y abusando de la notación), es

$$I \cap \mathcal{O}_r^y = I' \cap \mathcal{O}_r^y = \{0\}.$$

Sea g un elemento de $\mathcal{O}$. Dividiendo entre P, obtenemos

$$g = qP + \sum_{i=1}^{d} r_i x_n^i$$

donde los r_i están en $\mathcal{O}_r^y$. De donde la clase de g módulo I cumple la ecuación siguiente:

$$\overline{g} = \sum_{i=1}^{d} \overline{r}_i \overline{x}_n^i,$$

de donde $\overline{g} \in \mathcal{O}_r^y[\overline{x_n}]$.

La ecuación $\overline{P(x_n)} = 0$ es una ecuación de dependencia entera para $\overline{x_n}$; por tanto, utilizando la hipótesis de inducción y la transitividad de la dependencia entera, concluimos que la extensión

$$\mathcal{O}_r^y \rightarrowtail \mathcal{O}/I = (\mathcal{O}_{n-1}^y/I')[x_n]$$

es entera. Además,

$$\mathcal{O}/I = \mathcal{O}_r^y[\overline{y_{r+1}}, \ldots, \overline{y_{n-1}}, \overline{x_n}] = \mathcal{O}_r^y[\overline{x_{r+1}}, \ldots, \overline{x_n}].$$

Si el ideal I es primo, la extensión de cuerpos $\mathcal{O}_r^y/\mathfrak{m}_r \rightarrowtail (\mathcal{O}/I)/\mathfrak{m}$ es algebraica y, por el teorema del elemento primitivo, monógena. Llamamos a los generadores del sistema casi-regular $(x_1 \ldots, x_n)$, para no cargar la notación. Sea $c = \lambda_{r+1}\overline{x_{r+1}} + \cdots + \lambda_n \overline{x_n}$ un generador de la extensión de cuerpos anterior. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\lambda_{r+1} \neq 0$. El sistema $(x_1, \ldots, x_n)$ es regular para I. $\square$

COROLARIO 29. *Dado un anillo de Weierstrass $\mathcal{O}/I$, existe un anillo de Weierstrass regular $\mathcal{O}'$ tal que el cuerpo de fracciones $Fr(\mathcal{O}/I)$ es una extensión algebraica finita de $\mathcal{O}'_{(0)}$.*

3.1. Anillos de Weierstrass grandes. El lector habrá notado que no hemos demostrado el teorema de la función inversa. Esto se debe a que se requiere una condición adicional sobre los anillos de Weierstrass, que satisfacen todos los ejemplos que conocemos (series convergentes, formales, Gevrey) pero que no hemos sido capaces de verificar en general. Enunciamos la siguiente

Conjetura: Si $\mathcal{O}$ es un anillo de Weierstrass regular y $z_1, \ldots, z_n$ es un conjunto de variables sobre $\mathcal{O}$ y A es el mínimo anillo de Weierstrass de $\hat{\mathcal{O}}[[z_1, \ldots, z_n]]$ que contiene a $\mathcal{O}$ y a las z_i, entonces $A \cap \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

Puesto que desconocemos hasta la fecha si el enunciado es cierto, llamaremos *anillos de Weierstrass grandes* a los anillos de Weierstrass -según nuestra definición- que cumplan la condición de la conjetura.

TEOREMA 30. *Los anillos de Weierstrass grandes son henselianos. Además, cualquier sistema de ecuaciones polinómica sobre un anillo de Weierstrass grande que tenga solución en el completado, tiene solución en el anillo.*

Demostración. Se trata de demostrar que si $F(z)$ es un polinomio de $\mathcal{O}[z]$ que descompone de la siguiente manera

$$F(0;z) = \prod_{j=1}^{p} (z-\sigma_j)^{r_j}$$

con $\sigma_j \in \kappa$, entonces existen $f_j \in \mathcal{O}[z]$ tales que

1 $F(z) = \prod_{j=1}^{p} f_j(z)$,
2 $f_j(0;z) = (z-\sigma_j)^{r_j}$, para $j = 1 \dots p$.

Procedemos por inducción. El caso de grado 0 es vacío. Supongamos, por tanto, que el resultado es cierto para todo natural $k < r$. Tomemos $G(z) = F(z+\sigma_1)$.

Este elemento es regular en z de orden r_1 en el anillo $\mathcal{O}[[z]]$. Por construcción, G está en el menor anillo de Weierstrass que contiene a $\mathcal{O}$ y a la variable z. Por tanto, $G(z) = u(z)G^\star(z)$ donde $u(0) \neq 0$ y $G^\star(z)$ es un polinomio de Weierstrass en $\mathcal{O}[[z]]$ en la variable z, de grado $r = r_1 + \cdots + r_p$ y cuyos coeficientes pertenecen a $\mathcal{O}$, por hipótesis.

Sean ahora $P(z) = u(z-\sigma_1)$ y $Q(z) = G^\star(z-\sigma_1)$. Como $Q(0;z) = (z-\sigma_1)^{r_1}$, la serie $P(z) \in \mathcal{O}[[z]]$ es regular de orden $r - r_1$ en z. Aplicando de nuevo el enunciado de la conjetura, obtenemos que $P(z) = v(z)H(z)$, donde $H(z)$ es un polinomio de Weierstrass de grado $r - r_1$ con coeficientes en $\mathcal{O}$ y $v(z)$ una unidad. Por inducción, $H(z)$ descompone en producto de polinomios $F_j(z)$ que cumplen la propiedad pedida para σ_j, $j = 2, \dots, r$. Tomando $F_1(z) = P(z)$, se termina.

La demostración de que cualquier sistema de ecuaciones polinómicas con solución en el completado, tiene solución en el anillo es consecuencia directa de la proposición siguiente -que se puede aplicar porque ya hemos visto que son excelentes. □

Proposición 31. *[**[43]**] Sea A un anillo semilocal, excelente, que contiene a los números racionales. Sea I su ideal de Jacobson. Sea $A^h = (A,I)^h$ la henselianización del par (A,I) y sea $\hat{A}$ la complección $I-$ádica de A. Supongamos que el sistema de polinomios con coeficientes en A siguiente*

$$\begin{cases} g_1(y_1,\dots,y_n) = 0 \\ \vdots \\ g_s(y_1,\dots,y_n) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución $\hat{y_1},\dots,\hat{y_n}$ en $\hat{A}$. Entonces existen $\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_n \in A^h$ que son solución del sistema.

NOTA 32. *En general, no hemos sido capaces de demostrar el Teorema 30 sin la condición de grandeza, aunque los ejemplos usuales (series formales, convergentes y Gevrey) son todos ellos henselianos.*

Para estos anillos, como ya dijimos, se tiene el teorema de la función inversa:

TEOREMA 33. *Si un anillo de Weierstrass $\mathcal{O}$ es grande, entonces cumple las condiciones del teorema de la función inversa: cualquier endomorfismo de $\mathcal{O}$ cuyo jacobiano tenga determinante no nulo, es un isomorfismo*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para fijar la notación, que el anillo $\mathcal{O}$ es de dimensión n y que $(z_1, \ldots, z_n)$ es un sistema de coordenadas. Sea $(y_1, \ldots, y_n)$ un sistema de n variables sobre $\mathcal{O}$ y escribamos el morfismo como:

$$\varphi(z_1) = w_1, \ldots, \varphi(z_n) = w_n.$$

Sea $\tilde{\mathcal{O}}$ el menor anillo de Weierstrass que contiene a $\mathcal{O}$ y a las variables $(y_1, \ldots, y_n)$. Consideremos las series

$$g_j(\mathbf{z}, \ldots, \mathbf{y}) = w_j - y_j, \text{ para } j = 1 \ldots n.$$

El determinante

$$\det \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right)$$

es distinto de 0. Por el teorema de las funciones implícitas, existen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \tilde{\mathcal{O}}$ que verifican

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = w_j.$$

Basta tomar ahora el morfismo φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}(z_j) = \xi_j,$$

que es el inverso de φ. $\square$

Resultados análogos a los obtenidos en esta sección, para anillos cerrados para derivación pueden verse en [**32**]. Bastante de los resultado presentados en esa referencia se aplican a los anillos de Weierstrass: acerca de la propiedad jacobiana débil, especialmente. No los hemos incluido, pues su naturaleza algebraica se escapa de los objetivos de esta memoria.

3.2. Anillos de Weierstrass según Nagata. Nagata, en [**37**], da la siguiente definición de Anillo de Weierstrass (pg. 190):

DEFINICIÓN 34. *Un anillo $\mathcal{O}$ es de Weierstrass si es un anillo henseliano, pseudo-geométrico y tal que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, el anillo $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ es una extensión entera de un anillo local y regular.*

La condición de ser pseudo-geométrico consiste en que $\mathcal{O}$ sea un anillo noetheriano y tal que para cualquier ideal primo $\mathfrak{p}$, el cociente $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ satisface la siguiente condición: si $\mathcal{O}/\mathfrak{p} \to \tilde{\mathcal{O}}$ es un morfismo entero de anillos íntegros, entonces son equivalentes:

- El cuerpo de fracciones $\tilde{\mathcal{O}}_0$ es finito sobre $(\mathcal{O}/\mathfrak{p})_0$.
- El morfismo $\mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}}$ es finito.

(Condición que Nagata denomina "de finitud para las extensiones enteras").

Tenemos el siguiente

TEOREMA 35. *Sea κ el cuerpo complejo. Sea $\mathcal{O}$ una $\kappa-$álgebra aceptable íntegra. Si $\mathcal{O}$ es de Weierstrass según la definición de Nagata, entonces es de Weierstrass.*

DEMOSTRACIÓN. Por satisfacer las condiciones de Nagata, $\mathcal{O}$ es analíticamente irreducible. Como, además, es de característica 0, es formalmente jacobiano, según el mismo razonamiento que en 16. Además, es excelente por el Lema 18. Puesto que, entre las hipótesis de Nagata figura la henselianidad, podemos aplicarle la Proposición 31 como sigue: sea $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema de parámetros (abusando de nomenclatura) de $\mathcal{O}$. Sea $f \in \mathcal{O}$ un elemento regular en x_n de orden r. Hemos de probar que existen $u, a_0, \dots, a_{r-1} \in \mathcal{O}$ tales que

$$f = u(x_n^r + a_{r-1}x_n^{r-1} + \cdots + a_0)$$

donde u es una unidad y los a_i son elementos de $\mathcal{O}$ cuyas imágenes en $\hat{\mathcal{O}}$ son series de potencias en las variables $(x_1, \dots, x_{n-1})$. La ecuación (3.2) es una ecuación polinómica en $(u, a_0, \dots, a_{r-1})$, que admite solución en $\hat{\mathcal{O}}$ -es la expresión de f en $\hat{\mathcal{O}}$ como polinomio de Weierstrass por una unidad. Por la proposición 31, admite al menos una solución en $\mathcal{O}$. Pero, puesto que la escritura de una serie de potencias en la forma de Weierstrass es única, la solución en $\mathcal{O}$ debe ser la misma $(u, a_0, \dots, a_{r-1})$ y por tanto, f se puede escribir de la manera pedida. □

Por el teorema de parametrización local y, puesto que los anillos de Weierstrass regulares grandes son henselianos, se tiene el recíproco para este tipo de anillos:

Corolario 36. *Un anillo de Weierstrass regular grande es un anillo de Weierstrass según Nagata.*

Demostración. La condición de henselianidad ya está demostrada. Para ver que es pseudo-geométrico, basta utilizar el teorema de parametrización local para los cocientes $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $\mathcal{O}$. □

4. La categoría de los anillos de Weierstrass

Vamos a construir a continuación la categoría en la que se va a desarrollar todo nuestro estudio de las derivaciones y de las valoraciones de L'Hôpital. Nos interesará especialmente la definición del explotado de un anillo de Weierstrass según una dirección: sobre todo para justificar la utilización constante de desarrollos en series de potencias formales.

4.1. Objetos y morfismos. Recordamos que un *anillo de Weierstrass* es cualquier anillo que es cociente de un anillo de Weierstrass regular, y que éstos son aquellas $\kappa-$álgebras que admiten la propiedad de "preparación", con alguna condición técnica más.

Definición 37. *Sean A y B dos anillos de Weierstrass regulares. Diremos que B* admite morfismos desde A *si para cualquier sistema de parámetros $(x_1, \ldots, x_n)$ de A y cualquier familia $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{m}_B$, existe un morfismo de $\kappa-$álgebras $A \xrightarrow{\eta} B$ tal que $\eta(x_i) = b_i$ y* **que es continuo para las topologías $\mathfrak{m}-$ádicas en** A **y** B. *Los morfismos de este tipo se llamarán* morfismo de anillos de Weierstrass regulares.

Ejemplo 38. Hay anillos de Weierstrass que no admiten morfismos desde otro anillo de Weierstrass. Tomemos $A = \mathbb{C}[[t]]$ y $B = \mathbb{C}\{u\}$ los anillos de series de potencias convergentes y formales, respectivamente, en una variable. Sea $x = t$ el generador del maximal de A y $b = u$ el de B. No existen aplicaciones continuas (para las topologías $\mathfrak{m}-$ádicas) que envíen x en b, pues necesariamente la imagen de una serie divergente debería ser divergente.

Definición 39. *Un* morfismo de anillos de Weierstrass de $A = \mathcal{O}/I$ a $B = \mathcal{O}'/J$ *(donde $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ son anillos de Weierstrass regulares) es un cociente de un morfismo de anillos de Weierstrass regulares entre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$*

Ejemplo 40. Cualquier anillo de Weierstrass admite morfismos desde sí mismo. Esto es una consecuencia de la propiedad de sustitución impuesta sobre este tipo de anillos.

Tenemos, pues, definida la categoría de los anillos de Weierstrass sobre un cuerpo κ: los objetos son todos los anillos de Weierstrass y los morfismos son los morfismos de anillos de Weierstrass. Como siempre, un *isomorfismo* de anillos de Weierstrass es un morfismo que admite inverso.

4.2. La explosión local de anillos de Weierstrass. Tradicionalmente, como consecuencia del interés de los morfismos birracionales, la explosión se ha considerado siempre una transformación de la variedad algebraica definida por un anillo. Además, si se trabaja con $\kappa-$álgebras finito generadas regulares, la localización algebraica del morfismo de explosión produce un isomorfismo entre los anillos locales de la variedad regular original y la explotada. Es sencillo comprobar que esto no ocurre con, por ejemplo, variedades analíticas regulares. En esta situación, cualquier transformación cuadrática produce una variedad *algebraicamente* birracional a la de partida: es decir, el morfismo induce un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones algebraicas. Pero en esta nueva variedad, la localización algebraica no produce un anillo isomorfo al de partida. Aunque a efectos prácticos esto no es inconveniente, pensamos que una definición intrínseca de *explosión local* es necesaria para conservar la naturaleza de los objetos que se estudian. Es lo que pretendemos hacer en esta parte de la memoria.

Trabajaremos desde el principio con "variedades regulares con un divisor con cruzamientos normales distinguido" -lo correspondiente al divisor excepcional-, teniendo en cuenta que el ideal total se puede entender como un ideal de una subvariedad vacía y, por tanto, con cruzamientos normales. Comenzamos con las definiciones:

DEFINICIÓN 41. *Un* divisor con cruzamientos normales *en un anillo de Weierstrass regular A es un ideal principal de A generado por un elemento f de la forma*

$$f = \prod_{i \in J} x_i,$$

con $J \subset \{1, \ldots, n\}$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema regular de parámetros de A. Si A es un anillo de Weierstrass regular e I es un divisor en A con cruzamientos normales, llamaremos anillo de Weierstrass regular con divisor *al par (A, I).*

Para no cargar la escritura, siempre que no haya confusión, hablaremos de *anillos con divisor*, sin mencionar el que sean de Weierstrass regulares.

DEFINICIÓN 42. *Un* morfismo de anillos con divisor *es un morfismo de anillos de Weierstrass regulares (no se imponen condiciones sobre el comportamiento del divisor).*

Sea (A, I) un anillo con divisor y $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A. Fijemos un ideal J regular de A y sea $(x_1, \ldots, x_r)$ un sistema regular de parámetros para J -que sabemos que existe. Extendamos este sistema a un sistema de coordenadas de A, pongamos $(x_1, \ldots, x_n)$. Identificamos de la manera usual el espacio tangente a A -en el punto definido por el maximal- con el $\kappa-$espacio vectorial $\kappa x_1 \oplus \cdots \oplus \kappa x_n$, y el cono normal a J con el proyectivizado del espacio vectorial $\kappa x_1 \oplus \cdots \oplus \kappa x_r$: es decir $\mathbb{P}_J = \mathbb{P}(\kappa x_1 \oplus \cdots \oplus \kappa x_r)$. Sea P un punto de $\mathbb{P}_J$, que en coordenadas proyectivas $[x_1 : \cdots : x_r]$ se escribe $[p_1 : \cdots : p_r]$. Con estas notaciones, damos la siguiente

DEFINICIÓN 43. *Se dirá que un morfismo de anillos con divisor* $(A, I) \xrightarrow{\eta} (B, I')$ *es* una explosión de (A, I) con centro J en la dirección P *si cumple las cuatro propiedades siguientes*

1. *$\eta(J)B$ es un divisor de B.*
2. *$I' = \eta(J)\eta(I)B$ (el divisor de B es la unión de las contraimágenes de J e I).*
3. *Existe $k \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\eta(p_k x_i - p_i x_k) \in \mathfrak{m}_B^2$, para $i = 1 \ldots r$, donde $\mathfrak{m}_B$ es el ideal maximal de B.*
4. *Si $(A, I) \xrightarrow{\rho} (C, I'')$ cumple las tres propiedades anteriores, entonces existe $(B, I') \xrightarrow{\varphi} (C, I'')$ morfismo de anillos con divisor que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(A, I) \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
(B, I') \arrow[r, "\varphi"'] & (C, I'')
\end{tikzcd}$$

y B admite morfismos desde A.

Como se ve, la definición es "categorial": se exige que el objeto cumpla una propiedad universal. A continuación construimos una explosión local, con lo que quedará probada la existencia. La unicidad es consecuencia de la propiedad universal.

TEOREMA 44. *En las condiciones impuestas arriba para A, I y J, supongamos que el punto P cumple que $p_1 \neq 0$. Sean $B = A$, η el* *morfismo siguiente:*

$$\begin{array}{rcl}
A & \xrightarrow{\eta} & B \\
x_1 & & x_1 \\
x_2 & & x_1(x_2 + \frac{p_2}{p_1}) \\
\vdots & & \vdots \\
x_r & \mapsto & x_1(x_r + \frac{p_r}{p_1}) \\
x_{r+1} & & x_{r+1} \\
\vdots & & \vdots \\
x_n & & x_n
\end{array}$$

y sea $I' = \eta(I)\eta(J)B$*. Entonces el par* (B, I') *es una explosión local de* (A, I) *con centro* J *en la dirección* P*.*

Demostración. Lo primero que hacemos notar es que η está bien definida por la propiedad de "sustitución" de la Definición 4. Por construcción, η cumple las tres primeras propiedades. Para comprobar la cuarta, supongamos que $\tilde{\eta} : (A, I) \to (C, I'')$ es otro morfismo que cumple $1, 2$ y 3. Cambiando de nombre (si es necesario) a los generadores de los ideales maximales de C y de A, se puede suponer que el k de la tercera condición es 1 en ambos casos. También podemos suponer que $J = (x_1, \dots, x_r)$. La condición 1 junto con la 3 obliga a que $\tilde{\eta}(x_i) = \tilde{\eta}(x_1)(u_i + p_i/p_1)$, donde $u_i \in \mathfrak{m}_X$. Basta ahora tomar el morfismo de A en C dado por $\varphi(x_i) = u_i$ para $i = 1, \dots, r$ y $\varphi(x_j) = \tilde{\eta}(x_j)$ para $j > r$, que existe porque se supone que C admite morfismos desde A. $\square$

El siguiente resultado es claro:

Proposición 45. *Sean* $(A, I), J, P$ *como antes y sea* B *el anillo obtenido por localización algebraica en el punto* P *del divisor excepcional de la explosión -como esquema- de* A *a lo largo de* J*. Si* ρ *el el morfismo de localización de* A *a* B*, entonces se tiene un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
B \arrow[r, "\varphi"'] & A
\end{tikzcd}$$

donde φ *es un morfismo local e inyectivo.*

La idea es que la localización algebraica *no saca partido* de las propiedades "intrínsecas" de A como anillo de series de potencias.

Nota sobre los morfismos birracionales. Hay una diferencia importante entre la explosión local que acabamos de construir y el localizado algebraico de la explosión usual. Si $\eta : A \to B_{\mathfrak{m}}$ es la localización algebraica de la explosión usual en un punto cerrado del divisor excepcional, entonces el morfismo $\eta : A_{(0)} \to (B_{\mathfrak{m}})_{(0)}$ inducido entre los cuerpos de fracciones, es un isomorfismo de cuerpos (por ser la explosión usual un morfismo birracional). Sin embargo, la *explosión local* de anillos de Weierstrass regulares $\pi : A \to A$ induce un morfismo de cuerpos $\pi : A_{(0)} \to A_{(0)}$ que *no es sobreyectivo.* Geométricamente esto refleja el hecho de que una función holomorfa en un entorno de un punto del divisor excepcional no se proyecta, por el morfismo de explosión, en una función holomorfa en un entorno del punto que se explota. Por tanto, a la hora de trabajar con el explotado local de un anillo de Weierstrass, hay que tener en cuenta que "no todas las funciones del explotado son funciones en el anillo de partida". Por esto, en el capítulo siguiente todos los razonamientos que implican cambios de coordenadas tras un número finito de explosiones se realizan con cambios *polinómicos*, que se trasladan a morfismos en el anillo original. Del mismo modo, una derivación de un anillo de Weierstrass puede extenderse sin dificultad al explotado local, pero nunca vamos a hacer uso de esta extensión, puesto que el cuerpo en el que vamos a trabajar es siempre el cuerpo de fracciones "antes de explotar": como mucho, lo entenderemos sumergido en el cuerpo de fracciones del anillo explotado, para escribir sus elementos como cocientes de series de potencias en las coordenadas locales de la explosión.

CAPíTULO 2

Valoraciones en dimensión 2

Presentamos a continuación la teoría general de las valoraciones de L'Hôpital y su clasificación en el caso de derivaciones de $\mathbb{C}-$álgebras de Weierstrass regulares de dimensión 2.

1. Valoraciones de L'Hôpital

El desarrollo que vamos a hacer de la teoría general es bastante sucinto, puesto que estamos interesados, sobre todo, en los resultados concernientes a campos de vectores sobre un anillo de Weierstrass. No haremos, a diferencia de [**41**] un estudio sobre la extensión de valoraciones/derivaciones al cierre algebraico ni sobre la estabilidad de la propiedad de L'Hôpital por extensión de escalares. Trabajamos, por tanto, en característica nula, aunque pensamos que la aplicación de estas técnicas a problemas de característica positiva puede ayudar a comprender la estructura de los campos de vectores en variedades "aritméticas". Comenzamos con la notación imprescindible.

Partimos de un cuerpo κ de característica cero (el *cuerpo base*) y de $\mathcal{O}$, que es una $\kappa-$álgebra local íntegra, a cuyo maximal denotaremos por $\mathfrak{m}$ y cuyo cuerpo de fracciones será $\mathcal{M}$.

Definición 46. *Denotaremos $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ al $\mathcal{O}-$módulo de las derivaciones de $\mathcal{O}$ en sí mismo continuas para la topología $\mathfrak{m}-$ádica y nulas en κ:*

$$\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}) = \left\{ \partial : \mathcal{O} \to \mathcal{O} : \begin{array}{l} \partial \textit{ continua para la topología } \mathfrak{m} - \textit{ádica} \\ y\ \partial\kappa = 0 \end{array} \right\}.$$

Cuando $\mathcal{O}$ sea íntegro y $\mathcal{M}$ denote su cuerpo de fracciones, llamaremos $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$ al $\mathcal{M}-$espacio vectorial de las derivaciones de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$ que anulan κ y son continuas para la topología $\mathfrak{m}-$ádica en $\mathcal{M}$.

Es elemental comprobar que dicho módulo es libre de rango n cuando $\mathcal{O}$ es un anillo noetheriano local, regular e íntegro -por tanto, $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$ es un $\mathcal{M}-$espacio vectorial de dimensión n. Más concretamente, si $\mathcal{O}$ es un anillo noetheriano local, regular, íntegro y cerrado por derivación parcial respecto de un sistema de generadores de su ideal maximal, entonces el módulo $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ está generado por dichas derivaciones parciales respecto de un sistema de generadores.

DEFINICIÓN 47. *Dado un anillo íntegro $\mathcal{O}$, local, el* espacio de las distribuciones (o foliaciones) por curvas en $Spec(\mathcal{O})$ *será el cociente de $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$ menos la derivación nula, por la relación de equivalencia dada por las homotecias:*

$$\mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O})) = \mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M} - 0)/ \simeq$$

donde $\partial \simeq \partial'$ si y sólo si existe un $f \in \mathcal{M}$ no nulo, tal que $\partial = f\partial'$.

Para no cargar la notación, dado un elemento $\partial \in \mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O}))$, fijaremos siempre un representante suyo (al que denotaremos con la misma letra ∂) tal que $\partial\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$, que siempre existe y cuando tomemos un elemento $a \in \mathcal{M}$ y escribamos ∂a, estaremos haciendo uso de ese representante. Del mismo modo, utilizaremos los nombres "foliación por curvas" y "derivación" como sinónimos, salvo que el contexto nos exija distinguirlos.

En general, es habitual trabajar con espacios de $1-$formas a hacerlo con derivaciones, por las sucesiones exactas, la functorialidad de los objetos, etc... En toda la memoria haremos uso de la dualidad existente entre estos dos tipos de objetos.

DEFINICIÓN 48. *Llamaremos módulo de $1-$formas $\mathfrak{m}-$continuas de $\mathcal{O}$ sobre κ al $\mathcal{O}-$módulo*

$$\Omega_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}) = \ Hom(\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}), \mathcal{O}),$$

que es un $\mathcal{O}-$módulo finito generado si $\mathcal{O}$ es noetheriano.

Análogamente, $\Omega_\kappa^{\mathfrak{m}}$ indicará el dual de $\mathcal{D}er_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$. Cuando $\mathcal{O}$ es noetheriano, dada una $1-$forma racional $\omega \in \Omega_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$, siempre existe un múltiplo suyo $f\omega$, con $f \in \mathcal{O}$, que restringe a un elemento de $\Omega_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$. Dada una distribución por curvas $[\partial] \in \mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O}))$, llamaremos *módulo de diferenciales dual de* $[\partial]$ al submódulo $M[\partial] \subset \Omega_\kappa^{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$ de las $1-$formas que anulan a ∂. Cuando el anillo $\mathcal{O}$ sea noetheriano y DFU, cada vez que tomemos un elemento de $M[\partial]$, supondremos que sus coeficientes están en $\mathcal{O}$ y que no tienen factores comunes. Dado un morfismo $\rho : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$, el módulo de $1-$formas $M[\partial]$ tiene un trasladado natural a $\mathcal{O}'$, que es $\rho^\star(M[\partial])$. Si el morfismo es birracional, entonces $\rho^\star M[\partial]$ es, de hecho, el módulo de diferenciales duales de una distribución $[\partial']$ de $\mathcal{O}'$. Cuando hablemos del *transformado estricto* de una distribución (o de una derivación), nos referiremos a ésta.

A partir de ahora, todas las referencias a $1-$formas que hagamos se atendrán al convenio del párrafo anterior. Obviaremos también toda referencia a la dualidad, etc... por ser bien conocida. En el caso de

$\dim(\mathcal{O}) = 2$, trabajaremos indistintamente con $1-$formas y con derivaciones.

Recordamos que una valoración ν de un cuerpo $\mathcal{M}$ se dice que está centrada en un anillo local $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, de maximal $\mathfrak{m}$, si se tiene que $\nu(\mathcal{O}) \geq 0$ y que $\nu(\mathfrak{m}) > 0$. La definición que sigue es una generalización de la que puede verse en [**41**]:

DEFINICIÓN 49. *Sean $\mathcal{O}$ una $\kappa-$álgebra local de ideal maximal $\mathfrak{m}$ y $\mathcal{M}$ su cuerpo de fracciones. Sea $\partial \in \mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O}))$ una foliación por curvas -una derivación-. Supongamos que ν es una valoración de $\mathcal{M}$ centrada en $\mathcal{O}$ y tal que ν es nula en κ. Se dice que ν es de L'Hôpital para ∂ si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *Dados $a, b \in \mathcal{M}^*$ con $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$ y tal que $\partial b \neq 0$, se tiene que*
$$\nu\left(\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b}\right) > 0$$
2. *Dados $a, b \in \mathcal{M}^*$ con $0 > \nu(a) \geq \nu(b)$ y tal que $\partial b \neq 0$, se tiene que*
$$\nu\left(\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b}\right) > 0$$
3. *Dados $a, b \in \mathcal{M}$ tales que $\nu(a) \geq 0, \nu(b) > 0, b \neq 0$ y tal que $\partial b \neq 0$, se tiene que*
$$\nu\left(\frac{\partial ab}{\partial b}\right) > 0$$
4. *Dados $a, b \in \mathcal{M}$ tales que $\nu(a) \geq 0, \nu(b) < 0$ y tal que $\partial a \neq 0$, se tiene que*
$$\nu\left(\frac{\partial ab}{\partial b}\right) > 0$$

Nótese que al aparecer la derivación en los numeradores y denominadores, las condiciones no dependen del representante de ∂ escogido.

El siguiente resultado establece que cualquier foliación por curvas, sin integral primera, se extiende al cierre algebraico como una foliación sin integral primera -no enunciamos el teorema de extensión de derivaciones al cierre algebraico por ser bien conocido-:

TEOREMA 50. *Sea $\kappa \to \mathcal{M}$ una extensión de cuerpos de característica 0, donde $\mathcal{M}$ es el cuerpo de fracciones de una $\kappa-$álgebra local íntegra $\mathcal{O}$. Sea $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ una $\mathcal{O}-$álgebra local que domine a $\mathcal{O}$ y tal que su cuerpo de fracciones $\mathcal{M}'$ sea algebraico sobre $\mathcal{M}$. Sea κ' el cierre algebraico de κ en $\mathcal{M}$, que suponemos está incluido en $\mathcal{O}'$. Sea ∂ una foliación de $\mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O}))$ y sea ∂' su extensión (única) a $\mathcal{M}'$. Entonces*

∂' es una foliación por curvas en $Spec(\mathcal{O}')$, sin integral primera, sobre κ'.

Demostración. Cualquier representante de ∂ extiende de manera única a $\mathcal{M}'$, por ser éste algebraico sobre $\mathcal{M}$. Hemos de probar que si $f \in \mathcal{M}'$ tiene derivada 0, entonces es algebraico sobre κ.

Sea, por tanto, $f \in \mathcal{M}'$ con $\partial' f = 0$. Sea $P_m(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_0$ el polinomio mínimo de f sobre $\mathcal{M}$, que suponemos de grado m. Tomamos un representante cualquiera de ∂'. Se tiene:

$$\partial' f \cdot Q(f) + \partial' a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + \partial' a_1 f + \partial' a_0 = 0.$$

Si $\partial' f = 0$, entonces es

$$R(f) := \partial' a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + \partial' a_1 f + \partial' a_0 = 0$$

y $\partial' a_i = \partial a_i \in \mathcal{M}$. Pero $R(t)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathcal{M}$, de grado $m-1$ o nulo. Como $P_m(t)$ era el polinomio mínimo de f, debe ser $R(t) = 0$, de donde se deduce que los a_i están en κ, porque ∂ no tiene integral primer y, por tanto, f debe estar en κ', como queríamos probar. □

Como aplicación de este teorema, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 51. *Sea X un campo de vectores analítico en un entorno del origen de $\mathbb{R}^n$. Si X no tiene integral primera meromorfa real, entonces su complexificado tampoco tiene integral primera meromorfa.*

Demostración. Tómese en el teorema anterior, $\kappa = \mathbb{R}, \mathcal{O} = \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathcal{M}$ el cuerpo de funciones meromorfas reales en un entorno del origen y $\kappa' = \mathbb{C}, \mathcal{O}' = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}, \mathcal{M}'$ las funciones complejas meromorfas en un entorno de 0. □

Lema 52. *Sea $\mathcal{O}$ una $\kappa-$álgebra local íntegra y $\mathcal{M}$ su cuerpo de fracciones. Sean $\partial \in \mathcal{D}_\kappa(Spec(\mathcal{O}))$ y sea ν una valoración centrada en $\mathcal{O}$. Entonces:*

a) *Si ν es de L'Hôpital para ∂, y $a, b \in \mathcal{M}$ son elementos no constantes (es decir, que $\partial a \neq 0 \neq \partial b$), con $\nu(a) \neq 0 \neq \nu(b)$, entonces*

(*) $$\nu(a) \geq \nu(b) \Leftrightarrow \nu(\partial a) \geq \nu(\partial b)$$

b) *Si $\mathcal{O}_\nu = \kappa + \mathfrak{m}_\nu$ (donde $\mathfrak{m}_\nu$ es el maximal de $\mathcal{O}_\nu$), entonces la condición $(*)$ implica que la valoración es de L'Hôpital para ∂.*

No incluimos la demostración por ser puramente técnica. El lector interesado la puede consultar en [**41**].

Del anterior resultado se deduce que el conjunto

$$\{\nu\left(\frac{\partial a}{a}\right) : \partial a \neq 0\}$$

está acotado superiormente. Este resultado es el *complementario* de la propiedad que Kolchin utiliza para definir valoraciones diferenciales. Él las define como aquéllas valoraciones ν sobre un cuerpo diferencial $\mathcal{K}$, que son de rango 1 -es decir, cuyo grupo de valores es un subgrupo de $\mathbb{R}$- y para las que existe $M \in \mathbb{R}$ con

$$\nu\left(\frac{\partial a}{a}\right) > M,$$

para todo $a \in \mathcal{M}$. Esta propiedad es, de hecho, la definición de *derivación continua* (ver la introducción) respecto de ν. Presentamos brevemente su relación con nuestro tema de trabajo.

1.1. Relación entre valoraciones de L'Hôpital y derivaciones continuas. La conexión entre el concepto de valoración de L'Hôpital y de derivación continua respecto de una valoración viene dada por el siguiente resultado, debido a Rosenlicht:

TEOREMA 53. [**41**] *Sea ν una valoración sobre un cuerpo K, con grupo de valores Γ y de rango racional finito: es decir, tal que la dimensión del $\mathbb{Q}-$espacio vectorial $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ es finita. Si ν es de L'Hôpital para una derivación ∂ no trivial, entonces ∂ es continua para la topología de $\mathcal{M}$ inducida por ν.*

En el siguiente corolario, $\mathcal{M}$ denota el cuerpo de funciones meromorfas en un número finito de variables.

COROLARIO 54. *Una valoración de $\mathcal{M}$, de L'Hôpital y de rango racional finito cuyas únicas constantes sean los números complejos, es diferenciable en el sentido de Kolchin. (Y, por tanto, en el de Morrison)*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 53. Sea ψ la siguiente aplicación de Γ^* (el conjunto de los elementos no nulos de Γ) en Γ: sea α un elemento del grupo de valores de ν, no nulo. Sea $a \in \mathcal{M}$ una función de valor α cuya derivada no sea 0 -estas funciones existen porque suponemos que la derivación no es trivial-. Por el Lema 52, la siguiente aplicación está bien definida:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^* & \xrightarrow{\psi} & \Gamma \\ \alpha & \mapsto & \nu(\frac{\partial a}{a}) \end{array}.$$

Asumamos, por el momento, que se tiene lo siguiente:

Afirmación: La aplicación ψ cumple las siguientes propiedades:

i) Para $\alpha \in \Gamma^*$ y $n \in \mathbb{Z}$, es $\psi(n\alpha) = \psi(\alpha)$,

ii) Para $\gamma \in \Gamma$, el conjunto $\{\alpha \in \Gamma : \alpha = 0 \text{ ó } \psi(\alpha) \geq \gamma\}$ es un subgrupo de Γ.

iii) Para $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, es $\psi(\beta) < \psi(\alpha) + |\alpha|$, donde $|\,|$ indica el valor absoluto en Γ.

De esta afirmación se deduce que, si ν tiene rango racional finito, entonces la imagen de ψ está formada, como mucho, por tantos elementos como dicho rango. Así pues, el conjunto de posibles valores $\nu(\frac{\partial a}{a})$ es finito y, por tanto, acotado inferiormente. $\square$

El corolario se sigue de que el conjunto $\nu(\partial a/a)$ está acotado superiormente, como ya dijimos.

Demostración de la afirmación. La primera propiedad es directa: sea $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathcal{M}$ con derivada no nula y tal que $\nu(a) = \alpha$. Se tiene que $\nu(a^n) = n\alpha$. Calculando,

$$\psi(n\alpha) = \nu(\frac{\partial(a^n)}{a^n}) = \nu(\frac{na^{n-1}\partial a}{a^n}) = \nu(\frac{\partial a}{a}) = \psi(\alpha).$$

Para demostrar ii), fijemos γ y tomemos α, β en ese conjunto. Veamos si $\alpha+\beta$ está en dicho conjunto. Como antes, tomamos a y b en $\mathcal{M}$ tales que $\nu(a) = \alpha, \nu(b) = \beta$ y sin derivada nula. Es

$$\psi(\nu(a) + \nu(b)) = \psi(\nu(ab)) = \nu(\frac{\partial(ab)}{ab}) = \nu(\frac{\partial a}{a} + \frac{\partial b}{b}) \geq \cdots \geq \gamma.$$

Para probar iii), primero observemos que se puede suponer que $\alpha > 0$, porque $\psi(\alpha) = \psi(-\alpha)$. Sean $a, b \in \mathcal{M}$ como antes. Por el Lema 52 es $\nu((\partial ab)/(\partial b)) > 0$. De donde

$$\psi(\alpha) + |\alpha| - \psi(\beta) = \nu(\frac{\partial a}{a}) + \nu(a) - \nu(\frac{\partial b}{b}) = \nu(\frac{\partial ab}{\partial b})$$

que es mayor que cero. $\square$

En el caso infinito-dimensional, hay valoraciones de L'Hôpital para las que la derivación no es continuas. Veámoslo con un ejemplo del trabajo de Rosenlicht [**41**]: sea $\mathcal{M}$ el cuerpo de Hardy correspondiente al “punto del infinito” del siguiente cuerpo:

$$\mathbb{R}(x, \exp(x), \exp(\exp(x)), \dots),$$

dotado de la derivación usual. Es elemental comprobar que la valoración asociada al lugar “límite en el infinito”, es una valoración de L'Hôpital.

Pero la condición de acotación inferior no se cumple. Para verlo, tómese la sucesión de elementos $a_0 = 1/e^x$,$a_1 = 1/(e^{e^x}$,... La sucesión

$$\nu\left(\frac{\partial a_n}{a_n}\right)$$

no está acotada inferiormente.

Por último, hay derivaciones continuas para ciertas valoraciones (incluso discretas) que no son de L'Hôpital, como muestra el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 55. En el cuerpo de funciones racionales en dos variables, $\mathbb{C}(x, y)$, considérese la derivación dada por

$$\begin{cases} \partial x = 1/x \\ \partial y = y^2 \end{cases}$$

y la valoración divisorial inducida por los valores $\nu(x) = \nu(y) = 1$ (la valoración del orden en el ideal maximal, que es discreta). Es elemental comprobar que, dado un polinomio $f = \sum_{i+j=k}^{r} a_{ij}x^i y^j$, se tiene la acotación

$$\nu\left(\frac{\partial f}{f}\right) \geq -2,$$

y, aplicando la proposición 2.1 de [**34**], (que dice que una cota inferior en un dominio es cota inferior en el cuerpo de fracciones) se deduce que ∂ es diferenciable en el sentido de Morrison para ν. Sin embargo, ν no es de L'Hôpital para ∂: tómense, por ejemplo los polinomios $a = x, b = y$. Se tiene que

$$\nu\left(\frac{x}{y} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = \nu\left(\frac{x^2 - y}{xy^3}\right) = -3 < 0.$$

1.2. Ejemplos de valoraciones de L'Hôpital.

EJEMPLO 56.

1. Si $\kappa = \mathbb{C}$ y $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x\}$, sólo hay una foliación por curvas en $Spec(\mathcal{O})$, que corresponde a la derivación usual (o cualquiera de sus múltiplos). La condición impuesta en 1. y 2. es la expresión con valoraciones de la regla de L'Hôpital clásica.
2. Sea $\mathbb{C}(z)$ el cuerpo de funciones racionales complejas de una variable. Supongamos que $f_1, \dots, f_n$ son un número finito de funciones holomorfas en un abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene a 0 en su adherencia y llamemos K a la extensión $\mathbb{C}(z, f_1, \dots, f_n)$. Sea $\gamma : [0, 1] \to U$ una curva analítica tal que $\gamma(1) = 0$. Supongamos que, para todo producto finito $g = f_{i_1} \dots f_{i_k}$, el límite $\lim_{t\to 1}(g(\gamma(t))$ existe y es 0 ó ∞. Supongamos, además, que

para cualesquiera productos $g = f_{i_1} \dots f_{i_k}$, $h = f_{j_1} \dots f_{j_k}$ tales que $\text{lím}(g(t)) = \text{lím}(h(t)) = 0$, se tiene que

$$\lim_{t \to 1} \frac{g'h}{h'}(\gamma(t)) = 0.$$

Entonces, la valoración de K asociada al lugar "límite a lo largo de γ", es una valoración de L'Hôpital. (Pueden consultarse los detalles en [**41**]).

> "Este ejemplo, y un gran número de casos particulares, le hacen creer a uno que la manera propia de enfrentarse a la nunca bien definida noción clásica de "singularidad de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias", es mediante las valoraciones *diferenciales*" [léase aquí de L'Hôpital.]

3. Más en concreto, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2},$$

que tiene como solución la función $y = e^{1/x}$, que es analítica en un entorno punteado U del origen de $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{M}$ el cuerpo $\mathbb{C}\{\{z, e^{1/z}\}\}$. Sea γ_0 un camino contenido en un subsector estricto del semiplano $Re(z) > 0$ y γ_1 otro en $Re(z) < 0$. Supongamos que el extremo de ambos es $0 \in \mathcal{C}$. El cuerpo $\mathcal{M}$ cumple las condiciones del ejemplo anterior para ambos caminos. Por tanto, cada uno de ellos define un anillo de valoración en $\mathcal{M}$. Es elemental comprobar que ambos son distintos, puesto que el límite de $e^{1/t}$ cuando t tiende a 1 (y, por tanto, z a 0) es 0 para γ_0 e ∞ para γ_1. Como el lector habrá visto, esta diferencia se debe a la presencia de un fenómeno de Stokes para la ecuación diferencial (3). Conjeturamos que, en general, si una ecuación diferencial presenta n semirrectas de Stokes, entonces existirán, en el cuerpo correspondiente, n valoraciones de L'Hôpital diferentes, correspondientes cada una a uno de los sectores en que las semirrectas dividen al plano complejo.
4. Sea $\mathcal{M} = \mathbb{C}\{\{x, y\}\}$ y $\kappa = \mathbb{C}$. Sea ω una $1-$forma diferencial analítica sin integral primera meromorfa, con la siguiente condición: si $M \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}^2, 0)$ es una reducción de singularidades de ω y $\tilde{\omega}$ denota su transformada estricta, entonces los puntos singulares de $\tilde{\omega}$ en la zona regular del divisor excepcional tienen cociente de autovalores no racional. Veremos en el capítulo siguiente que una valoración ν centrada en $\mathbb{C}\{x, y\}$ de rango 1 es de L'Hôpital si y sólo si la sucesión de puntos infinitamente

próximos que le corresponde define una separatriz formal de ω. Si ν es de rango 2 (con grupo de valores $\mathbb{Z}^2$) y corresponde a una rama analítica, entonces, como veremos también, ν es de L'Hôpital si y sólo si esa rama es una separatriz de ω.

2. Tipos

Hemos introducido, en los capítulos precedentes, la teoría general de valoraciones de L'Hôpital y la noción de Anillo de Weierstrass. Nos disponemos a presentar, a continuación, un estudio detallado de estos objetos cuando el anillo es una $\mathbb{C}-$álgebra de dimensión 2.

Fijemos, por tanto, un anillo de Weierstrass regular A, que supondremos es una $\mathbb{C}-$álgebra local íntegra de dimensión 2. Su ideal maximal lo llamaremos $\mathfrak{m}$ y (x, y) será un sistema de generadores de $\mathfrak{m}$. El cuerpo de fracciones de A será M. Llamemos $\mathcal{X} = Spec(A)$ a la superficie (germen de superficie) sobre $\mathbb{C}$ definida por A. El punto correspondiente al maximal lo llamaremos, como es habitual, $(0, 0)$. Una vez fijado el sistema (x, y), podemos considerar A como un subanillo del anillo de series de potencias formales en dos variables sobre $\mathbb{C}$. Como además, A es regular, el anillo de polinomios localizado en el maximal, $\mathbb{C}[x, y]_{(x,y)}$ es un subanillo de A. Todos los resultados sobre desingularización de curvas y reducción de singularidades de foliaciones se aplican, *servatis servandis*, a los mismos objetos definidos sobre A. Para una introducción a la Teoría de valoraciones remitimos al lector a [**52**]. Para el estudio más concreto del caso de superficies, se puede consultar [**18, 17**].

Notamos, antes de entrar en materia propiamente, que todos los resultados expuestos a continuación son trasladables, palabra por palabra, al anillo de polinomios localizado en el origen. Y, como dijimos en el capítulo precedente, hacemos notar al lector que todos los cambios de coordenadas que realizamos tras un número finito de explosiones son polinómicos y, por tanto, se pueden considerar realizados en el cuerpo de fracciones de partida.

Sea $K^\star \xrightarrow{\nu} \Gamma$ una valoración de K centrada en A (recordamos que esto significa que $\nu(A) \geq 0, \nu(\mathfrak{m}) > 0$). Recordamos brevemente la construcción del morfismo de explosión de $\mathcal{X}$ con centro $(0, 0)$.

Sea $\mathbb{A}$ el álgebra graduada $\mathbb{A} = A \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^2 \oplus \cdots$. Tomemos $\mathcal{Y} =$ **Proj**$(\mathbb{A})$. Se tiene que:

i) Existe un morfismo propio de esquemas

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$$

cuya fibra en $(0,0)$ es isomorfa a la recta proyectiva compleja. Esta fibra la denotaremos E y se le llamará la "recta excepcional de π".

ii) π es birracional.

iii) $\mathcal{Y}$ está recubierta por dos cartas locales U_1, U_2, así:

$$\begin{cases} U_1 = Spec(A[t]) \\ U_2 = Spec(A[u]) \end{cases}$$

donde $x = ty, y = ux$ y con la relación $u = 1/t$, en el abierto $V = U_1 \cap U_2 = Spec(A[t]_{(y,t)}) \cap Spec(A[u]_{(x,u)})$.

Más gráficamente, la carta U_i tiene coordenadas globales (x_i, y_i) y el morfismo π viene dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_1 y_1 \quad y = y_1 \quad (\text{en } U_1) \\ x = x_2 \quad y = x_2 y_2 \quad (\text{en } U_2) \end{cases}$$

Lema 57. *Con A y ν como antes, se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:*

1. ν *es* la valoración del orden *en* (x, y). *Es decir, si* $\hat{A}$ *es el completado de* A *para la topología* $\mathfrak{m}-$*ádica, entonces, dado* $a \in A$, *se tiene que* $\nu(a) = ord_{x,y}(\hat{a})$, *donde* $\hat{a}$ *es "el desarrollo de* a *en serie de Taylor", esto es, su imagen en* $\hat{A}$, *que, por las hipótesis impuestas es isomorfo a* $\mathbb{C}[[x, y]]$.
2. *Hay un único punto* p *en* E, *cerrado en* $\mathcal{Y}$, *tal que* ν *está centrada en* p. *Es decir, que si* B *es el anillo local de* $\mathcal{Y}$ *en* p *y* $\mathfrak{m}_p$ *es su maximal, entonces* $\nu(B) \geq 0$ *y* $\nu(\mathfrak{m}_p) > 0$.

Nota 58. *No hay que "trasladar"la valoración al cuerpo de fracciones de* $\mathcal{Y}$, *porque es el mismo que el de* $\mathcal{X}$, *al ser ambas superficies birracionales.*

Demostración. La dividimos en dos partes:

i) Veamos que la primera posibilidad excluye la segunda. Por simetría, consideramos sólo una carta local, U_1. Sea $p \in U_1$ un punto de E cerrado en $\mathcal{Y}$. Con las coordenadas locales que hemos tomado, p corresponde a un ideal de la forma $(x_1 - s, y_1)$. Pero $\nu(x_1 - s) = \nu(x/y - s) = \nu((x - sy)/y) = 1 - 1 = 0$ (por ser ν el "orden"), de donde p no es un centro de ν. *Ergo* ν no tiene ningún centro cerrado en E.

ii) Supongamos que ν no es la valoración del orden. Veamos que existe un único punto proyectivo $[r : s]$ tal que $\nu(rx + sy) > \nu(\overline{r}x + \overline{s}y)$ para $[\overline{r} : \overline{s}] \neq [r : s]$. La unicidad es clara. Veamos la existencia por reducción al absurdo: es decir, $\nu(rx + sy) =$

$\nu(x) = \nu(y) = \gamma$ para todo punto proyectivo $[r : s]$[1]. Tomemos $a \in A$ y llamemos $\hat{a}$ su serie asociada en (x, y), que escribimos

$$\hat{a} = \sum_{i,j>0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j.$$

(no tiene término independiente porque corresponde a una curva formal que pasa por el origen). Por las propiedades de las valoraciones, $\nu(x^i y^j) = (i + j)\gamma$, de donde ν extendida a $\hat{A}$ es la "valoración del orden", por tanto, también lo es ν. Si $[r : s]$ es el único punto proyectivo que cumple la condición de arriba, se comprueba fácilmente que representa el centro de ν en el divisor excepcional.

$\square$

Este lema nos permite estudiar las valoraciones como cadenas de explosiones de anillos locales y regulares:

COROLARIO 59. *Sea ν una valoración centrada en A. Se tiene una -y sólo una- de las dos posibilidades siguientes:*

i) *Hay una única cadena finita de explosiones*

$$\mathcal{X}_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} \mathcal{X}_n \to \cdots \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{X}_1 \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$$

tal que, si E_{i+1} es la recta excepcional de π_i y $p_{i+1} \in E_{i+1}$ es el centro de la explosión π_{i+1}, entonces ν está centrada en p_{i+1}, para todo $i = -1 \dots n$, y además, si (u, v) es un sistema de parámetros para el centro p_{n+1} de ν en E_{n+1}, se tiene que ν es la "valoración del orden." en (u, v). (Admitimos que n pueda ser -1, en cuyo caso, la sucesión es vacía y ν es la valoración del orden en (x, y), directamente).

ii) *Hay una única cadena infinita de explosiones*

$$\cdots \to \mathcal{X}_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} \mathcal{X}_n \to \cdots \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{X}_1 \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{X}$$

tal que, si E_{i+1} es la recta excepcional de π_i y $p_{i+1} \in E_{i+1}$ es el centro de la explosión π_{i+1}, entonces ν está centrada en p_{i+1} para todo i.

En ambos casos, la cadena de explosiones correspondiente se denomina sucesión de explosiones asociada a ν

[1]No puede ser que para todo $[r : s]$ haya un $[\overline{r} : \overline{s}]$ t. q. $\nu(rx+sy) < \nu(\overline{r}x+\overline{s}y)$: si hay un $[\overline{r} : \overline{s}]$ cuya valoración es mayor que la de otro $[r : s]$, entonces, $\nu(ux+vy) = \nu(rx+sy)$ para todo $[u : v] \neq [\overline{r} : \overline{s}]$, por las propiedades de las valoraciones.

La demostración se hace por recurrencia, teniendo en cuenta que los sucesivos anillos locales de los centros de la valoración son $\mathbb{C}-$álgebras del mismo tipo que la inicial, con lo que se permanece en el contexto del lema.

Visto esto, podemos hacer una “clasificación”de las valoraciones centradas en estos anillos, según su “tipo cofinal”, es decir, fijándonos en la parte final de la sucesión de explosiones asociada.

3. Clasificación de las valoraciones por su tipo cofinal

DEFINICIÓN 60. *Una valoración* ν *se llama* divisorial *si su sucesión de explosiones asociada es finita. Con la notación del Corolario 59, llamaremos* centro propio *de* ν *al punto* p_{n+1}.

Supongamos que ν no es divisorial. Tomemos $\mathcal{X}_{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ una subsucesión de la sucesión asociada a ν. La fibra F_{n+1} de $(0,0)$ es una unión de $n+1$ componentes irreducibles, todas ellas isomorfas a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Escribimos La descomposición de F_{n+1} en componentes irreducibles como

$$F_{n+1} = E_1 \cup \cdots \cup E_{n+1},$$

donde E_{i+1}, para $i = 0 \ldots n$ es la recta proyectiva que “aparece.ªl realizar la explosión π_i; es decir, es la fibra del punto p_i (donde $p_0 = (0,0) \in \mathcal{X}$).

DEFINICIÓN 61. E_{i+1} *se llama la* $i+1-$*ésima componente irreducible de* F_{n+1}.

DEFINICIÓN 62. *El punto* p_{i+1} *de la sucesión asociada a* ν *se denomina “esquina”si pertenece a dos componentes irreducibles de* F_{i+1}. *De no ser así , se dice que* p_{i+1} *no es una “esquina”, o que es un punto regular de* F_{i+1}.

Pasamos a hacer una clasificación de las valoraciones no divisoriales en cuatro tipos (remitimos al lector a [**48**]*, donde puede encontrarse un estudio exhaustivo de todos los tipos, para anillos de superficies sobre cuerpos de cualquier característica). Si* ν *es la valoración sobre* K*, denotaremos por* $\hat{\nu}$ *su extensión a* $\hat{K}$*, el completado* $\mathfrak{m}-$*ádico de* K.

1. Valoraciones de *contacto con una curva.* Son las que corresponden a una sucesión de explosiones para las que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, si $m > n_0$, la explosión π_m está centrada en un punto regular de F_m. Las valoraciones de este tipo tienen asociada una curva formal $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$, analíticamente irreducible (véase [**48**]). Es decir, existe un único ideal principal

$(\hat{f}) \in \hat{A}$ tal que la extensión $\hat{\nu}$ de ν a $\hat{A}$ es precisamente

$$\hat{\nu}(\hat{a}) = (i, j) \Leftrightarrow \hat{a} \in (\hat{f})^i - (\hat{f})^{i+1}, \#(\frac{\hat{a}}{\hat{f}^i}, \hat{f}) = j$$

donde $\#(a, b)$ es la multiplicidad de intersección ordinaria entre dos curvas formales analíticamente irreducibles y sin factores comunes. Más adelante estudiaremos el rango y el rango racional de ν y $\hat{\nu}$, que dependen del ideal $(\hat{f})$.

2. Valoraciones de tipo *contacto con un divisor*. Son aquellas para las que hay un n_0 tal que, si $m > n_0$, entonces la explosión π_{m+1} está centrada en la esquina formada por los divisores E_{n_0+1} y E_m. El rango y el rango racional de ν y $\hat{\nu}$ son 2. La imagen de K por ν es isomorfa a $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico.
3. Valoraciones "con un exponente de Puiseux irracional". Son las que tienen como sucesión asociada una para la que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $m \geq n_0$, π_m es una explosión con centro una esquina, pero que no son del tipo anterior (se producen "saltos."entre divisores). Se puede demostrar [**48**] que, si p_m es el centro de ν en E_m, para $m \geq n_0$, y (u, v) es un sistema de parámetros en p_m (por tanto, $\hat{K} \simeq \mathbb{C}[[u, v]]$), entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ tal que

$$\hat{\nu}\left(\sum_{i,j>0} a_{ij} u^i v^j\right) = \min_{i,j,a_{ij}\neq 0} \{\lambda i + j\}.$$

Este λ depende de m, claro está, y se calcula mediante un proceso de tipo Bezout. El rango de ν es 1 y el rango racional es 2.
4. Valoraciones "con infinitos pares de Puiseux": para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$ existen l y m naturales, con $l > m > n_0$ y tales que π_l está centrada en una esquina y π_m está centrada en un punto regular. En [**48**] se puede encontrar la demostración del hecho siguiente: para una valoración de este tipo, si $\mathcal{O}_\nu$ es su anillo asociado, existe una sucesión infinita $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\hat{\mathcal{O}}$, analíticamente irreducibles, tales que Q_j tiene contacto maximal con Q_{j+1}. Además, si $\mathcal{O}_j$ es el anillo de valoración asociado a la valoración de tipo "contacto con Q_j", entonces

$$\mathcal{O}_\nu = \lim_{\overrightarrow{j}} \mathcal{O}_j.$$

En este caso, ν y $\hat{\nu}$ tienen rango y rango racional 1.

Las valoraciones de tipo "contacto con una curva"se pueden dividir, a su vez en tres tipos (como siempre, la referencia es [**48**]):

1.a) La curva asociada $\hat{f}$ está en A. (En su imagen por paso al completado). La valoración es, en K, de rango 2 y de rango racional 2, lo mismo que en $\hat{K}$. En este caso, $\nu(K)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico. Las llamaremos "valoraciones de contacto con una curva".

1.b) La curva asociada $\hat{f}$ no está en A, pero hay un elemento de A, irreducible en A pero no en $\hat{A}$, que tiene a $\hat{f}$ como factor en su descomposición irreducible en $\hat{A}$. Es decir, el ideal $(\hat{f}) \cap A$ es irreducible en A, pero analíticamente reducible. Los rangos de ν y $\hat{\nu}$, así como la imagen de K por ν son los mismos que en 1.a. Las llamaremos también "valoraciones de contacto con una curva", pero distinguiendo de las anteriores por el contexto.

1.c) El ideal $(\hat{f})$ es "propiamente formal", esto es, $(\hat{f}) \cap A = (0)$. En este caso, ν tiene rango 1 y rango racional 1 (de hecho, es la valoración asociada a la multiplicidad de intersección con $\hat{f}$), mientras que ambos rangos son 2 para $\hat{\nu}$.

4. Valoraciones y campos de vectores en dimensión 2

Estamos en condiciones de estudiar la relación entre las foliaciones por curvas sobre $Spec(A)$ y las valoraciones centradas en A. Vamos a utilizar indistintamente, como dijimos al introducir la teoría general, el lenguaje de las $1-$formas y el de las distribuciones, puesto que en dimensión 2 compleja, es equivalente dar una $1-$forma a dar una foliación por curvas.

Sea ω una $1-$forma sobre A y (x, y) un sistema regular de parámetros en A; consideraremos A como un subanillo local de $\mathbb{C}[[x, y]] \simeq \hat{A}$ (cf. primera sección de este capítulo). Así pues, ω se puede escribir como sigue:

$$\omega = adx + bdy$$

con $a, b \in A$. La forma ω induce una única foliación por curvas $\partial \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(K)$. Un representante de ∂ es, por ejemplo,

$$\begin{cases} \partial x = -b \\ \partial y = a \end{cases}$$

que será el que utilicemos habitualmente. En adelante, ∂ y ω se consideran fijas, con las condiciones impuestas.

Como antes, $\mathfrak{m}$ denotará el ideal maximal de A. El punto que $\mathfrak{m}$ representa en $Spec(A)$ lo denotaremos (como es habitual) $(0, 0)$.

En todo lo que resta del capítulo, una *separatriz* será un curva formal irreducible (es decir, un ideal principal $(\hat{f})$ de $\hat{A}$) tal que $d\hat{f}\wedge\omega = f\eta$, donde η es una 2−forma cualquiera).

4.1. Los resultados clave. Fijemos una valoración cualquiera ν, centrada en $(A,\mathfrak{m})$. Sea $\mathcal{Y}\xrightarrow{\pi}\mathcal{X}$ la explosión de $\mathcal{X} = Spec(A)$ con centro $\mathfrak{m}$. Llamemos E al divisor excepcional, Q al centro de ν en E, A_Q su anillo local asociado y sean $\tilde{\omega}$ el transformado estricto de ω por π, y $\tilde{\partial}$ la foliación por curvas sobre $Spec(A_Q)$ asociada (que está en $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(K)$). El siguiente resultado es la piedra angular de todo este capítulo:

TEOREMA 63. *Si ν es una valoración centrada en $(A,\mathfrak{m})$ de L'Hôpital para ∂, distinta de la del orden en $\mathfrak{m}$, entonces Q es singular para $\tilde{\partial}$.*

DEMOSTRACIÓN. La hacemos sólo para el caso en que ∂ no es dicrítica en $(0,0)$, dejando al lector los detalles de este caso. Supongamos que Q no es singular para $\tilde{\partial}$. Cambiando (x,y) por otro sistema de parámetros mediante una transformación lineal, podemos suponer que Q es el origen de la carta siguiente de π:

$$\pi : \begin{cases} x = x_2 \\ y = x_2y_2 \end{cases}$$

Como Q no es dicrítico para ∂ ni singular para $\tilde{\partial}$, la forma de partida ω se escribe

$$\omega = x_2^{\alpha}u(dx_2 + x_2\psi dy_2)$$

donde ψ está en A_Q (de hecho, en A, que se inyecta de manera natural en A_Q) y u es un elemento de $A\subset A_Q$ no nulo en $(x_2 = 0, y_2 = 0)$. El factor x_2 en dy_2 aparece porque estamos suponiendo que el divisor excepcional es invariante (al ser ∂ no dicrítica). Está claro que $\nu(y) > \nu(x) > 0$, pues $\nu(x_2), \nu(y_2) > 0$. Un representante de $\tilde{\partial}$ (al que denotamos del mismo modo) es:

$$\begin{cases} \tilde{\partial}x_2 = -x_2^{\alpha+1}u\psi \\ \tilde{\partial}y_2 = x_2^{\alpha}u \end{cases}$$

de donde, abusando de notación:

$$\nu\left(\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \nu\left(y_2 - \frac{x_2\tilde{\partial}y_2 + y_2\tilde{\partial}x_2}{\tilde{\partial}x_2}\right) =$$

$$= \nu\left(-\frac{x_2^{\alpha+1}u}{-x_2^{\alpha+1}u\psi}\right),$$

pero $\nu(u) = 0$, $\nu(1) = 0$, $\nu(\psi) \geq 0$ y, por tanto, ν no puede ser de L'Hôpital. $\square$

Corolario 64. *Las valoraciones "con infinitos pares de Puiseux"no son nunca de L'Hôpital.*

Demostración. Para que una valoración con infinitos pares de Puiseux fuera de L'Hôpital, debería poder ocurrir lo siguiente: dado un punto Q simple[2] para $\tilde{\omega}$ (el transformado estricto de ω en Q), que fuera una esquina, tendría que existir una cadena finita de explosiones que comenzara en Q, siguiera puntos singulares de $\tilde{\omega}$ y hubiera un centro de explosión en esa cadena, regular en el divisor excepcional. Esto es imposible, pues al ser Q una esquina simple, $\tilde{\omega}$ tiene dos direcciones singulares y sólo dos: las correspondientes a las componentes irreducibles del divisor excepcional que pasan por él. Así que, al explotar un punto simple esquina, sólo aparecen dos singularidades en el nuevo divisor, que son, a su vez, esquinas (corte del nuevo divisor con el que pasaba por Q con la pendiente correspondiente). $\square$

Lema 65. *Sea ω una $1-$forma y $f \in \hat{A}$, con $(f) \cap A = (0)$ una separatriz propiamente formal. Sea ∂ una derivación ortogonal para ω y $u = a/b \in K$. Escribamos $\partial x = h, \partial y = g$ con h, g primos entre sí. Supongamos que $(t^\alpha, \varphi(t))$ es una parametrización de Puiseux de $f = 0$. Se tiene que*

$$\partial u(t^\alpha, \varphi(t)) = \frac{1}{\alpha t^{\alpha-1}} h(t) \frac{d}{dt}(u(t^\alpha, \varphi(t))).$$

Demostración. Desarrollando la derivada de u, es

$$\partial u = u_x \partial x + u_y \partial y = u_x h + u_y g = h(u_x + \frac{g}{h} u_y)$$

como $f = 0$ es estrictamente formal, $h(t^\alpha, \varphi(t)) \neq 0$ y, como es una separatriz,

$$\frac{g}{h}(t^\alpha, \varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{\alpha t^{\alpha-1}},$$

y sustituyendo esto en la expresión de arriba, se obtiene

$$\partial(u)(t^\alpha, \varphi(t)) = \frac{1}{\alpha t^{\alpha-1}} h(t) \frac{d}{dt}(u(t^\alpha, \varphi(t))),$$

como se quería. $\square$

[2]Sin perder generalidad, pues por el teorema de Seidenberg [**45**], cualquier cadena infinita de explosiones sigue a partir de un momento puntos simples.

4.2. El caso dicrítico. La relación entre las valoraciones y los centros dicríticos se fundamenta en el siguiente

LEMA 66. *Sea ∂ una derivación de A y ν la valoración del orden centrada en A (es decir, $\nu(a) = m \in \mathbb{N}$ si y sólo si $a \in \mathfrak{m}^m - \mathfrak{m}^{m+1}$). Supongamos que $\partial x = \theta$ y $\partial y = \eta$ y escribamos $r = \min\{\nu(\eta), \nu(\theta)\}$. Entonces*

1. *$\nu(a\partial b - b\partial a) \geq \nu(a) + \nu(b) + r - 1$, para todos $a, b \in A$.*
2. *∂ es dicrítica para la primera explosión si y sólo si existen $a, b \in A$ para los que se da la desigualdad estricta. Además, en este caso, $\nu(a) = \nu(b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $a, b \in A \subset \hat{A} \simeq \mathbb{C}[[x, y]]$ con $\nu(a) = m, \nu(b) = n$. Haciendo uso de esta última inyección, escribimos a, b, θ y η como suma de términos homogéneos

$$\begin{cases} a = a_m + a_{m+1} + \dots \\ b = b_n + b_{n+1} + \dots \end{cases} \begin{cases} \theta = \theta_l + \dots \\ \eta = \eta_k + \dots \end{cases}$$

Al aplicar ∂ a a y b se obtiene

$$\begin{cases} \partial a = a_{mx}\theta_l + a_{my}\eta_k + \dots \\ \partial b = b_{nx}\theta_l + b_{my}\eta_k + \dots \end{cases}$$

donde las variables x e y en los subíndices indican "derivación parcial ordinaria". De esta última expresión se deduce, inmediatamente que

$$\nu(a\partial b - b\partial a) \geq m + n - 1 + r,$$

que es la desigualdad en general.

La derivación aplicada a un término $a_{ij}x^iy^j$ se comporta como sigue:

$$\partial(a_{ij}x^iy^j) = ia_{ij}x^{i-1}y^j\theta + ja_{ij}x^iy^{j-1}\eta$$

y tomando los términos de menor grado en θ y η, es

$$\partial(a_{ij}x^iy^j) = ia_{ij}x^{i-1}y^j\theta_r + ja_{ij}x^iy^{j-1}\eta_r$$

de donde

$$\begin{aligned} \partial(a_{ij}x^iy^j)b_{pq}x^py^q - \partial(b_{pq}x^py^q)a_{ij}x^iy^j = \\ = (ia_{ij}x^{i-1}y^j\theta_r + ja_{ij}x^iy^{j-1}\eta_r)b_{pq}x^py^q - \\ - (pb_{pq}x^{p-1}y^q\theta_r + qb_{pq}x^py^{q-1}\eta_r)a_{ij}x^iy^j = \\ = ((i-p)a_{ij}b_{pq}\theta_r)x^{i+p-1}y^{j+q} + ((j-q)a_{ij}b_{pq}\eta_r)x^{i+p}y^{j+q-1} \end{aligned}$$

que se anula si y sólo si $i + j = p + q = 0$ y además $x\theta_r + y\eta_r = 0$. Teniendo en cuenta que la derivación no introduce relaciones entre monomios con distintos exponentes: $(i+p-1, j+q) = (k+p-1, l+q) \Leftrightarrow$

$i = k, j = l$, se deduce que el orden sube si y sólo si los órdenes de a y b son iguales y, además, ∂ es dicrítica. $\square$

El resultado siguiente es la caracterización de los centros dicríticos a partir de las valoraciones divisoriales de L'Hôpital.

TEOREMA 67. *Sea ν una valoración divisorial centrada en A. Sea Q el* centro propio *de ν. Sea ∂ una foliación por curvas sobre $Spec(A)$. Entonces*

$$\nu \text{ es de L'Hôpital para } \partial \Leftrightarrow \partial \text{ es dicrítica en } Q.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un sistema de parámetros (u, v) de A_Q. Existen $\sigma, \theta, \eta \in A_Q$ y una forma diferencial ω con coeficientes en A_Q, cuya foliación asociada es $\tilde{\partial}$, y que se escribe

$$\omega = \frac{\eta(u,v)}{\sigma(u,v)}du - \frac{\theta(u,v)}{\sigma(u,v)}dv$$

además, en esas coordenadas, ν es la valoración "del orden". Podemos quitar denominadores y suponer que θ y η son primos entre sí en A_Q. Llamemos m al mínimo de $ord(\theta), ord(\eta)$. Sean $a = \frac{\overline{a}(u,v)}{\Delta(u,v)}$, $b = \frac{\overline{b}(u,v)}{\Delta(u,v)}$, con $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$ y donde $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\Delta \in A_Q$. Se tiene que

$$\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\Delta(\overline{a}\partial\overline{b} - \partial\overline{a}\overline{b})}{\overline{b}(\Delta\partial\overline{b} - \overline{b}\partial\Delta)}.$$

Llamemos $d = ord(\Delta)$, $s = ord(\overline{b})$, $t = ord(\overline{a})$. Por hipótesis, $0 \leq d < s \leq t$. Por el lema anterior sabemos que

$$\nu(\Delta(\overline{a}\partial\overline{b} - \partial\overline{a}\overline{b})) \geq \overline{b}(\Delta\partial\overline{b} - \overline{b}\partial\Delta) = 2s + d + m - 1.$$

(La última igualdad es también consecuencia del lema, pues $ord(b) > ord(\Delta)$). La condición de L'Hôpital se resume en que el orden del numerador sea mayor que el del denominador. Esta condición se satisface si $t > s$. Cuando $t = s$, la condición es cierta si y sólo si ∂ es dicrítica en el punto (cf. lema), lo que termina la prueba. $\square$

4.3. Las separatrices. En este apartado y hasta el final del capítulo, supondremos que la foliación no es dicrítica, pues ya hemos estudiado este caso en la sección anterior y la dicriticidad "desaparece" al cabo de un número finito de explosiones.

TEOREMA 68. *Sean $\partial \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(K)$ una foliación y ν una valoración de tipo contacto con una curva estrictamente formal. Entonces*

$$\hat{f} = 0 \text{ es una separatriz de } \omega \Leftrightarrow \nu \text{ es de L'Hôpital para } \partial.$$

Demostración. $\Leftarrow$) Es consecuencia inmediata del Teorema 63 y de que una curva formal que sigue puntos singulares de los transformados estrictos de ∂, es una separatriz. El caso dicrítico no plantea problemas especiales, pues al explotar una singularidad dicrítica, por cualquier punto de la nueva recta excepcional pasa una separatriz. Dejamos los detalles al lector.

$\Rightarrow$) La valoración ν es de rango 1 y viene dada por la multiplicidad de intersección con $\hat{f}$, o lo que es lo mismo, si $(x = t^\alpha, y = \varphi(t))$ es una parametrización de Puiseux de $\hat{f}$ y $a = a(x, y) \in A$, entonces $\nu(a) = ord_t(a(t^\alpha, \varphi(t)))$. Veamos que es de L'Hôpital . Si ω es una $1-$forma asociada a ∂, escribimos $\omega = gdx - hdy$, con h, $g \in A$ y sin factores comunes en A. Por el Lema 65 si $p, q \in K$, se tiene que

$$\nu\left(\frac{p}{q} - \frac{\partial p}{\partial q}\right) = ord_t\left(\frac{p}{q}(t) - \frac{\partial p}{\partial q}(t)\right) = ord_t\left(\frac{p}{q}(t) - \frac{p'(t)}{q'(t)}\right) > 0,$$

donde la última desigualdad consecuencia de la regla de L'Hôpital para una variable compleja. □

Para estudiar las valoraciones de contacto con curvas no formales (curvas no trascendentes) necesitamos una definición previa. Sea $\hat{f}$ una separatriz de ∂ y sea ρ una resolución de las singularidades de $\hat{f}$ y E el divisor excepcional de ρ. Podemos suponer que la última recta excepcional de E que aparece es invariante para $\rho^\star\partial$, que el transformado estricto de $\hat{f}$ corta a E en un punto regular Q de E y que Q es simple para ∂ (cf. [**45**]) Tomando un sistema regular de parámetros (u, v) de A_Q (el anillo local del punto Q), podemos suponer, sin perder generalidad, que $u = 0$ es la ecuación de E y que $v = 0$ es tangente al transformado estricto de $\hat{f}$. De aquí se deduce que hay un representante de ∂ cuya $1-$forma asociada tiene parte lineal $\lambda vdu + \mu udv$.

Definición 69. *Diremos que $\hat{f}$ tiene*

- Carácter genérico *si $\lambda\mu \neq 0$ y $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$.*
- Carácter infinito *si $\mu = 0$.*
- Carácter 0 *si $\lambda = 0$.*
- Carácter racional *si $\lambda\mu \neq 0$ y $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}$.*

Nota: La combinatoria de los coeficientes de la parte lineal de los transformados estrictos de ω por explosiones muestra que el Carácter está bien definido (no depende de ρ ni de las coordenadas (u, v)).

TEOREMA 70. *Si ν es de contacto con una curva (es decir, si $\hat{f}$ es la curva asociada, se tiene que $(\hat{f})\hat{A} \cap A \neq (0)$), entonces*

$$\nu \text{ es de L'Hôpital } \Leftrightarrow \hat{f} \text{ es separatriz con carácter } \begin{cases} \text{genérico} \\ \text{ó} \\ \text{infinito} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. La valoración es, en A, la siguiente:

$$\nu(a) = (i, j) \Leftrightarrow a \in (\hat{f})^i - (\hat{f})^{i+1},\ \#(\frac{a}{\hat{f}^i}, \hat{f}) = j$$

donde, como siempre, $\#(a, b)$ es la multiplicidad de intersección en el origen de dos curvas sin componentes (formales) comunes. El ideal $(\hat{f})$ se entiende incluido en $\hat{A}$.

$\Rightarrow$) Que es una separatriz se deduce de la Proposición 63. La parte relativa al carácter se demuestra por reducción al absurdo:

a) Supongamos primero que tiene carácter racional. Los autovalores, tras desingularización de ω (y por tanto de $\hat{f}$) se pueden suponer 1 y m/n, con $m, n \in \mathbb{N}$. Trabajamos en el punto Q en que la transformada estricta de $\hat{f}$ es transversal al divisor excepcional. La componente irreducible del divisor que contiene a Q es invariante[3] y el punto es simple. En el anillo local A_Q correspondiente a Q tomamos un sistema de parámetros (u, v) de modo que la transformada estricta de $\hat{f}$ siga los mismos puntos infinitamente próximos a Q que u[4] y el divisor sea $v = 0$. Así las cosas, la foliación asociada a ω tiene un representante como sigue:

$$\begin{cases} \partial u = u(1 + f_1) \\ \partial v = -\frac{m}{n} v(1 + f_2) \end{cases} \quad \text{con } \nu(f_1), \nu(f_2) > 0$$

por ser f y v invariantes y ∂ simple en Q. Tomemos

$$\begin{cases} a = u^m v^{n+1} \\ b = u^m v^n \end{cases}$$

Por construcción, $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$. Apliquémosles el criterio de L'hôpital:

$$\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{v^{2n+1}(m - nm/n - m + (n+1)m/n + g_1)}{v^{2n} g_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

[3]Si $\hat{f}$ se desingulariza al aparecer un divisor transversal a $\tilde{\omega}$, hacemos una nueva explosión en Q y nos centramos en su siguiente punto infinitamente próximo, para tener un divisor invariante por la derivación: el carácter no cambia.

[4]Si $\hat{f} \in A$, basta tomar como u =el transformado estricto de $\hat{f}$. Si no, se toma en $(0, 0)$ un elemento $a \in A \cap (\hat{f})\hat{A} - (\hat{f})^2$ y u=el transformado estricto de a.

con $\nu(g_1), \nu(g_2) > 0$. Como $(n+1)m/n \neq 0$, es $\nu(\alpha) = (0, 2n+1), \nu(\beta) > (0, 2n)$ y ν no es de L'Hôpital para ∂.

b) Estudiemos el caso en que $\hat{f}$ tiene carácter 0. Como antes, podemos centrarnos en un Q en que $\hat{f}$ esté desingularizada y sea transversal a una componente irreducible invariante del divisor y tomar un sistema de parámetros $(u, v) \in \mathfrak{m}$ de modo que ∂ se escriba ahora

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u = u^{q+1} + u f_1 \\ \partial v = -v(1 + f_2) \end{array} \right. \quad \text{con } \nu(f_1), \nu(f_2) > 0,\ q \geq 1$$

Tomamos en este caso los siguientes a y b:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = uv \\ b = u\frac{u+v}{v} \end{array} \right.$$

que cumplen $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$. Se comprueba, con cálculos elementales, que

$$\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{v^2}{u+v} - \frac{-v^2 - v^2 f_2 + v^2 f_1 + u^q v^2}{v f_1 + u g}$$

donde $g \in A_Q$. Como $\nu(u+v) = \nu(v) = (0,1)$ y $\nu(f_1) > 0$, la valoración no cumple la propiedad de L'Hôpital, q.e.d.

$\Leftarrow$) En este caso, tras reducir las singularidades de ∂, la transformada de $\hat{f}$ no es transversal a una componente dicrítica del divisor excepcional[5]. Nos centramos, como antes, en el punto Q de corte de la transformada estricta de $\hat{f}$ con el divisor excepcional. Sea (u, v) un sistema de parámetros en A_Q; ∂ se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u = u(1 + f_1) \\ \partial v = -\lambda v - v f_2 \end{array} \right. \quad \text{con } \nu(f_1), \nu(f_2) > 0.$$

Sean $a = u^i \overline{a}$, $b = u^j \overline{b}$ con $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$ y $\nu(\overline{a}) = (0, k)$, $\nu(\overline{b}) = (0, l)$. Es

$$\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{u^{i+j}}{u^{2j}} \left(\frac{j\overline{a}\overline{b} + j\overline{a}\overline{b}f_1 + \overline{a}\partial\overline{b} - i\overline{a}\overline{b} - i\overline{a}\overline{b}f_1 - \partial\overline{a}\overline{b}}{\overline{b}((j\overline{b} + \partial\overline{b}) + j\overline{b}f_1)} \right) = u^{i-j}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Vamos a hacer una pequeña digresión para calcular $\nu(j\overline{b} + \partial\overline{b})$.

Escribimos $\overline{b} = \frac{p}{q}$, donde sabemos que p y q son elementos de A_Q que se escriben en $\hat{A}_Q$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p = v^n + u h_1 + v^{n+1} h_2 \\ q = v^m + u g_1 + v^{m+1} g_2 \end{array}$$

[5] Dejamos este resultado como ejercicio para el lector.

(pues ni p ni q tienen como factor u). Las h_i y las g_j son series de potencias formales de la imagen de A_Q en su completado, $\hat{A_Q}$. Derivemos:

$$\begin{aligned}\partial p &= -n\lambda v^n + u\delta_1 - \lambda v^{n+1}\delta_2 + v^n f_2 \delta_3\\ \partial q &= -m\lambda v^m + u\epsilon_1 - \lambda v^{m+1}\epsilon_2 + v^m f_2 \epsilon_3\end{aligned}$$

donde otra vez, las δ_i, ϵ_j son elementos de A_Q. De aquí se deduce que $\nu(\partial pq - \partial qp) \geq 2\nu(q)$ y, por tanto, $\nu(\partial\bar{b}) \geq \nu(\bar{b})$. De hecho, se tiene la igualdad si y sólo si $n \neq m$ y $\lambda \neq 0$. Si $\nu(\partial\bar{b}) > \nu(\bar{b})$, entonces $\nu(\beta) = 2\nu(\bar{b})$ directamente. Si no, calculemos $\nu(j\bar{b} + \partial\bar{b})$:

$$j\bar{b} + \partial\bar{b} = j\frac{v^n + \cdots}{v^m + \cdots} + \frac{\lambda(n-m)v^{n+m} + \cdots}{v^{2m} + \cdots}$$

(los puntos indican términos de valoración mayor). Esta expresión es igual a la siguiente:

$$\frac{jv^{m+n} + \lambda(m-n)v^{n+m} + \cdots}{v^{2m} + \cdots}.$$

Como λ no es ni cero ni racional, resulta que $j + \lambda(m-n) \neq 0$ cuando $j \neq 0$ y en este caso se tiene que $\nu(j\bar{b} + \partial\bar{b}) = \nu(\bar{b})$. En el caso $j = 0$, tiene que ser $n > m$ y por tanto $\nu(\partial\bar{b}) = \nu(\bar{b})$.

Continuamos con la demostración. Sabemos que $\nu(\beta) = 2\nu(\bar{b})$. Por tanto, si $i > j$, se cumple directamente la condición de L'Hôpital por el factor u^{i-j}. Si $i = j$, debe ser $\nu(\bar{a}) \geq \nu(\bar{b}) > 0$ y, de la expresión de α, se deduce que

$$\nu(\alpha) \geq \nu\left(\bar{b}^2\partial\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)\right)$$

de donde, por un razonamiento similar al anterior, $\nu(\alpha) > \nu(\beta)$, y terminamos. □

Corolario 71. *Sea ν una valoración de contacto con un divisor y ∂ una foliación por curvas. Sea Q la esquina "fija" de ν, que podemos suponer simple para ∂. Entonces ν es de L'Hôpital para ∂ si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes:*

a) *Las dos componentes irreducibles del divisor excepcional que se cortan en Q tienen carácter genérico (entendidas como separatrices de ∂ en el anillo A_Q).*
b) *Una de las dos componentes del divisor tiene carácter infinito (y por tanto, la otra, cero) y ν sigue los puntos infinitamente próximos marcados por ella.*

Demostración. Aplíquese el lema anterior para la situación $A = A_Q$ y $\partial =$ la transformada de ∂ en Q; nótese que las ecuaciones de ambos divisores son elementos de A_Q. □

4.4. Valoraciones con un exponente de Puiseux irracional.

LEMA 72. *Sea Q una singularidad simple de una foliación por curvas ∂ sobre A. Fijemos $\omega = a_1dx + b_1dy +$ t.m.o. una forma asociada a ∂, con $a_1b_1 \neq 0$, donde a_1, b_1 tienen orden 1. Supongamos que el cociente de los autovalores de la $1-$forma $\omega_1 = a_1dx + b_1dy$ no es racional. Sea ν una valoración centrada en Q, de tipo "exponente irracional"que sigue puntos infinitamente próximos de una de las dos separatrices de ∂ en Q. Entonces ν es de L'Hôpital para ∂.*

DEMOSTRACIÓN. Para esta demostración utilizamos explícitamente el hecho de que A es un subanillo de $\hat{A} \simeq \mathbb{C}[[u,v]]$ (tomando un sistema de parámetros (u,v) en Q). Las condiciones impuestas hacen ∂ se pueda escribir

$$\partial = (\lambda u + \text{ t.m.o.})dv - (v + \text{ t.m.o.})du,\ \lambda \notin \mathbb{Q}.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \partial u = \lambda u + \text{ t.m.o.} \\ \partial v = v + \text{ t.m.o.} \end{cases}$$

y la valoración asociada es $\nu(u) = 1, \nu(v) = \kappa \in \mathbb{I}_+$[6], que para un elemento $\alpha = \sum a_{ij}u^iv^j \in \hat{A}$ es $\nu(\alpha) = \text{mín}_{a_{ij}\neq 0}(i+\kappa j) = ord_t(\sum a_{ij}t^{i+\kappa j})$.

Dados $\alpha,\ \beta \in A$, se escribe

$$\partial\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{(\lambda u\alpha_u + v\alpha_v)\beta - (\lambda u\beta_u + v\beta_v)\alpha}{\beta^2} + \ldots$$

El conjunto de índices de $(\lambda u\alpha_u + v\alpha_v)$ cuyo coeficiente es distinto de 0 es el mismo que el de α, porque λ no es racional. Lo mismo ocurre con los coeficientes de $(\lambda u\beta_u + v\beta_v)$ y los de β. Si el coeficiente que corresponde al índice de mínima valoración en α es (i_0, j_0) y el de β es (m_0, n_0), entonces el del numerador es

$$(\lambda i_0 + j_0)\alpha_{i_0j_0}\beta_{m_0n_0} - (\lambda m_0 + n_0)\alpha_{i_0j_0}\beta_{m_0n_0} =$$

$$= \alpha_{i_0j_0}\beta_{m_0n_0}(\lambda(i_0 - m_0) + (j_0 - n_0)),$$

que es distinto de cero. Si $(i_0, j_0) \neq (m_0, n_0)$, la valoración del numerador es la suma de las valoraciones de α y de β. Si, por el contrario, $(i_0, j_0) = (m_0, n_0)$, la valoración del numerador es mayor que la suma de las de α y β.

[6] κ es irracional porque la valoración ν sigue puntos de una de las dos ramas de ∂ por Q. Si no fuera así, no podríamos suponerlo.

Tomemos dos elementos $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta} \in K \subset \mathbb{C}((u,v))$,

$$\nu\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\beta}} - \frac{\partial\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\partial\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)}\right) = \nu\left(\frac{\beta(\alpha\partial\gamma - \gamma\partial\alpha)}{\gamma(\partial\gamma\beta - \partial\beta\gamma)}\right)$$

Supongamos que $\nu(\alpha) \geq \nu(\gamma) > \nu(\beta) \geq 0$. De la segunda desigualdad, por lo dicho más arriba, se deduce que $\nu(\gamma(\partial\gamma\beta - \partial\beta\gamma)) = \nu(\gamma) + \nu(\gamma) + \nu(\beta)$. Hay dos posibilidades: $\nu(\alpha) = \nu(\gamma)$ y $\nu(\alpha) > \nu(\gamma)$. En el primer caso, el argumento utilizado arriba prueba que la valoración del numerador es mayor que $\nu(\gamma) + \nu(\gamma) + \nu(\beta)$. En el segundo, se tiene directamente que

$$\nu(\alpha) + \nu(\beta) + \nu(\gamma) > \nu(\gamma) + \nu(\gamma) + \nu(\beta).$$

Por tanto, la condición de L'Hôpital se satisface en cualquier caso. □

Nota: Evidentemente, una valoración con un exponente de Puiseux irracional" que no siga puntos de una separatriz no es invariante, por la Proposición 63.

Lema 73. *En las misma situación, pero con el cociente de autovalores racional (donde se incluye el caso en que uno cualquiera sea* 0*), ninguna valoración "con un exponente de Puiseux irracional.*^{es} *de L'Hôpital para* ∂*.*

Demostración. Por la nota, podemos restringirnos al caso en que la valoración sigue puntos infinitamente próximos de una de las dos separatrices (formales) de ∂. Sea ω una $1-$forma de $\mathbb{C}[[u,v]]$ cuyos coeficientes no tienen factores comunes, asociada a ∂. Dividimos la prueba en dos casos: resonante (ningún autovalor de la parte lineal de ω es nulo) y silla-nodo (un autovalor nulo).

a) Caso resonante: $\omega = (mu + \ldots)dv + (nv + \ldots)du$, con $m, n \in \mathbb{N}$ distintos de 0. La derivación asociada es

$$\begin{cases} \partial u = -mu + \ldots \\ \partial v = nv + \ldots \end{cases}$$

Puesto que el cociente de los autovalores de la parte lineal es un racional, existe un sistema de parámetros formal transforma la ω en $(mu + uva(u,v))dv + (nv + uvb(u,v))du$ (generalización de un teorema de Siegel) (cf. por ejemplo [**5**]). Para conseguir un resultado sobre A (y no sobre el completado), se puede trasladar la demostración del caso formal (que se realiza por coeficientes indeterminados), truncando el proceso y obteniéndose que existe un cambio de parámetros en A que transforma la expresión de ω en:

$$(mu + s_1(u,v))dv + (nv + s_2(u,v))du$$

donde $\nu(s_1), \nu(s_2) \geq \nu(u)+\nu(v)$. Suponemos, a partir de ahora, que hemos hecho este cambio. La valoración es $\nu(u)=1$, $\nu(v)=\eta \in \mathbf{I}_+$[7], donde, sin perder generalidad, se puede suponer que $\eta > 1$. Denotamos ∂ tanto a la foliación como a la derivación ortogonal de ω. Fijemos un par de números naturales $(i_0, j_0) \neq (0,0)$ tal que $-mi_0 + nj_0 = 0$. Para cualquier $cu^{i_0}v^{j_0}$, es:

$$\nu(\partial(cu^{i_0}v^{j_0})) = \nu(i_0 cu^{i_0-1}v^{j_0}s_1(u,v) + j_0 cu^{i_0}v^{j_0-1}s_2) \geq$$

$$\text{mín}\{i_0 + j_0\eta + \eta, i_0 + j_0\eta + 1\} = i_0 + j_0\eta + 1,$$

por definición. Tomemos $r = [i_0 + j_0\eta + 1]$ (parte entera). Se tiene que $r < i_0 + j_0\eta + 1$ porque j_0 no es 0 y η es irracional.

Comprobemos finalmente que ν no es de L'Hôpital para ∂. Sean

$$\alpha = u^r,\ \gamma = u^{i_0}v^{j_0}.$$

Por construcción, $0 < \nu(\gamma) < \nu(\alpha)$, pero $\nu(\partial\gamma) > \nu(\partial\alpha) = \nu(\alpha)$. Así pues,

$$\nu\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\right) = \nu(\alpha) + \nu(\gamma) - \nu(\gamma) - \nu(\partial\gamma) < 0.$$

b) Silla-nodo. En este caso, ∂ tiene un representante de la forma $\partial = a(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + (v + b(u,v))\frac{\partial}{\partial v}$, con $ord(a) \geq 2$, $ord(b) \geq 2$. La valoración es $\nu(u) = 1$, $\nu(v) = \eta \in \mathbf{I}_+$, pero en principio no podemos suponer que $\eta > 1$. Para que la valoración de $\partial(cu^{i_0}v^{j_0})$ sea mayor que la de $cu^{i_0}v^{j_0}$ debe ser $j_0 = 0$ y , por tanto, $\nu(\partial(cu^{i_0})) = i_0 - 1 + \nu(a(u,v))$.

Por el teorema de Dulac de “clasificación”de sillas-nodo (ver, p.e. [**5**]), aplicado a A (truncando el proceso, como para el teorema de Siegel), hay un $p \geq 1$ natural tal que, con un cambio de parámetros en A se puede suponer que $\nu(a) \geq 2$ ($a = u^{p+1} +$ t.m.o). Una vez hecho este cambio resulta, para todo m natural, que

$$\nu(\partial(u^m)) \geq m+1.$$

Llegados a este punto, se presentan dos posibilidades: $\eta < 1$ y $\eta > 1$.

En el primer caso se toma $\alpha = uv$, $\gamma = u$; como se tiene que $\nu(\partial\alpha) = \nu(\alpha)$, $\nu(\partial\gamma) > \nu(\gamma)$, entonces

$$\nu\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\right) = \nu(\alpha) + \nu(\gamma) - \nu(\gamma) - \nu(\partial\gamma) \leq 0.$$

En el segundo caso, se toma $r = [\eta]$ (parte entera) y $\alpha = v$, $\gamma = u^r$ y el mismo argumento concluye la demostración. □

[7] Misma consideración que antes

4.5. Valoraciones de rango 1 y trascendencia de separatrices. Todos los lemas de la sección anterior nos permiten enunciar el siguiente resultado relativo a la trascendencia de las separatrices de una foliación sobre A.

TEOREMA 74. *Con la notación de este capítulo, se tiene:*

a) *Existe una valoración ν sobre $K = A_{(0)}$ de rango 1 y rango racional 1, de L'Hôpital para ∂ si y sólo si la foliación ∂ es dicrítica o admite una separatriz $\hat{f}$ trascendente sobre A, es decir, tal que $(\hat{f}) \cap A = (0)$.*
b) *Así pues, si ∂ no es dicrítica, entonces existe una valoración de L'Hôpital para ∂ de rango 1 y rango racional 1, si y sólo si existe una separatriz de ∂ trascendente (en el sentido anterior) sobre A.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de que las únicas valoraciones sobre A de rango 1 y rango racional 1, son las divisoriales y las "de contacto con una curva formal". $\square$

Más en concreto, para foliaciones racionales y analíticas, el resultado previo se enuncia como sigue:

TEOREMA 75. *Sea ω una $1-$forma racional (o meromorfa) en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ (resp. $(\mathbb{C}^2, 0)$) y ∂ su foliación asociada. Entonces:*

a) *Existe una valoración ν sobre $\mathbb{C}(x,y)$ (resp. $\mathbb{C}\{\{x,y\}\}$) de rango 1 y rango racional 1, de L'Hôpital para ∂, si y sólo si la foliación ∂ es dicrítica o existe una separatriz de ∂ trascendente sobre $\mathbb{C}[x,y]$[8] (resp. no convergente).*
b) Ergo*, si ∂ no es dicrítica, entonces existe una valoración de L'Hôpital para ∂ de rango 1 y rango racional 1, si y sólo si existe una separatriz de ∂ trascendente sobre $\mathbb{C}[x,y]$ (resp. no convergente).*

Por último, se tiene el siguiente

TEOREMA 76. *Sea ω una $1-$forma racional (resp. meromorfa) en el origen de $\mathbb{C}^2$ (resp. en $(\mathbb{C}^2, 0)$) y ∂ su foliación asociada. Sea $\hat{f}$ una separatriz de ∂ y ν la valoración asociada a su sucesión de puntos infinitamente próximos. Son equivalentes:*

1. *ν tiene rango 1*

[8]Esto es, cuya curva algebroide asociada no es una rama analítica de una curva algebraica.

2. *$\hat{f}$ es una curva algebroide trascendente -es decir, no es una rama analítica de una curva algebraica- (resp. $\hat{f}$ es no convergente).*

4.6. Las separatrices "que faltan". En la sección anterior hemos definido un tipo de valoraciones que nos permiten determinar "casi todas" las separatrices. De hecho, como el lector ha comprobado, la diferencia entre las que se detectan y las que no, se basa en el cociente de los autovalores de la parte lineal de la derivación una vez llevada a término la reducción de singularidades. Nos gustaría poseer un criterio que "localizara" todas las curvas integrales. Es lo que presentamos en esta sección.

DEFINICIÓN 77. *En las condiciones del capítulo anterior, y con las mismas notaciones, diremos que una valoración ν es* débilmente de L'Hôpital *si para cualesquiera $a, b \in K$ tales que $\nu(a) \geq \nu(b) > 0$* y tales que *si $\nu(c) > 0$ entonces hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\nu(c) > \nu(a)$, entonces*

$$\nu\left(\frac{a}{b} - \frac{\partial a}{\partial b}\right) > 0.$$

Es decir, si $G \subset \Gamma$ es el primer subgrupo aislado de Γ, se exige que se verifique la condición usual sólo para las a, b con $\nu(a), \nu(b) \in G$.

En otras palabras, una valoración es débilmente de L'Hôpital si es de L'Hôpital para las funciones con "valor finito". En el caso del plano, y para una valoración de tipo "contacto con una curva algebraica" $f = 0$, las funciones a las que se hace referencia son todas aquellas $a \in K$ tales que ni a ni $\frac{1}{a}$ están en el ideal (f).

LEMA 78. *En las condiciones del Teorema 63 de este capítulo, para que una valoración sea débilmente de L'Hôpital para una derivación es necesario que los puntos infinitamente próximos que define sean singulares para la derivación.*

DEMOSTRACIÓN. Exactamente la misma que en la mencionada proposición. Téngase en cuenta, al trasladarla, que en la construcción que se hizo allí para obtener un contraejemplo, se pueden utilizar exclusivamente funciones con valoración "finita". De hecho, puesto que estamos en el plano, las únicas valoraciones de rango mayor que uno son las de contacto con una curva algebraica (o con un divisor) y para éstas se comprueba la propiedad con un cálculo directo semejante a todos los de la sección anterior. □

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del lema anterior y de toda la sección previa:

TEOREMA 79. *Sea ν una valoración del plano (con estructura algebraica, analítica, formal) del tipo "contacto con una curva", es decir, tal que si A es el anillo local en el que se trabaja, hay un $\hat{f} \in \tilde{A}$ cuya valoración es la del contacto con $\hat{f}$. Sea ∂ una derivación de A. Entonces $\hat{f}$ es una separatriz de ∂ si y sólo si la valoración ν es débilmente de L'Hôpital para ∂.*

5. Superficies singulares

Para campos de vectores en superficies singulares, vale toda la teoría que hemos desarrollado en este capítulo, pues como se demuestra en [**53**], las valoraciones centradas en un punto de una superficie singular son las mismas que las centradas en un punto de una superficie regular. De este modo, se traducen todos los resultados relativos a valoraciones de L'Hôpital al contexto singular. De hecho, por el teorema de uniformización local de valoraciones en característica nula, siempre se puede suponer que, tras un número finito de transformaciones birracionales, uno se encuentra en la situación local.

CAPíTULO 3

La superficie abstracta de Riemann. y la parte inicial de una valoración.

1. La superficie abstracta de Riemann y las valoraciones de L'Hôpital

Vamos a estudiar en este apartado la relación entre la superficie abstracta de Riemann (para un estudio detallado de este objeto, ver p.e. [**48**]) y las valoraciones de L'Hôpital. Trabajaremos, como siempre, con cuerpos base de característica 0. En todo este capítulo, por reducción de singularidades de un germen $1-$forma analítica ω entenderemos una reducción de singularidades tal que por cada punto simple pasa como mucho una separatriz (eventualmente formal) de ω. Por tanto, si ω es simple en el origen de $\mathbb{C}^2$, no es reducida: hay que hacer una explosión. Esta aclaración es necesaria sobre todo cuando al reducir las singularidades de ω aparece una singularidad simple sobre un divisor dicrítico: en este caso hay que explotar otra vez dicha singularidad para considerarla "reducida".

1.1. Definición de la Superficie abstracta de Riemann. Todos los resultados que presentamos en este subapartado, así como las definiciones, son de Zariski [**54**]. Seguimos la exposición de Spivakovsky en unas notas aún no publicadas [**49**].

Partimos de $\mathcal{X}$, un esquema noetheriano íntegro. Sea $K = K(\mathcal{X})$ su cuerpo de funciones racionales. Sea Λ un conjunto de índices para todos los morfismos birracionales proyectivos $\mathcal{X}_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathcal{X}$. Para cada par $\alpha, \beta \in \Lambda$ hay un $\gamma \in \Lambda$ tal que el morfismo $\mathcal{X}_\gamma \xrightarrow{\pi_\gamma} \mathcal{X}$ factoriza a través de $\mathcal{X}_\alpha$ y de $\mathcal{X}_\beta$, de modo que Λ es un conjunto dirigido con el orden dado por la dominación birracional de morfismos de esquemas. Así pues, el conjunto $\{\mathcal{X}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ con los morfismos birracionales $\mathcal{X}_\alpha \xrightarrow{\pi_{\alpha\beta}} \mathcal{X}_\beta$, forma un sistema proyectivo.

DEFINICIÓN 80. *El límite proyectivo* $\mathcal{S} = \varprojlim \mathcal{X}_\alpha$ *se llama* la superficie abstracta de Riemann *de* $\mathcal{X}$.

Para cada $\mathcal{X}_\alpha$ birracional y proyectivo sobre $\mathcal{X}$, sea $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathcal{X}_\alpha$ el morfismo natural del $\mathcal{S}$ a $\mathcal{X}_\alpha$.

Definición 81. *La topología de Zariski en $\mathcal{S}$ es el límite proyectivo de las topologías de Zariski de los $\mathcal{X}_\alpha$; es decir, la topología más gruesa que hace continuas todas las φ_α.*

Se tienen los siguientes resultados [**54**]:

Teorema 82. *Hay una biyección natural entre $\mathcal{S}$ y el conjunto de todas las valoraciones ν de K centradas en algún punto de $\mathcal{X}$.*

Teorema 83. *$\mathcal{S}$ es compacto en la topología de Zariski.*

En todo caso, nuestra utilización de la Superficie abstracta de Riemann en el siguiente capítulo no tendrá en cuenta la topología de Zariski, sino otra que nos dará una mejor comprensión del papel de las derivaciones de L'Hôpital como objetos *geométricos*.

Fijemos una valoración $\nu : K^* \to \Gamma$, cuyo anillo denotaremos $\mathcal{O}_\nu$. Sea γ un elemento de Γ_+ (el semigrupo de los elementos no negativos de Γ).

Definición 84. *Llamaremos P_γ y $P_{\gamma+}$ respectivamente, a los siguientes ideales de $\mathcal{O}_\nu$:*

$$P_\gamma = \{x \in \mathcal{O}_\nu | \nu(x) \geq \gamma\}$$
$$P_{\gamma+} = \{x \in \mathcal{O}_\nu | \nu(x) > \gamma\}$$

(Se pueden ver estas definiciones con mayor generalidad en [**49**]).

Definición 85. *El* álgebra graduada asociada a ν *es*

$$gr_\nu(A) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_+} \frac{P_\gamma}{P_{\gamma+}},$$

que es un dominio de integridad.

Hacemos notar al lector que nuestra nomenclatura difiere un poco de la de [**49**], por razones de comodidad.

2. Una métrica para la Superficie de Riemann

Como dijimos antes, la topología de Zariski no es la más adecuada para estudiar la estructura de la superficie de Riemann en relación con las valoraciones. La idea que subyace en esta sección es la de considerar las valoraciones como "sucesiones de puntos infinitamente próximos" que se distinguen por el lugar que ocupa el primer término diferente. Haremos el estudio en el caso de dimensión 2, pues es el único en el que se tiene una reducción de singularidades para campos de vectores.

Partimos de una derivación ∂ del anillo $\mathcal{O}$ de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno del origen del plano complejo. Suponemos, como siempre, que si u y v son dos generadores del maximal de $\mathcal{O}$, entonces los elementos ∂u y ∂v son primos entre sí. Sean ν y ν' dos valoraciones distintas *no divisoriales*, centradas en $\mathcal{O}$ y n un entero no negativo.

DEFINICIÓN 86. *La* distancia $d(\nu,\nu')$ *entre* ν *y* ν' *es* $1/2^k$ *si y sólo si existe una sucesión de explosiones*

$$X_{n+1} \stackrel{\pi_n}{\to} X_n \stackrel{\pi_{n-1}}{\to} \cdots \stackrel{\pi_1}{\to} X_1 \stackrel{\pi_0}{\to} X_0 \simeq (\mathbb{C}^2, 0)$$

tal que el centro de de π_i *es el centro de* ν *y* ν' *en el divisor excepcional* $E_i \subseteq X_i$*, para* i *desde* 0 *hasta* n *(para* $i=0$*, el centro es el origen de coordenadas) y los centros de* ν *y* ν' *en* E_{n+1} *son diferentes.*

DEFINICIÓN 87. *Llamamos* superficie estricta de Riemann *del anillo* $\mathcal{O}$ *y la denotamos* $\overline{\mathcal{S}}$ *al conjunto de valoraciones no divisoriales centradas en* $\mathcal{O}$*.*

Se tiene el siguiente

TEOREMA 88. *La función*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{S}} \times \overline{\mathcal{S}} & \stackrel{d}{\to} & \mathbb{R} \\ (\nu,\nu') & \mapsto & d(\nu,\nu') \end{array}$$

define una métrica en $\overline{\mathcal{S}}$*. El espacio métrico* $(\overline{\mathcal{S}}, d)$ *es isométrico a*

$$(\mathbb{CP}^1)^{\mathbb{N}} := \varprojlim_n (\mathbb{CP}^1)^n$$

dotado de la ultramétrica inducida en el límite proyectivo por la métrica discreta en cada $(\mathbb{CP}^1)^n$*.*

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad triangular es consecuencia directa de la definición de $d(\nu,\nu')$. El resto de propiedades necesarias para definir una métrica son obvias. Construyamos una isometría. Fijemos un sistema de coordenadas (x_0, y_0) en el origen de $\mathbb{C}^2$. Dada $\nu \in \overline{\mathcal{S}}$, definimos $P(\nu) = (p_1(\nu), \ldots, p_n(\nu), \ldots)$, donde $p_i(\nu)$ es el centro de ν en el $i-$ésimo divisor excepcional. Esta construcción define una aplicación biyectiva entre $\overline{\mathcal{S}}$ y $\varprojlim (\mathbb{CP}^1)^n$. Veamos que es una isometría. Para ello, vamos a escribir $\overline{\mathcal{S}}$ como un límite proyectivo de espacios discretos y vamos a dar isomorfismos entre los sistemas proyectivos correspondientes.

Sea n un entero positivo. Sea $\overline{\mathcal{S}}_n$ el conjunto de valoraciones divisoriales "de longitud exactamente n", es decir, las valoraciones divisoriales cuyo centro propio se alcanza exactamente tras n explosiones. Dotamos a $\overline{\mathcal{S}}_n$ de la topología discreta (que es una estructura métrica). Tenemos, para cada n, una aplicación π_n de $\overline{\mathcal{S}}$ a $\overline{\mathcal{S}}_n$ que envía una valoración no divisorial en la valoración divisorial que sigue sus n primeros puntos. Estas aplicaciones son isometrías y forman un sistema proyectivo. Por tanto, $\overline{\mathcal{S}}$ es el límite proyectivo de los $\overline{\mathcal{S}}_n$.

Por otro lado, se comprueba de modo elemental que $\overline{\mathcal{S}}_n$ es isométrico a $(\mathbb{CP}^1)^n$, con lo que los límites proyectivos de ambos sistemas son isométricos. □

El siguiente resultado es una descripción somera de las propiedades principales de $\overline{\mathcal{S}}$ como espacio métrico. Las demostraciones son directas y las dejamos a cargo del lector.

Proposición 89. *La superficie estricta de Riemann, dotada de la métrica anterior es un espacio métrico completo, totalmente desconectado, que no es compacto y tal que las bolas son abiertas y cerradas y están centradas en todos sus puntos; es decir si $\nu \in \overline{\mathcal{S}}, n \in \mathbb{N}$ y $\nu' \in B(\nu, \varepsilon)$, entones $B(\nu, \varepsilon) = B(\nu', \varepsilon)$.*

Además de esto, hay en $\overline{\mathcal{S}}$ un subconjunto que merece especial atención a la hora de estudiar las valoraciones de L'Hôpital para una derivación:

Definición 90. *Se denomina* parte irracional de $\overline{\mathcal{S}}$ *y se denota por* $\mathbb{I}$ *al conjunto formado por todas las valoraciones de rango* 1 *y rango racional* 2.

Este conjunto es denso en $\overline{\mathcal{S}}$, pero no es abierto.

3. La bóveda estrellada

Describimos a continuación la estructura del conjunto de valoraciones de $\overline{\mathcal{S}}$ que son de L'Hôpital respecto de una derivación determinada. Obtendremos al final una clasificación de las singularidades simples según la "forma" de dicho conjunto.

Fijemos una derivación ∂ del anillo $\mathcal{O}$ de gérmenes de funciones holomorfas en el origen del plano complejo. Suponemos, como es habitual, que si (u, v) es un sistema de parámetros para $\mathcal{O}$, entonces ∂u y ∂v son primos entre sí.

Definición 91. *La bóveda de ∂ es el conjunto*

$$\mathcal{S}_\partial = \{\nu \in \overline{\mathcal{S}} : \nu \text{ es de L'Hôpital para } \partial\}$$

Se tiene la siguiente

Proposición 92. *Supongamos que ∂ tiene una singularidad simple en el origen, con autovalores λ, μ. Se tiene una -y sólo una- de las tres posibilidades siguientes:*

1. *La singularidad es una silla-nodo con una separatriz no convergente. En este caso,* $\mathcal{S}_\partial$ *es un punto aislado de* $\overline{\mathcal{S}}$.
2. $\lambda\mu = 0$ *y ambas separatrices son convergentes, ó* $\lambda\mu \neq 0$ *y* $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}$. *La bóveda* $\mathcal{S}_\partial$ *es vacía.*
3. $\lambda\mu \neq 0$ *y su cociente no es racional. La bóveda está formada por una familia numerable de puntos de* $\mathbb{I}$ *y dos puntos "especiales" correspondientes a las dos separatrices. La bóveda* $\mathcal{S}_\partial$ *no es un cerrado y tiene estructura "arbórea".*

Demostración. Los tres casos son mutuamente excluyentes por la clasificación de singularidades simples de foliaciones [**45**]. Por los lemas del capítulo anterior y por estar trabajando en el anillo de gérmenes de funciones analíticas, en el segundo caso sabemos que no hay ninguna valoración de L'Hôpital para ∂, así que la bóveda es vacía. En el primer caso, se sabe que hay una única valoración de L'Hôpital para la derivación; a la sazón, la definida por el contacto con la curva formal no convergente invariante.

El tercer caso es el genérico. Se demostró en el capítulo anterior que las únicas valoraciones de L'Hôpital para ∂ son las dos correspondientes a las separatrices y las de $\mathbb{I}$ que siguen puntos singulares de los transformados estrictos de ∂ por explosiones. Más explícitamente, si ν es una valoración de $\mathcal{S}_\partial$, y P es un punto de la sucesión de puntos infinitamente próximos marcada por ν, entonces P es singular para el transformado estricto de ∂. La "estructura arbórea" es la siguiente: en la primera explosión hay dos puntos del divisor excepcional por los que puede pasar una valoración de $\mathcal{S}_\partial$. Tras realizar un número finito de explosiones y centrarnos en un punto P, singular para el transformado estricto de ∂, estamos en la misma situación que al principio, pues los autovalores de este transformado estricto en ∂ siguen teniendo cociente no racional. De hecho, si se define $\mathcal{S}_{\partial n}$ como el conjunto de valoraciones divisoriales cuyos puntos infinitamente próximos asociados son todos singulares para los transformados estrictos de ∂, se tiene que:

$$\mathcal{S}_\partial = \varprojlim \mathcal{S}_{\partial n} \bigcap \mathbb{I} \cup \{\nu_1, \nu_2\}.$$

donde ν_1 y ν_2 son las valoraciones correspondientes a las separatrices. □

Esta proposición nos permite describir la bóveda estrellada de una derivación cualquiera sobre $\mathcal{O}$.

Sea ∂ una derivación de $\mathcal{O}$ sobre $\mathbb{C}$, continua para la topología $\mathfrak{m}-$ádica y

$$\pi \xrightarrow{M} (\mathbb{C}^2, 0)$$

la reducción minimal de las singularidades de ∂. Escribimos la descomposición irreducible del divisor excepcional

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n.$$

Llamamos p_{ij} al punto intersección (si existe) de las rectas excepcionales E_i y E_j. Sean $q_1, \ldots, q_m$ los puntos singulares de la transformada estricta de ∂ que están sobre la parte no singular de E. Sea $\{u_1, \ldots, u_r\}$ el conjunto de los puntos p_{kl} y q_s tales que los autovalores de la parte lineal de la transformada estricta de ∂ en ellos tienen cociente no racional y $\{v_1, \ldots, v_t\}$ el conjunto de los puntos q_s tales que dicho cociente es 0 y la separatriz que pasa por ellos -distinta del divisor excepcional- es no convergente. Con estas hipótesis se tiene el siguiente

Teorema 93. *La bóveda estrellada de ∂ es unión disjunta de los $r + t$ conjuntos siguientes:*

a *Por una parte, r bolas abiertas, una para cada punto del tipo u_i, cuyos elementos son todos valoraciones del tipo* 3. *El centro de estas bolas es cualquier valoración de tipo* 3 *entre cuyos centros esté u_i, de L'Hôpital para ∂. El radio es $1/2^d$ donde d es la "distancia" de u_i al origen: la longitud de la cadena de explosiones que proyecta u_i al punto* $(0, 0)$. *Cada una de estas bolas tiene la estructura "arbórea" descrita en la proposición anterior.*

b *Por otra parte, t puntos aislados: las valoraciones de rango* 1 *de $\overline{\mathcal{S}}$ que siguen los puntos infinitamente próximos de la separatriz formal que pasa por el punto en cuestión.*

Como se ve, la bóveda estrellada es, para una derivación genérica, unión disjunta de bolas abiertas. De esta descripción se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario 94. *Un germen de foliación analítica singular en el origen del plano complejo tiene una separatriz no convergente si y sólo si su bóveda estrellada tiene al menos un punto aislado*

Corolario 95. *Sea ω un germen de foliación analítica en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$. Si existe una foliación con integral primera meromorfa cuya reducción de singularidades es la misma -como morfismo y con los mismos cocientes de autovalores en los puntos singulares de la reducción- entonces su bóveda estrellada es vacía.*

Como la reducción de singularidades -y los cocientes de autovaloresestá definida por un jet de ω finito, se tiene de manera inmediata el siguiente

COROLARIO 96. *Si ω es una $1-$forma analítica sin integral primera meromorfa en el origen de $\mathbb{C}^2$ y existe una función meromorfa f tal que la reducción de singularidades de df coincide con la de ω, entonces ω coincide con df hasta el orden de determinación de df -que es el mismo que el de ω.*

Pensamos que la siguiente conjetura es razonable:

Conjetura: La bóveda estrellada de una $1-$forma ω es vacía, si y sólo si existe una función meromorfa f que coincide con ω hasta el orden de determinación de ésta.

A modo de conclusión de este apartado, hacemos notar al lector que no hemos incluido las valoraciones divisoriales en la bóveda estrellada por no parecernos coherente ninguna definición de "distancia" de una valoración divisorial a otra.

4. Parte inicial de una derivación respecto de una valoración

Nos proponemos introducir en este apartado la noción de *parte inicial de una derivación* respecto de una valoración divisorial. Lo vamos a hacer en el caso de foliaciones planas. Para dimensión mayor, las definiciones y los resultados se generalizan de manera directa cuando se trabaja con valoraciones divisoriales cuyo último centro es un punto cerrado. Para un estudio del álgebra graduada asociada a una valoración, remitimos al lector a [**50**].

Partimos de una $1-$forma ω (holomorfa, para fijar ideas, aunque se puede trabajar igual en el caso algebraico y en el formal) en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$. Sea $[\partial]$ la familia de las derivaciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ duales de ω. Fijemos una valoración ν divisorial, y llamemos P a su centro propio. Sea (x,y) un sistema de parámetros para $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ y (u,v) sus transformados estrictos en P, que son un sistema de parámetros para $\mathcal{O}_P$. En $[\partial]$ tomamos un representante cualquiera

$$\partial = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

con $a, b \in \mathbb{C}\{x,y\}$ tales que $n = \text{mín}(ord(a), ord(b))$ es mínimo. Si $\tilde{\partial}$ es el transformado estricto de ∂ por la sucesión de explosiones marcada por ν, hasta llegar a P, se escribe

$$\tilde{\partial} = \tilde{a}(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{b}(u,v)\frac{\partial}{\partial v},$$

donde $\tilde{a}(u,v), \tilde{b}(u,v) \in \mathbb{C}[[u,v]] \cap \mathcal{O}_P$.

Definición 97. *El orden de* $[\partial]$ *con respecto a* ν *es*

$$\nu([\partial]) = \min(\nu(\tilde{a}), \nu(\tilde{b})) - 1.$$

Proposición 98. *El orden está bien definido y no depende de las coordenadas* (x, y).

Demostración. Veamos primero que está bien definido fijando las coordenadas (x, y). Si

$$\partial' = a'\frac{\partial}{\partial x} + b'\frac{\partial}{\partial y}$$

es otro representante de $[\partial]$, entonces

$$\begin{cases} a = a'h \\ b = b'h \end{cases}$$

donde h es una unidad. Así pues, $\partial' = h\partial$. Como h es una unidad, los transformados estrictos de ∂ y ∂' difieren en otra unidad -el transformado estricto de h-, de donde se deduce que el número $\nu([\partial])$ no depende del representante.

Para demostrar que no depende de las coordenadas escogidas, se procede por inducción sobre el número de explosiones necesarias para llegar a P, teniendo en cuenta que, aunque los anillos locales en los sucesivos centros de explosión no sean isomorfos, todos ellos son subanillos de anillos de series de potencias formales y el orden no depende de coordenadas, pues es una valoración. Dejamos los detalles a cargo del lector. □

Si en lugar de trabajar con foliaciones lo hacemos directamente con campos de vectores sin coeficientes comunes, podemos dar la misma

Definición 99. *El orden* $\nu(\partial)$ *de una derivación* ∂ *con respecto a una valoración* ν *divisorial, centrada en el origen de* $\mathbb{C}^2$ *es el orden de la familia* $[\partial]$.

Definición 100. *Sea* ∂ *una derivación de* $\mathbb{C}\{x, y\}$ *que cumpla que mcd*$(\partial x, \partial y) = 1$ *y sea* ν *una valoración divisorial centrada en el origen de* $\mathbb{C}^2$ *tal que* $\nu(\partial) \geq 0$. *La* parte inicial de ∂ con respecto a ν *es la siguiente aplicación:*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\gamma\geq 0} \mathcal{O}_\gamma/\mathcal{O}_{\gamma+} & \xrightarrow{In_\nu(\partial)} & \bigoplus_{\gamma\geq 0} \mathcal{O}_\gamma/\mathcal{O}_{\gamma+} \\ [[a_{\gamma_0}], \ldots, [a_{\gamma_n}]] & \longmapsto & [In_\nu(\partial)[a_{\gamma_0}], \ldots, In_\nu(\partial)[a_{\gamma_n}]] \end{array}$$

Donde

$$In_\nu(\partial)[a_\gamma] = \begin{cases} 0 \text{ si } \nu\left(\partial(a_\gamma)\right) > \nu(a_\gamma) + \nu\left([\partial]\right) \\ \\ [\partial(a_\gamma)] \text{ si } \nu\left(\partial(a_\gamma)\right) = \nu(a_\gamma) + \nu\left([\partial]\right) \end{cases}$$

para cualquier representante a_γ de la clase $[a_\gamma]$. Por construcción, este objeto es una aplicación -no depende de los representantes-. Además, no depende de las coordenadas -es intrínseco al par (derivación, valoración)- y se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 101. *La aplicación $In_\nu(\partial)$ es una derivación del álgebra graduada $gr_\nu(A) = \bigoplus_{\gamma\geq 0} \mathcal{O}_\gamma/\mathcal{O}_{\gamma+}$ asociada a ν.*

DEMOSTRACIÓN. Como no depende de los representantes elegidos, basta tomar un sistema de coordenadas (x, y) en el último centro de ν para seleccionar representantes *homogéneos* de cada elemento homogéneo del álgebra graduada. La definición de $In_\nu(\partial)$ está hecha *a medida* para que sea una derivación; dejamos los detalles al lector. $\square$

Sea $\tilde{\omega} = \tilde{b}du - \tilde{a}dv$ el transformado estricto de ω en el centro propio P de ν. Llamemos m al orden algebraico de $\tilde{\omega}$ y $\tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ a las partes homogéneas de grado m de $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$. El siguiente resultado es consecuencia directa de la proposición anterior (donde por *integral primera* se entiende integral primera racional homogénea de grado mayor que 0):

COROLARIO 102. *Con las notaciones del párrafo anterior,*

$$In_\nu(\partial) = \tilde{a}_m\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{b}_m\frac{\partial}{\partial v} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} In_\nu(\partial) \textit{ no tiene integral primera} \\ \quad \textit{o bien} \\ P \textit{ es dicrítico para } \omega \end{array}\right.$$

La demostración es directa, pues tal campo homogéneo sólo puede inducir una aplicación en $gr_\nu(A)$ si no tiene integral primera homogénea -en cuyo caso el cociente de autovalores no es racional- o, caso de que la tenga, la integral primera es de grado 0 -que es el caso dicrítico. El problema con las integrales primeras es que *impiden definir una aplicación* en $gr_\nu(A)$, pues la imagen dependería del representante: habría representantes cuya derivada sería 0 y otros cuya derivada no sería nula. Un ejemplo: $\partial = 2x\partial/\partial x - 3y\partial\partial y$. Sea $[u] = [x^3y^2] \in gr_\nu(\mathbb{C}\{x, y\})$. Por un lado, $u = x^3y^2$ es un representante de $[u]$, y es $\partial u = 0$. Por otro, $v = [x^3y^2 + x^{10}]$ también representa a $[u]$, pero $\partial v \neq 0$.

En el caso en que P sea un punto singular de la transformada estricta de ω y ésta tenga orden 1 en P, el resultado anterior se puede explicitar más:

TEOREMA 103. *Sea P un punto singular de la transformada estricta de ω. Supongamos que esta transformada se escribe en coordenadas (u, v) en P de la siguiente forma*

$$\tilde{\omega} = \tilde{b}du - \tilde{a}dv$$

donde el menor de los órdenes de $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ es 1 *(es decir, P es una singularidad* pre-simple*). Entonces el campo homogéneo*

$$\tilde{a}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{b}_1 \frac{\partial}{\partial v}$$

induce una derivación en el álgebra graduada $gr_\nu(A) = \bigoplus_{\gamma\geq 0} \mathcal{O}_\gamma/\mathcal{O}_{\gamma+}$ si y sólo si o bien P es dicrítico o bien el cociente de los autovalores de la forma inicial de $\tilde{\omega}$ no es racional.

Si el punto es simple, la parte inicial de la derivación tiene integral primera si y sólo si el cociente de los autovalores es racional (incluyendo el 0), por lo que se tiene de manera directa el siguiente

TEOREMA 104. *Si P es un punto simple de $\tilde{\omega}$ -la transformada estricta de ω tras una familia de explosiones-, λ, μ son los autovalores de la parte inicial de $\tilde{\omega}$ en P, y ν es la valoración divisorial definida por P -es decir, la que sigue la cadena de puntos infinitamente próximos que pasa por P y termina en él-, entonces, si ∂ es la derivación dual de ω y $\tilde{\partial}$ su transformada estricta en P son equivalentes:*

1 *$\tilde{\partial}$ (y por tanto ∂) induce una derivación en el álgebra graduada $gr_\nu(A) = \bigoplus_{\gamma\geq 0} \mathcal{O}_\gamma/\mathcal{O}_{\gamma+}$.*
2 *El cociente λ/μ no es racional.*

4.1. Las valoraciones de L'Hôpital y el álgebra graduada.

TEOREMA 105. *Sea ν una valoración sobre K y sea $\mathcal{O}_\nu$ su anillo. Sea $[\partial]$ una distribución sin integral primera. Supongamos que ν tiene como cuerpo residual el de las constantes de $[\partial]$. Entonces son equivalentes:*

1. *La valoración ν es de L'Hôpital para $[\partial]$.*
2. *Cualquier representante ∂ de $[\partial]$ que cumpla $\nu(a) \leq \nu(\partial a)$ para todo $a \in \mathcal{O}_\nu$ induce una derivación en el álgebra graduada asociada a la valoración*

$$gr_\nu(A) = \bigoplus_{\gamma\geq 0} \frac{A_\gamma}{A_{\gamma+}}$$

por la aplicación natural de $\mathcal{O}_\nu$ en $gr_\nu(A)$.

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Por el Lema 52, al ser ν de L'Hôpital, se tiene que

$$\nu(a) \geq \nu(b) \neq 0 \Leftrightarrow \nu(\partial a) \geq \nu(\partial b),$$

de donde

$$\nu(a) > \nu(b) \neq 0 \Rightarrow \nu(\partial a) > \nu(\partial b) \text{ y } \nu(a) = \nu(b) \neq 0 \Rightarrow \nu(\partial a) = \nu(\partial b).$$

Tomando un representante adecuado de $[\partial]$, podemos suponer que $\nu(a) > 0 \Rightarrow \nu(\partial a) > 0$ (Lema 1 de [**41**]). Fijemos un isomorfismo

$$\kappa \xrightarrow{\varphi} \frac{A_0}{A_{0+}}.$$

Por las consideraciones anteriores, si $a \in \mathcal{O}_\nu$ es un representante de $[a] \in \frac{A_\gamma}{A_{\gamma+}}$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \frac{A_\gamma}{A_{\gamma+}} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & A_\nu \\ \overline{a} & \mapsto & \overline{\partial a} \end{array}$$

está bien definida[1], pues la imagen de la clase no depende del representante. El hecho de que estas aplicaciones induzcan una derivación en $gr_\nu(A)$ es consecuencia inmediata de que ∂ lo es en $\mathcal{O}_\nu$.

$1 \Leftarrow 2)$ Por reducción al absurdo. Supongamos que ν no es de L'Hôpital. Sea ∂ un representante de $[\partial]$. Otra vez el Lema 1 de [**41**], asegura la existencia de un par de elementos $a, b \in \mathcal{O}_\nu$ tales que $\nu(a) > \nu(b) > 0$ pero $\nu(\partial(a)) < \nu(\partial(b))$[2]. Fijémoslos. Podemos suponer, multiplicando a ∂ por un elemento adecuado de $\mathcal{O}_\nu$ que $\partial(a), \partial(b) \in \mathcal{O}_\nu$. Sean

$$\left\{ \begin{array}{l} f = b \\ g = b + a. \end{array} \right.$$

Estos dos elementos tienen las mismas imágenes en $gr_\nu(A)$ y sin embargo, $\partial(f)$ tiene valoración mayor que $\partial(g)$, así que $\overline{\partial}$ no es ni siquiera una aplicación.

□

[1]En el caso en que $\gamma = 0$ se toma como representante del elemento $[a]$, su imagen $\varphi(a)$ por el isomorfismo anterior.

[2]Esta afirmación no es la negación del enunciado de Rosenlicht, pero es fácil comprobarla tomando ab y b^2 en el caso en que $\nu(a) = \nu(b)$.

CAPíTULO 4

Ecuaciones de grado superior a 1

Este capítulo está dedicado a estudiar soluciones de ecuaciones diferenciales holomorfas de grado superior, utilizando la identificación entre una ecuación de este tipo y la superficie definida por la ecuación en $(\mathbb{C}^3, 0)$ dotada de la restricción de la forma $dy - zdx$. Las definiciones de campo de vectores en una variedad analítica singular que utilizaremos -y todos los resultados previos- se puede encontrar en [**42**].

En [**19**] se estudian las soluciones de ecuaciones diferenciales de grado mayor que uno, aunque en el caso infinitamente diferenciable real. Puede consultarse también [**51**].

1. Definiciones preliminares

Sea V un subespacio analítica de un entorno abierto (un polidisco, por lo general) de $0 \in \mathbb{C}^n$. El haz estructural de V, que llamaremos Ω, es isomorfo a $\mathcal{O}_n/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es el haz de funciones holomorfas nulas en V. Si B es un fibrado, denotaremos $\tilde{B}$ al haz de secciones holomorfas correspondiente. Dado una haz H y un punto P, denotaremos por H_P a la fibra de H en P. Llamaremos T_n al haz de campos tangentes a $\mathbb{C}^n$. Por último, π será el morfismo canónico de $\mathcal{O}$ en Ω.

Definición 106. *Un vector tangente a V en 0 es una derivación en $\mathbb{C}$:*

$$t : \Omega_0 \to \mathbb{C}$$

Llamaremos *espacio tangente a V en* 0 y lo denotaremos S_0, al $\mathbb{C}-$espacio vectorial de vectores tangentes a V en 0, que es isomorfo al $\mathbb{C}-$espacio vectorial de los vectores tangentes a $\mathbb{C}^n$ en 0 que se anulan sobre $\mathcal{I}_0$. Por tanto, S_0 es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial de dimensión finita. De hecho, si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de Ω_0, entonces S_0 es isomorfo a $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Las propiedades fundamentales del espacio tangente son (ver [**42**]):

1. $\dim S_0$ es el mínimo natural k tal que V se sumerge en $\mathbb{C}^k$ de manera biholomorfa con su imagen. Además, $S_0 \simeq T_0^{\dim_{S_0}}$.
2. V es regular en 0 si y sólo si $\dim S_0 = \dim_0 V$.

3. Si V está sumergida en $\mathbb{C}^n$, hay una subvariedad regular $M \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión $\dim S_0$ que pasa por 0 y contiene a V.

Además, se tiene el siguiente resultado [**42**]:

Lema 107. *Sea V un germen de subespacio de $\mathbb{C}^k$ en 0 y V' un germen de subespacio de $\mathbb{C}^{k'}$ en 0. Sean $f : V \to V'$ una aplicación holomorfa y f^* la aplicación inducida entre S_0 y S_0'. Se tiene:*

1. *La aplicación f es biholomorfa en 0 si y sólo si f^* es no singular.*
2. *Si $k = \dim S_0$ y $k' = \dim S_0'$ y f es biholomorfa en 0, entonces cualquier extensión F de f a un entorno U de 0 en $\mathbb{C}^k$ es también biholomorfa en 0.*

Definición 108. *Se llama* dimensión de submersión de V *al número* $\dim S_0$. *Se dice que V está* bien sumergido *en $\mathbb{C}^n$ si $n = \dim S_0$.*

2. Campos de vectores

Definición 109. *Un* campo de vectores holomorfo *en un espacio analítico A es una familia de aplicaciones $v : x \to S_x$ para cada $x \in A$ tal que, si $f \in \mathcal{O}(A)$, entonces $v(f) \in \mathcal{O}(A)$. Llamaremos $\tilde{S}$ al haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos -sobreentendiendo el espacio analítico.*

Teorema 110. *Sea $i : A \to D$ un subespacio cerrado de un dominio de holomorfía $D \subset \mathbb{C}^n$. Si v es un campo de vectores holomorfo en A, entonces hay un campo de vectores t definido en todo D tal que $di(v) = t$ en A.*

Demostración. Fijemos un sistema de coordenadas $(z_1, \dots, z_n)$ en $\mathbb{C}^n$. Para $x_0 \in A$, $di(v) = \sum a^i(x_0)\frac{\partial}{\partial z_i}$, y para $f \in \mathcal{O}^n_{z_0}$, se escribe $di(v)(f) = \sum a^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial z_i}(x_0)$. Por tanto, $a^i(x_0) = v(x_0)(z_i)$. De donde $a^i \in \mathcal{O}(A)$. Sean ahora $\tilde{a^i} \in \mathcal{O}(D)$ extensiones de las a^i a todo D -que existen por el Teorema B de Cartan. El campo en D dado por $t = \sum \tilde{a^i}\frac{\partial}{\partial z_i}$ cumple las condiciones. □

El siguiente resultado se debe a Rossi [**42**]

Teorema 111. *Sea v un campo de vectores en A. Supongamos que $\dim_0 A = k$. Si $v(0) \neq 0$, entonces hay un entorno abierto U de 0 en D -con las notaciones del teorema anterior-, un subespacio analítico V' de dimensión $k-1$ y un abierto W de $\mathbb{C}$ tales que $A \cap U = W \times V'$. Es decir, el espacio inicial es localmente producto de "una recta" por otro espacio.*

El siguiente resultado, probado en [**36**] se denomina en [**35**] "Teorema de Nagano":

TEOREMA 112. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución analítica involutiva sobre un abierto V de $\mathbb{C}^n$. Por cada punto de V pasa una única variedad integral de la distribución $\mathcal{D}$, maximal para la inclusión.*

COROLARIO 113. *Si A admite l campos de vectores linealmente independientes en el origen, entonces A es localmente un producto de una variedad regular de dimensión l por otro espacio analítico.*

El siguiente resultado es bien conocido:

TEOREMA 114. *El haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos en un espacio analítico A es coherente.*

Fijemos un espacio analítico A y sea $\tilde{S}$ el haz de gérmenes de campos de vectores sobre A.

TEOREMA 115. *La fibra S_x en un punto es isomorfa al módulo de derivaciones del anillos locales A_x continuas para la topología $\mathfrak{m}_x-$ádica (donde $\mathfrak{m}_x$ es el ideal maximal de cada anillo local).*

Antes de estudiar la relación entre las foliaciones por curvas definidas en un espacio analítico y los campos de vectores, conviene recordar algunas propiedades de las variedades *normales*.

DEFINICIÓN 116. *Un germen de espacio analítica $\mathcal{X}$ en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^n$ es* normal *si su anillo local es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Si $\mathcal{X}$ es una superficie sumergida en $\mathbb{C}^3$ singular en 0, entonces que sea normal es equivalente a que tenga singularidad aislada en el origen.*

Haremos uso también de la caracterización de las singularidades normales:

LEMA 117. *Si $\mathcal{X}$ es un germen de variedad analítica sumergida en un entorno de 0 en $\mathbb{C}^n$ y que es intersección completa local, son equivalentes:*

1. *La variedad $\mathcal{X}$ es normal.*
2. *El origen es un punto regular de $\mathcal{X}$ o bien el conjunto singular de $\mathcal{X}$ es de codimensión 2 en $\mathcal{X}$ y el anillo local de $\mathcal{X}$ es de Cohen-Macaulay.*

De aquí se deduce que un germen de superficie analítica normal, tiene siempre singularidad aislada.

3. Foliaciones

En [**22**] se da la siguiente

Definición 118. *Una* foliación por curvas *en un espacio analític V de dimensión pura n y regular en codimensión 1, es una foliación por curvas no singular en una variedad analítica $V - W$, donde W es una subvariedad de V de codimensión mayor o igual que 1 y que incluye el lugar singular de V.*

En la misma referencia se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 119. *Sea V un germen de espacio analítico irreducible complejo en un punto p. Supongamos que es no singular en codimensión 1. Sea $\mathcal{F}$ una foliación por curvas en V, no singular en $V - W$ (con la notación anterior). Entonces:*

1. *Existe un germen de campo de vectores X holomorfo en un entorno de $p \in V$ que es tangente a $\mathcal{F}$ en todos los puntos en que X no se anula. Además, este X es único salvo multiplicación por una función meromorfa en p.*
2. *Si V es normal y existe un X tangente a $\mathcal{F}$ cuyo lugar de ceros es de codimensión mayor que 1, entonces cualquier otro campo que satisfaga las mismas condiciones es un múltiplo de X por una función holomorfa no nula.*
3. *Si V es factorial en p (es decir, si su anillo de funciones es un D.F.U.), entonces siempre existe un campo X que cumple 2.*
4. *Existe un número finito $X_1, \ldots, X_p$, de campos de vectores en V tangentes a $\mathcal{F}$ tal que cualquier otro campo X tangente a $\mathcal{F}$ cumple que $(X)_0 \supset (X_1)_0 \cap \cdots \cap (X_p)_0$, donde el subíndice 0 significa "el lugar de anulación de…".*

Dado un germen de superficie analítica (V, p), una *resolución* de V es un morfismo holomorfo propio $\Phi : M \to V$, donde M es una variedad analítica regular, tal que:

a La contraimagen de p por Φ es una unión finita $K_1 \cup \cdots \cup K_m$ de superficies de Riemann regulares y compactas, con cruzamientos normales.
b La restricción de Φ a $M - \Phi^{-1}(p)$ es un biholomorfismo.

Es conocido (ver [**1**]) que todo espacio analíticas tiene una resoluciones. Sea, por tanto, Φ una resolución de un germen de superficie analítica (V, p), se construye el *grafo dual* de Φ del siguiente modo: se añade un vértice por cada componente irreducible K_j de la contraimagen de p por Φ y una arista que une los vértices i y j si y solo si las curvas K_i y K_j se cortan. Un grafo se llama *árbol* si es contráctil.

Proposición: [**4**] *Dada una foliación por curvas en un germen de superficie normal* (V, p) *y dada una resolución* $\Phi : \tilde{V} \to V$*, existe una foliación por curvas con singularidades aisladas en* $\tilde{V}$ *cuyas hojas fuera del divisor excepcional son las contraimágenes por* Φ *de las hojas de* V*.*

Para campos de vectores (foliaciones) en gérmenes de superficies, se tiene el siguiente resultado sobre existencia de separatrices:

Teorema 120. [**4**] *Dado un germen* (V, p) *de hipersuperficie analítica compleja normal que admita una resolución cuyo grafo sea un árbol, y dado un germen de foliación analítica* $\mathcal{F}$ *en* V *singular sólo en* p*, existe una curva analítica en* V*, invariante por* $\mathcal{F}$*.*

Este resultado incluye, claro está, el teorema de la separatriz de [**5**], puesto que la resolución del plano complejo dada por $\Phi =$ Id es vacío y, por tanto, es contráctil.

Los ejemplos más conocidos de superficies normales que admiten una resolución cuyo grafo es un árbol son las superficies con singularidad racional:

Definición 121. *Se dice que una singularidad aislada* p *de una superficie analítica* V *es* racional*, si es normal y existe una resolución* $\Phi : V' \to V$ *tal que*

$$H^1(\Phi^{-1}(p), \mathcal{O}_{V'}) = 0.$$

Más concretamente, las singularidades sándwich son racionales:

Definición 122 ([**47**]). *Una singularidad* p *de una superficie analítica* V *se dice que es de tipo* sándwich *si existen una curva plana* $C \subset \mathbb{C}^2, 0$*, una resolución* $\Phi : M \to (\mathbb{C}^2, 0)$ *de* C*, sumergida, y un subgrafo* Γ *del grafo asociado a* Φ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ (V,p) \arrow[rr, "\rho"'] & & (\mathbb{C}^2, 0) \end{tikzcd}$$

donde η *es la contracción de* M *al colapsar el grafo* Γ *y* ρ *es la contracción de las restantes componentes del divisor excepcional de* Φ*.*

4. Ecuaciones ordinarias de grado superior a 1

En este breve apartado, aplicaremos los resultados de la sección anterior a las ecuaciones ordinarias de grado mayor que uno: este tipo de ecuaciones diferenciales pueden ser entendidas como un campo de vectores en una superficie eventualmente singular.

Fijemos una ecuación diferencial analítica ordinaria, de orden uno pero de grado arbitrario m, finito (suponemos que $f(0,0,0)=0$):

$$(E) \equiv f(x,y,y') = 0.$$

DEFINICIÓN 123. *Una* solución *de* (E) *será una curva* analítica *plana de la forma* $y=y(x)$*, con* $y(0)=0$*, tal que* $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$*. Una* separatriz *de* (E) *será una curva analítica* $x=x(t), y=y(t)$ *tal que* $x(0)=y(0)=0$ *y:*

1. *Si* $x(t)=0$*, entonces, la ecuación*
$$x'^m f(x,y,1/x')$$
tiene como solución $x=0$*.*
2. *Si* $x(t)\neq 0$*, entonces* $f(x(t),y(t),\dot{y}(t)/\dot{x}(t))=0$*.*

Sea ω la forma de contacto $\omega = dx - zdy$. y S el germen de superficie analítica de $(\mathbb{C}^3,0)$ dado por $f(x,y,z)=0$. Llamemos $\overline{\omega}$ la restricción de ω a la zona regular de S. Como S tiene dimensión 2, $\overline{\omega}$ es una $1-$forma integrable en $S-\mathrm{Sing}(S)$ y define, por tanto, una foliación por curvas $\mathcal{F}$, en $S-\mathrm{Sing}(S)$.

Hay dos posibilidades: la foliación $\mathcal{F}$ es no singular en un entorno punteado de $0\in S$, con lo que define una foliación por curvas en toda S (según la definición anterior) o bien el lugar singular de $\mathcal{F}$ en $S-Sing(S)$ es de codimensión 1. En cualquier caso, se tiene el siguiente

TEOREMA 124. *Sea* $f(x,y,y')=0$ *una ecuación diferencial ordinaria, analítica,* de grado finito. *Supongamos que el germen de superficie analítica dado por* $f(x,y,z)=0$ *tiene singularidad aislada y admite una resolución cuyo grafo dual asociado es un árbol. Entonces existe una separatriz de* $f(x,y,y')=0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ la foliación en $S-\mathrm{Sing}(S)$ dada por la restricción de ω a $S-\mathrm{Sing}(S)$. Supongamos primero que el lugar singular de esta foliación es de codimensión 1 en $S-\mathrm{Sing}(S)$. Este lugar singular viene dado por las ecuaciones $(f=0, f_z=0, f_x+zf_y=0)$, que definen una curva analítica en un entorno del origen de $\mathbb{C}^3$, incluida en S. Parametricemos una rama γ de esta curva:

$$\gamma(t) = (x=x(t), y=y(t), z=z(t)).$$

Dejamos para después la prueba de la siguiente:

Afirmación: Si la foliación $\mathcal{F}$ tiene como separatriz en $S-\mathrm{Sing}(S)$ el eje z, entonces tiene también como separatriz al eje y.

Por tanto, siempre que la foliación $\mathcal{F}$ tenga como lugar singular en $S - \mathrm{Sing}(S)$ una curva, hay una curva analítica Γ, incluida en S e invariante para $\mathcal{F}$.

Supongamos, pues, que $\mathcal{F}$ es no singular en $S - \mathrm{Sing}(S)$. Aplicando ahora el teorema de existencia de separatriz para foliaciones en superficies singulares cuyo grafo de resolución es un árbol [**4**], obtenemos una separatriz de la foliación $\mathcal{F}$ en S: es decir, una curva analítica Γ incluida en S y que es invariante por $\mathcal{F}$.

De todo lo dicho se concluye -salvo la prueba de la Afirmación- que existe una curva analítica $\Gamma \subset S$, invariante por $\mathcal{F}$ en todo $S - \mathrm{Sing}(S)$. La demostración termina con la prueba del siguiente

Lema: *Una curva analítica $\Gamma \subset S$ que es una hoja de $\mathcal{F}$ en $S -$ Sing(S) y que no es el eje z, se proyecta a $(\mathbb{C}^2, 0)$ en una separatriz de (E).*

Demostración del lema. Basta observar que la foliación $\mathcal{F}$ puede extenderse, en todo un entorno de $0 \in \mathbb{C}^3$, a una foliación por curvas $\mathcal{F}'$, tal que S es una variedad tangente a $\mathcal{F}'$. Para ello, tómese la foliación por curvas definida en $(\mathbb{C}^3, 0)$ por el campo *holomorfo*

$$X = f_x + zf_y\frac{\partial}{\partial x} + z(f_x + zf_y)\frac{\partial}{\partial y} - f_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Una separatriz de $\mathcal{F}'$ contenida en S y distinta del eje z, es una curva analítica $(x(t), y(t), z(t))$ que es invariante por X. Si $x(0) = 0$, entonces la curva satisface la condición $x'^m f(x, y, 1/x') = 0$. Si no, satisface la otra condición y, en todo caso, obtenemos una separatriz de (E) $\square$

Demostración de la afirmación. Recordamos su enunciado: si el eje z es una variedad de puntos singulares para $\mathcal{F}$, entonces el eje y es una variedad invariante para $\mathcal{F}$ en $S - \mathrm{Sing}(S)$.

Observemos que los puntos singulares de la foliación $\mathcal{F}$ en S vienen dados por las ecuaciones

$$f = 0, f_z = 0, f_x + zf_y = 0.$$

La hipótesis es que estas tres funciones son combinación de (x, y). En concreto $f = \lambda^1 x + \lambda^2 y$. De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} f_z &= x\lambda^1_z + y\lambda^2_z \\ f_y &= x\lambda^1_y + \lambda^2 + y\lambda^2_y \\ f_x &= x\lambda^1_x + \lambda^1 + y\lambda^2_y \end{aligned}$$

de donde

$$f_x + zf_y = (\lambda^1_y + \lambda^1_x)x + z\lambda^2 + \lambda^1 + y(\lambda^2_y + \lambda^2_x),$$

que, como tiene que ser combinación de (x, y), obliga a que $\lambda^1 = z\lambda^2 + h(x, y)$, para cierta función h. Por todo esto, se tiene que

$$f = xh(x, y) + zx\lambda^2 + y\lambda^2.$$

Ahora bien, como estamos suponiendo que (E) es de grado finito, tiene sentido hacer el cambio $z = 1/u$. Obtenemos la misma ecuación diferencial (E), pero "con x en función de y" -la llamamos $(E)'$:

$$(E) \equiv u^m(xh(x, y) + \frac{1}{u}x\lambda^2(x, y, 1/u) + y\lambda^2(x, y, 1/u)).$$

que admite como solución la curva por solución $(x = 0, y = t)$. $\square$

Ejemplos de superficies con singularidad aislada son las racionales y, dentro de éstas, las *sándwich* (ver [**47**]). Es decir:

COROLARIO 125. *Toda ecuación diferencial ordinaria de grado finito en dos variables, en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$, cuya ecuación defina una superficie con singularidad racional admite una separatriz.*

En [**14, 13, 15**], se estudian detalladamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden uno y grado dos, y se demuestran resultados de existencia de soluciones convergentes en determinadas circunstancias. Pensamos que las técnicas desarrolladas en este capítulo son aplicables a -por lo menos algunas de ellas- estas ecuaciones.

CAPíTULO 5

Dimensión mayor que 2

Vamos a hacer un somero estudio de las valoraciones de L'Hôpital en cuerpos correspondientes a variedades de dimensión mayor que 2. Puesto que el objetivo de la memoria es presentar los resultados más importantes, lo cual pensamos haber conseguido en los capítulos anteriores, en el presente nos limitaremos a anillos de funciones holomorfas. La principal aportación de esta parte es la caracterización de las separatrices de campos de vectores analíticos y la definición general de divisor dicrítico, para cualquier dimensión.

En [**8, 11**] se investiga el comportamiento de los campos de vectores singulares en dimensión 3 compleja, pero desde la perspectiva de la reducción de singularidades, sin tener en cuenta de modo esencial la teoría valorativa. Por otro lado, en [**21**] se relacionan las valoraciones con los campos de vectores, desde el punto de vista de las sucesiones de puntos infinitamente próximos y haciendo especial énfasis en los desarrollos de Hamburger-Noether [**6**].

1. Centros dicríticos

Sea $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ el anillo de series de potencias convergentes en un entorno de 0 en $\mathbb{C}^n$ y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal. Llamamos $\mathcal{M}$ a su cuerpo de fracciones (el cuerpo de funciones meromorfas en un entorno del origen). Fijamos una derivación ∂ de $\mathcal{M}$ continua para la topología $\mathfrak{m}-$ádica, que escribiremos

$$\partial = \partial^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \partial^n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

y para la que supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\partial^i \in \mathcal{O}$ y que $\operatorname{mcd}(\partial^1, \dots, \partial^n) = 1$. Sea ν una valoración divisorial

$$\mathcal{M}^\star \xrightarrow{\nu} \Gamma.$$

Que sea divisorial significa que existe una cadena de explosiones $\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_m$ de centros lisos y cada uno de ellos de codimensión mayor o igual que dos,

$$X_m \xrightarrow{\pi_m} X_{m-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = (\mathbb{C}^n, 0)$$

y una subvariedad lisa D del divisor excepcional (a la que llamamos *centro de* ν) tal que si I es el haz de ideales de D, entonces ν es la valoración dada por el orden "según I": es decir, $\nu(f) = k$ si y sólo si $f \in I^k - I^{k+1}$ para cualquier f de $\mathcal{O}$. En coordenadas: sea $(u_1, \dots, u_n)$ una carta afín en la que I está generado por $u_1, \dots, u_p$. Para $f \in \mathcal{O}$, $\nu(f)$ es el orden de f como serie en $u_1, \dots, u_p$ con coeficientes en $\mathbb{C}\{u_{p+1}, \dots, u_n\}$.

Sea ∂ un campo de vectores holomorfo en M, definido en U. En las coordenadas anteriores, se escribe

$$\partial = \partial^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \partial^n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

donde cada ∂^i es una función holomorfa en U. Llamamos *orden de* ∂ en P al mínimo de los órdenes de las ∂^i, que no depende de las coordenadas.

Nota 126. *La subvariedad Z es* degenerada para ∂*, es decir, todos sus puntos son singulares para el campo, si y sólo si, en el sistema de coordenadas anterior, $\partial^i \in (x_1, \dots, x_k)$.*

Definición 127. *Siguiendo con las notaciones anteriores, sea Z una subvariedad analítica lisa degenerada para un campo ∂. El* cono tangente a ∂ en Z*, es la subvariedad analítica de E dada por las ecuaciones (homogéneas)*

$$x_i \Delta_m^j - x_j \Delta_m^i, \ i = 1, \dots, k$$

donde Δ_m^l es el término de orden m del desarrollo Δ^l de ∂^l como series en $(x_1, \dots, x_k)$ y se supone que m es el mínimo tal que algún $\Delta_m^l \neq 0$. Cuando el orden de Δ^l es mayor o igual que m para todos los l entonces el cono tangente a ∂ en Z es el conjunto de puntos singulares en el divisor excepcional del transformado estricto de ∂ por la explosión de centro Z.

Definición 128. *Dada una valoración ν, el* centro de ν *tras una explosión es el anillo local $\mathcal{O}_\nu$ que corresponde a la subvariedad de M de codimensión máxima tal que ν está centrada en $\mathcal{O}_\nu$, (es decir, si $\mathfrak{n}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_\nu$, entonces $\nu(\mathcal{O}) \geq 0$ y $\nu(\mu) > 0$). Los centros que consideraremos serán siempre de codimensión mayor o igual que dos (los centros de codimensión mayor no dan valoraciones centradas en puntos).*

Nota 129. *En este capítulo, siempre que consideremos valoraciones cuyos centros no son puntos cerrados de los respectivos divisores excepcionales, nos restringiremos a abiertos coordenados en los cuales* *tales centros sean subvariedades lisas (de hecho, dadas por los ceros de unas cuantas coordenadas). Estos argumentos no afectan a los resultados, pues todos son de carácter genérico para abiertos de Zariski de variedades algebraicas (los divisores), con lo que basta probarlos para un abierto coordenado de la topología usual, por pequeño que sea.*

Lema 130. *Con las notaciones anteriores, si una valoración ν cuyo centro incluye al origen de coordenadas es de L'Hôpital para ∂, entonces los centros C_i de ν en las sucesivas variedades son degenerados para los transformados estrictos de ∂.*

Demostración. Basta hacerla para el centro de la primera explosión. Sea $Z = (x_1, \dots, x_k)$ el centro de ν en $(\mathbb{C}^n, 0)$ -como hemos indicado, el centro es de codimensión mayor o igual que 2, con lo que $k \geq 2$. Escribimos

$$\partial = \partial_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \partial_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Podemos suponer que $\nu(x_1) = \cdots = \nu(x_k) > 0$. Razonamos por reducción al absurdo. Pueden darse dos situaciones:

$$\begin{cases} \partial_1, \dots, \partial_k \notin (x_1, \dots, x_k) \\ \exists r \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } \partial_r \in (x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

En el segundo caso debe haber un $i \in \{1, \dots r\}$ tal que $\partial_i \notin (x_1, \dots, x_k)$ y por tanto $\nu(\partial_i) = 0$. Entonces

$$\nu\left(\frac{x_r x_i}{x_r} - \frac{\partial(x_r x_i)}{\partial x_r}\right) = \nu\left(\frac{x_r^2 \partial_i}{x_r \partial_r}\right)$$

y la valoración del numerador es la misma que la del denominador, lo que es una contradicción.

En el primer caso se tiene que (recordamos que $k \geq 2$)

$$\begin{cases} \partial_1 = \varphi_1 + \dots \\ \partial_2 = \varphi_2 + \dots \end{cases}$$

donde φ_1, φ_2 son monomios en los que no aparece ninguna de las variables $x_1, \dots, x_k$. Se tiene:

$$\nu\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) = \nu\left(\frac{x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1}{x_2 \partial_2}\right)$$

y los monomios $x_1\varphi_2$ y $x_2\varphi_1$ no se eliminan, con lo cual la valoración del numerador es otra vez la misma que la del denominador, contradicción.

$\square$

El lema previo es la clave para demostrar el teorema de caracterización de los divisores genéricamente transversales a foliaciones por curvas:

TEOREMA 131. *En las condiciones anteriores, la valoración ν es de L'Hôpital si y sólo si el transformado estricto del centro propio de ν es genéricamente transversal a la transformada estricta de la foliación y todos los centros de ν en las sucesivas explosiones son degeneradas para ∂.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Que los centros son degenerados es el lema anterior. Veamos la transversalidad genérica. Sea $Z = (x_1, \dots, x_k)$ el centro propio de ν en unas coordenadas algebraicas sobre $\mathcal{O}$. Como siempre, $k \geq 2$. Dada una función $f \in \mathcal{O}$, el valor $\nu(f)$ es el orden de f como serie de potencias en las variables $x_1, \dots, x_k$ con coeficientes series en el resto de variables. Que el transformado estricto de Z sea transversal genéricamente a la foliación quiere decir primero que el cono tangente de ∂ en Z es vacío: esto es,

$$x_i \partial_j^m - x_j \partial_i^m = 0$$

para $i, j \in \{1, \dots k\}$ (donde m es el orden -en el sentido anterior- de los ∂_j) y segundo, que

$$\nu(\partial_1) = \cdots = \nu(\partial_k) \leq \nu(\partial_j) \text{ para } j = k+1 \dots n.$$

Razonamos por reducción al absurdo. Si el orden de alguna ∂_j (para $j > k$) es menor que m entonces es elemental encontrar un par de $f, g \in \mathcal{O}$ que no cumplen la condición de L'Hôpital. Supongamos, pues, que $x_1 \partial_2^m - x_2 \partial_1^m \neq 0$. Entonces

$$\nu\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right) = \nu\left(\frac{x_1 \partial_2^m - x_2 \partial_1^m + \text{ t.m.o}}{x_2 \partial_2}\right).$$

Por la hipótesis hecha, la valoración del numerador es *exactamente* $m+1$ y coincide con la del denominador. Por tanto, ν no podría ser de L'Hôpital.

$\Leftarrow$) Como el transformado estricto de Z es genéricamente transversal a la foliación, se tiene que

$$x_i \partial_j^m - x_j \partial_i^m = 0$$

para todos los $i, j \in \{1, \dots k\}$, donde m es el menor de los órdenes de los ∂_i para esos i. Veamos que la valoración es de L'Hôpital. Como antes, si el orden de alguna ∂_j, para $j = k+1 \dots n$ es menor que m, entonces el divisor excepcional no es genéricamente transversal. Así pues, todos esos órdenes son mayores o iguales que m. Tomemos $a, b, c \in \mathcal{O}$ tales que $\nu(a) \geq \nu(b) > \nu(c)$. Es

$$\left(\frac{a/c}{b/c} - \frac{\partial(a/c)}{\partial(b/c)}\right) = \frac{c(a\partial b - b\partial a)}{b(c\partial b - b\partial c)}.$$

Estudiemos las valoraciones de numerador y denominador del último término. Para empezar, podemos escribir a, b, c como series de potencias en $x_1, \ldots, x_k$ con coeficientes series de potencias en las demás variables. Siempre que hablemos de orden querremos decir "orden como serie de potencias en las k primeras variables".

Vamos a ver que, dadas $f, g \in \mathcal{O}_n$ (el anillo de series de potencias convergentes en un entorno del origen de $\mathbb{C}^n$), que se escriben como series de potencias en $x_1, \ldots, x_n$ (en la variedad explotada), si el orden de f es distinto del de g, entonces, el orden de $f\partial g - g\partial f$ es *exactamente* la suma de los órdenes de f y g más $m-1$. Para ello podemos suponer que f y g son homogéneos de grados r y s, respectivamente. Tomando el orden lexicográfico en las variables $x_1, \ldots x_n$, hay un monomio $\overline{f}$ de f y otro $\overline{g}$ de g máximos. Escribiendo

$$\begin{cases} \overline{f} = f_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \\ \overline{g} = g_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \end{cases}$$

se tiene que

$$\partial(\overline{f}) = \sum_{l=1}^{k} i_l \partial_l f_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_l^{i_l - 1} \ldots x_n^{i_n} + \text{ t.m.o.}$$

y que

$$\partial(\overline{g}) = \sum_{l=1}^{k} j_l \partial_l g_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_l^{j_l - 1} \ldots x_n^{j_n} + \text{ t.m.o.}$$

de donde

$$\overline{f}\partial g - \overline{g}\partial f =$$

$$= \sum_{p=1}^{k} (i_p - j_p) \partial_p f_{i_1 \ldots i_n} g_{j_1 \ldots j_n} x_1^{i_1 + j_1} \ldots x_p^{i_p + j_p - 1} \ldots x_n^{i_n + j^n} + \text{ t.m.o.}$$

e imponiendo la condición de dicriticidad, queda

$$\overline{f}\partial g - \overline{g}\partial f =$$

$$= (r - s) \sum_{p=1}^{k} \partial_p f_{i_1 \ldots i_n} g_{j_1 \ldots j_n} x_1^{i_1 + j_1 - 1} \ldots x_2^{i_2 + j_2} \ldots x_n^{i_n + j^n} + \text{ t.m.o.}$$

que podemos suponer, sin perder generalidad, que es distinto de 0. Como $(i_1, \ldots i_k)$ y $(j_1, \ldots j_k)$ son máximos para el orden lexicográfico y r y s son distintos, este término no se anula, con lo que su orden es exactamente $r+s+m-1$. En cambio, si $r=s$, el término que hemos escrito (y todos los correspondientes a monomios de f y g de orden m) se anulan, con lo que el orden de $f\partial g - g\partial f$ es, por lo menos, $r+s+m$.

De toda la discusión anterior, se deduce que

$$\nu\left(\frac{c(a\partial b - b\partial a)}{b(b\partial c - c\partial b)}\right) > 0.$$

con lo que se satisface la condición de L'Hôpital. □

Demostración alternativa. Damos a continuación una prueba del enunciado anterior mucho más corta pero que, pensamos, puede ser menos ilustrativa a la hora de entender el significado de la propiedad de L'Hôpital para valoraciones.

Sea $\nu : \mathcal{M}^\star \to \mathbb{Z}$ una valoración divisorial. Sea $\tilde{\mathcal{O}}$ el anillo de un modelo de $\mathcal{M}$ tal que el ideal de ν en $\tilde{\mathcal{O}}$ es principal y sea f un generador de dicho ideal. Para demostrar el resultado, puesto que la noción de valoración de L'Hôpital es invariante por morfismos birracionales, podemos limitarnos a demostrar lo siguiente: la valoración ν es de L'Hôpital si y sólo si $f=0$ es genéricamente transversal a la foliación dada por ∂. O bien, puesto que la transversalidad es una condición genérica: ν es de L'Hôpital si y sólo si hay un punto $P\in(f=0)$ tal que $(f=0)$ es transversal a la foliación dada por ∂ en P. Supongamos primero que ν es de L'Hôpital para cierta derivación ∂, pero que $(f=0)$ no es genéricamente transversal a la foliación inducida por ∂. Como estamos trabajando en el anillo de funciones holomorfas, localizando, podemos suponer que ∂ es la derivación $x'=1, y'=0$ y, puesto que $(f=0)$ ha de ser tangente, podemos tomar $f=y$. Con estas hipótesis, $\nu(y)=1, \nu(x)=0$ y se tiene que

$$\nu\left(\frac{y(x+1)}{y(x-1)} - \frac{(y(x+1))'}{(y(x-1))'}\right) = (\cdots) = \nu\left(\frac{2y^2}{y^2(x-1)}\right) = 0$$

y, por tanto, ν no es de L'Hôpital.

Para el recíproco, por la misma razón que antes, podemos tomar (localmente) $f=x$, $x'=1, y'=0$. Si $\nu(a)=i$ y $\nu(b)=j$, entonces $a=x^i\overline{a}, b=x^j\overline{b}$ donde $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son primos con x. Suponiendo que $i\geq j>0$, es

$$\nu\left(\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}\right) = \nu\left(\frac{(j-i)x^{i+j-1}\overline{a}\overline{b} + x^{i+j}(\cdots)}{jx^{2j-1}\overline{b} + x^{2j}(\cdots)}\right),$$

que es siempre mayor que cero. □

Hacemos notar que, si el orden de ∂_l para algún l mayor que k, es menor que m, el divisor excepcional no es genéricamente transversal a la foliación, sino que es genéricamente no singular e invariante.

2. Valoraciones y soluciones en dimensión arbitraria

Por último, vamos a estudiar la relación entre las soluciones de un campo singular en cualquier dimensión y las valoraciones que son débilmente de L'Hôpital. Partimos, pues de un campo de vectores singular X en un germen de variedad compleja regular M, de dimensión n. Identificamos el campo con una derivación

$$\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\} \xrightarrow{\partial} \mathcal{O}_n$$

continua para la topología $\mu-$ádica, cuyas componentes suponemos, para simplificar, que no tienen factor común. Llamando, como es habitual $\mathcal{M}$ al cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_n$, se tiene:

TEOREMA 132. *Sea ν una valoración de $\mathcal{M}$ que corresponde la sucesión de puntos infinitamente próximos definida por una curva analítica o formal $\gamma(t)$. Son equivalentes:*

1. *La valoración ν es débilmente de L'Hôpital para ∂.*
2. *La curva (eventualmente formal) es una separatriz de X. Es decir, existe un $\lambda \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$ (o en $\mathbb{C}[[t]]$) que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "\gamma^*"] \arrow[d, "\partial"'] & \mathbb{C}\{t\} \arrow[d, "\lambda(t)\frac{d}{dt}"] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "\gamma^*"'] & \mathbb{C}\{t\} \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Si escribimos ∂ en las coordenadas que hemos fijado, dada $f \in \mathcal{O}$, es

$$\partial f = \partial 1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \partial^n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Supongamos ahora que ν es débilmente de L'Hôpital para ∂, pero que no corresponde a una curva invariante. Posponemos la demostración del siguiente hecho:

Afirmación: Tras un número finito de explosiones con centros en los puntos infinitamente próximos marcados por γ, el corte del transformado estricto de γ con el divisor, es un punto regular para el transformado estricto de ∂.

Suponiendo cierto este resultado, sea P el punto regular del transformado estricto de ∂ al que llegamos siguiendo los puntos marcados por γ. Como es regular *y el divisor es invariante*[1], el transformado estricto $\overline{\partial}$ de ∂ es rectificable "paralelamente al divisor excepcional": es decir, si $\overline{x}_n = 0$ es la ecuación del divisor excepcional, entonces

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}^1 \frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}$$

y $\overline{\gamma}$ se puede suponer que tiene el mismo orden de tangencia con $\overline{x}_1$ y con $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$. Así pues, las funciones $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$, toman por ν los mismos valores, que no son 0 y, sin embargo

$$\nu\left(\frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} - \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)}\right) = \cdots = \nu\left(\frac{\overline{x}_2}{\overline{x}_2}\right) = 0.$$

De donde ν no es débilmente de L'Hôpital, contra la hipótesis.

Para probar el recíproco, podemos suponer que $\lambda(t) = 1$, por comodidad. Así pues, dadas $f, g \in \mathcal{M}$, se escribe:

$$\frac{f}{g} - \frac{\partial f}{\partial g} = \frac{(f(\sum g_i \partial^i) - g(\sum f_i \partial^i)}{g(\sum g_i \partial^i}$$

donde, como siempre, los subíndices significan "derivación parcial respecto de la coordenada" $i-$ésima. La condición de separatriz de $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ significa que

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \partial^1(\gamma(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} = \partial^n(\gamma(t)) \end{cases}$$

Para comprobar la propiedad débil de L'Hôpital, suponemos que el contacto de f y g con la curva no es infinito. De aquí se deduce que a ∂f y a ∂g les ocurre lo mismo. Por tanto, la valoración de 2 se calcula "sustituyendo x_i por $\gamma_i(t)$" y calculando el orden. Observemos el resultado de esta operación en uno de los términos del numerador:

$$\sum g_i \partial^i(\gamma(t)) = \sum g_i(\gamma(t))\partial^i(\gamma(t)) \stackrel{2}{=} \sum g_i(\gamma(t))\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t) = \frac{\partial g(\gamma(t))}{\partial t}.$$

Aplicando este razonamiento en todos los términos, se tiene que

$$\nu\left(\frac{f}{g} - \frac{\partial f}{\partial g}\right) = \mathrm{ord}_t\left(\frac{g(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f}{g}\right)(t)}{\frac{\partial}{\partial t}(g(t))}\right)$$

que es mayor que 0 porque es la regla de L'Hôpital en una variable compleja. □

[1] Esto lo podemos suponer aun en el caso dicrítico, haciendo un numero finito más de explosiones.

Demostración de la afirmación. Podemos suponer, tras hacer un número finito de explosiones de punto, que la curva γ es no singular y, que, de hecho, viene dada por las ecuaciones

$$\gamma(t) = (x_1 = t, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0).$$

Con esta escritura, el que no sea separatriz se resume en la existencia de un $i \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $\partial^i(t, 0, \ldots, 0) = \rho_i(t)$, donde $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ es una función analítica no nula. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\rho_2(t)$ tiene orden mínimo, digamos k entre los $i \geq 2$ para los que $\rho_i \neq 0$. Así las cosas, tras *exactamente* k explosiones que siguen los puntos infinitamente próximos marcados por γ, se llega a que

$$\overline{\partial}^2(0, \ldots, 0) \neq 0,$$

pues el orden del segundo coeficiente del campo baja estrictamente al seguir esa cadena de puntos. Pero esto contradice el hecho de que γ sigue puntos infinitamente próximos a 0 *singulares* para ∂. □

Nota 133. *Es natural preguntarse sobre la generalización de los resultados anteriores a valoraciones asociadas a subespacios analíticos que no sean curvas (v. gr. hipersuperficies). Pensamos que esto podría ayudar a entender las propiedades de los campos de vectores singulares en dimensión mayor que dos, que no admiten curvas analíticas solución* [**23**].

APÉNDICE A

Las valoraciones diferenciales de Seidenberg

En el capítulo 0 introdujimos, entre otros conceptos, la relación que muestra Seidenberg en [**46**] entre las derivaciones de un cuerpo y las valoraciones. Aunque no es el objeto de estudio central en la presente memoria, hemos creído oportuno presentar los resultados principales a que hemos llegado, por su relación con las valoraciones de L'Hôpital.

Recordamos el resultado fundamental del citado capítulo, relativo a la dimensión 2:

TEOREMA 134 ([**46**]). *Sea $\mathcal{O} = k[x_1, \dots, x_n]$ un dominio íntegro finito de dimensión 2 sobre un cuerpo k de característica 0 y sea $\mathfrak{m}$ un ideal primo de $\mathcal{O}$. Supongamos que D es una derivación del anillo local $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ (es decir, $D(\mathcal{O}_\mathfrak{m}) \subset \mathcal{O}_\mathfrak{m}$). Entonces existe un anillo de valoración centrado en $\mathfrak{m}$ tal que la (extensión de la) derivación D lo envía en sí mismo. Si, además, D no es singular (esto es, $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$, entonces el anillo de valoración es único.*

La demostración se puede adaptar sin dificultad al caso en que $\mathcal{O}$ es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$ y D es continua para la topología $\mathfrak{m}-$ádica de $\mathcal{O}$. A partir de ahora supondremos que D es continua para esta topología, que $\mathcal{O}$ es el mencionado anillo de gérmenes y que se ha fijado un sistema de coordenadas (x, y) y un isomorfismo $\mathcal{O} \simeq \mathbb{C}\{x, y\}$. Para unificar la notación con el resto de la memoria, la derivación se denotará ∂. Si $\partial x = a, \partial y = b$, supondremos que $mcd(a, b) = 1$ -es decir, que el campo tiene singularidad aislada en el origen-.

Hacemos uso implícito del teorema "de uniformización local" de campos (el paralelo del teorema de reducción de singularidades de Seidenberg, local): cualquier cadena de explosiones con centros en puntos "cae" en singularidades simples o en puntos regulares. Cuando hablemos de valoraciones de cierto tipo, nos estaremos refiriendo a la clasificación del capítulo 2.

El primer resultado se refiere a las valoraciones con infinitos exponentes de Puiseux):

TEOREMA 135. *Ningún anillo de valoración correspondiente a una valoración con infinitos pares de Puiseux es cerrado para ningún campo de vectores analítico X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(P_n)_{n\geq 0}$ la cadena de puntos infinitamente próximos a $(0,0)$ marcada por una valoración ν de tipo 4. Por el teorema de uniformización local, existe un $k \geq 0$ tal que P_k es un punto regular o una singularidad simple. Como ν "posee" infinitos pares de Puiseux, podemos suponer que P_k es un punto regular del divisor excepcional y, por tanto, que es un punto regular para X. Por el teorema de Seidenberg para dimensión 2, sólo hay un anillo de valoración centrado en P_k y cerrado para X y es el correspondiente a la solución de X única de X que pasa por P_k: el divisor excepcional. Puesto que la valoración ν no es la que corresponde a esta componente del divisor (pues ν no corresponde a ninguna curva de ningún modelo), el anillo $\mathcal{O}_\nu$ no puede ser cerrado por X. □

1. El caso no dicrítico

En este apartado vamos a suponer, además, que el campo de vectores dado por $a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$ no es dicrítico, esto es, que sólo posee un número finito de separatrices. Las valoraciones que vamos a estudiar serán, a su vez, no divisoriales.

Como el anillo en el que trabajamos es henseliano, no existen valoraciones del tipo 1.b) -es decir, de contacto con una rama analítica de una curva-, pues toda curva irreducible es analíticamente irreducible.

Utilizaremos el siguiente lema, cuya prueba es una mera comprobación:

LEMA 136. *Supongamos que $X = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$ posee una singularidad simple en $(0,0)$ y supongamos que es*

$$a = X(x) = x^k, \ b = X(y) = \lambda y(1 + f_2)$$

donde f_2 es una serie de potencias convergente en un entorno de $(0,0)$ con $f_2(0,0) = 0$ y donde k es un entero mayor o igual que 1. Sea $u = g/h \in \mathcal{M} = \mathcal{O}_{(0)}$ una función meromorfa. Si escribimos $g = x^i(xg_1 + g_2)$ y $h = x^j(xh_1 + h_2)$ donde g_k y h_k son series convergentes y g_2 y h_2 sólo dependen de la variable y, entonces

$$X(u) = X\left(\frac{g}{h}\right) =$$
$$= \frac{x^{i+j}(yg_2h_{2y}f_2 + yg_2h_{2y} - yh_2g_{2y}f_2 - yh_2g_{2y}) + x^{i+j+1}\eta(x,y)}{h^2}$$

donde $\eta(x,y)$ es una serie de potencias convergente en x, y.

Se tienen el siguiente resultado para valoraciones de curva analítica:

TEOREMA 137. *Sea* $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ *una serie de potencias convergente irreducible. Sea* ν_f *la valoración de tipo 1.a -contacto con* $f = 0$*- correspondiente. Entonces* $\mathcal{O}_{\nu_f}$ *es cerrado para* ∂ *si y sólo si* $f = 0$ *es una separatriz de* $X = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{O}_{\nu_f}$ es cerrado para X. Como se dijo arriba, tras una cadena π de explosiones con centros los puntos infinitamente próximos de $f = 0$, se alcanza un punto $P \in \pi^{-1}(0)$ que es, o bien regular para X o bien una singularidad simple. En el primer caso, por el teorema de Seidenberg, el único anillo de valoración centrado en P y cerrado por X es el que corresponde a la rama del divisor excepcional que pasa por P. Puesto que f es una serie de potencias, la curva $f = 0$ no es dicha rama (es, por el contrario, una rama analítica en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$), así que el anillo $\mathcal{O}_{\nu_f}$ no es cerrado para X, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, podemos centrarnos en una singularidad simple y escribir

$$X(\overline{x}) = \overline{x}^k,\ X(\overline{y}) = \lambda \overline{y}(1 + f_2)$$

donde $f_2 \in \mathcal{O}_P$ es una serie de potencias en $\overline{x}, \overline{y}$ de orden al menos 1. (El caso de las sillas nodos no lo abordamos, pero la demostración sigue exactamente el mismo razonamiento). Un elemento $u \in \mathcal{O}_{\nu_f}$ es un cociente de series

$$u = \frac{g(\overline{x}, \overline{y})}{h(\overline{x}, \overline{y})}$$

donde $\nu_f(g) \geq \nu_f(h)$. Suponiendo que el divisor excepcional en P viene dado por la ecuación $\overline{y} = 0$, sólo hemos de comprobar que el transformado estricto de f, que llamamos $\tilde{f}$, coincide con $\overline{x}$ (que es la otra separatriz de X en P). Supongamos, por el contrario, que $\tilde{f} \neq \overline{x}$. Evidentemente, $\nu_f(\tilde{f}) = (1, r)$ (donde $r < 0$, por lo general). Como $\tilde{f} = 0$ no es una separatriz, necesariamente $\nu_f(X(\tilde{f})) < (1, 0)$. Si $\nu(X(\tilde{f})) < (0, 0)$, obtenemos una contradicción. Supongamos, por tanto, que $\nu_f(X(\tilde{f})) = (0, k)$ con k un entero no negativo. Sea $R \in \mathbb{M}$ tal que $R\nu_f(\overline{x}) > (0, k)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\nu_f\left(X(\left(\frac{f}{x^R + f}\right)\right) &= \nu_f\left(\frac{(x^R + f)X(f) - f(Rx^R + X(f))}{(x^R + f)^2}\right) = \\ &= \nu_f(X(f)) - R\nu_f(x) < 0,\end{aligned}$$

es decir, que $\mathcal{O}_{\nu_f}$ no es cerrado, contra la hipótesis.

Para probar el recíproco podemos, de nuevo, suponer que estamos en una singularidad simple y que el divisor excepcional es $\overline{y}=0$. Tomemos $g,h \in \mathcal{M}=\mathcal{O}_{(0)}$. Escribimos

$$g=\overline{x}^i(\overline{x}g_1+g_2)\ h=\overline{x}^j(\overline{x}h_1+h_2),$$

donde g_2 y h_2 son series de potencias en la variable $\overline{y}$ exclusivamente. por hipótesis, es $i>j$ o bien $i=j$ y $ord_{\overline{y}}(g_2)\geq ord_{\overline{y}}(h_2)$. Al aplicar X a u, se obtiene

$$X(u)=\frac{\overline{x}^{i+j}(\overline{y}g_2h_{2\overline{y}}f_2+\overline{y}g_2h_{2\overline{y}}-\overline{y}h_2g_{2\overline{y}}f_2-\overline{y}h_2g_{2\overline{y}})+\overline{x}^{i+j+1}(\cdots)}{h^2}.$$

Si $i>j$, el numerador tiene automáticamente valor mayor que el denominador. Si $i=j$, como el descenso del orden de g_2 y h_2 al derivar se compensa con el factor $\overline{y}$, ocurre lo mismo. Así pues, el anillo de valoración dado por $\overline{x}=0$ es cerrado para la derivación X. Y este anillo es la imagen de $\mathcal{O}_f$ por el morfismo de explosión. $\square$

Teniendo en cuenta que la misma demostración se aplica para valoraciones de "contacto con un divisor", se obtiene:

Teorema 138. *Sea ν una valoración de contacto con un divisor excepcional y X un campo de vectores no dicrítico. Entonces $\mathcal{O}_\nu$ es cerrado para X.*

Utilizando el lema 136, se demuestra sin dificultad el resultado para valoraciones de tipo "exponente de Puiseux irracional":

Teorema 139. *Supongamos que X tiene una singularidad en el origen y que no es dicrítico. Sea π una cadena finita de explosiones* que sigue singularidades de X *y que termina en una esquina Q. Sea ν una valoración de tipo 3, centrada en Q (y, por tanto, en $(0,0)$). El anillo $\mathcal{O}_\nu$ es cerrado para la derivación X.*

Para terminar, las valoraciones de tipo contacto con una curva formal se comportan como sigue:

Teorema 140. *Una valoración de tipo contacto con una curva estrictamente formal $f=0$ es cerrada para X si y sólo si $f=0$ es una separatriz de X.*

Demostración. El directo se demuestra como el caso no formal -ν debe seguir singularidades de X para que su anillo sea cerrado para la derivación. El recíproco es consecuencia directa del lema 65: si $(t^\alpha,\varphi(t))$ es una parametrización de Puiseux de $f(x,y)=0$, con $ord_t(\varphi(t))>\alpha$, y $u\in\mathcal{M}$, entonces

$$\partial u(t^\alpha,\varphi(t))=\frac{1}{\alpha t^{\alpha-1}}h(t)\frac{d}{dt}(u(t^\alpha,\varphi(t))).$$

de donde, si $\nu(u) = ord_t(u(t^\alpha, \varphi(t))) \geq 0$, el orden en t de $X(t)$ es mayor o igual que cero. $\square$

2. El caso dicrítico

Para tratar los campos de vectores con singularidades dicríticas, enunciamos primero un resultado paralelo al lema 136, pero relativo a la divisibilidad de una serie de potencias respecto de otra:

LEMA 141. *Sea X un campo de vectores analítico en un entorno del origen de $\mathbb{C}^2$ y f una serie de potencias convergente nula en $(0,0)$. Sean $h = f^i\overline{h}$ y $g = f^j\overline{g}$ dos series de potencias factorizadas (es decir, $\overline{h}, \overline{g} \in \mathbb{C}\{x,y\}$). Se tiene que*

$$X\left(\frac{h}{g}\right) = \frac{f^{i+j-1}((i-j)\overline{g}\overline{h}X(f)) + f^{i+j}(\dots)}{g^2}.$$

La primera consecuencia es

PROPOSICIÓN 142. *Un anillo de valoración divisorial dado por $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ irreducible es cerrado para X si y sólo si f es una separatriz de X, es decir, si y sólo si existe $g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ tal que $X(f) = fg$.*

De donde se deduce, finalmente el siguiente resultado, menos interesante que el paralelo con valoraciones de L'Hôpital.

TEOREMA 143. *Un anillo de valoración divisorial centrado en el origen de $\mathbb{C}^2$ (i. e. que corresponde a una componente irreducible del divisor excepcional de una cadena de explosiones en $(0,0)$) es siempre cerrado para X.*

DEMOSTRACIÓN. Si el divisor no corresponde a una componente dicrítica de X, el resultado se deduce del la proposición anterior, pues dicha componente es una separatriz de X en un modelo adecuado de $\mathcal{M}$. Si, por el contrario, corresponde a una componente dicrítica, entonces la ecuación de esta componente *aparece como factor común* de los coeficientes de X cuando se escribe en coordenadas locales en el modelo adecuado. Por tanto, dicha componente es una integral primera de X. $\square$

La imposibilidad de distinguir los divisores dicríticos surge, como se aprecia en la prueba, de que la noción de Seidenberg no es invariante bajo multiplicación del campo. Es decir, depende en cierta manera del campo de vectores y no de la foliación -al contrario de lo que ocurre con las valoraciones de L'Hôpital.

APÉNDICE B

Valoraciones y oscilación

Por último, presentamos brevemente un resultado que relaciona las valoraciones de L'Hôpital con una propiedad de ciertas trayectorias de campos de vectores analíticos: la oscilación. Esta noción fue introducida en [**7**] a propósito de la conjetura del gradiente de René Thom: una trayectoria de un campo gradiente analítico que se acumula en un sólo punto tiene tangente. En dicho trabajo se demuestra que una trayectoria "que sigue" los puntos infinitamente próximos de una rama analítica y que oscila, automáticamente gira -en un sentido preciso- alrededor de tal rama. El recíproco es similar. Aunque el hecho de que una trayectoria siga los puntos infinitamente próximos de una rama es un problema valorativo, no vamos a abordarlo en esta memoria. Sin embargo, sí nos ha parecido interesante presentar la relación entre la oscilación y la existencia de una valoración asociada al "límite en la dirección de una trayectoria".

Necesitamos la definición precisa de oscilación. Sea M una variedad analítica cualquiera y $P \in M$ un punto.

DEFINICIÓN 144 ([**7**]). *Una curva $\gamma : (0,\infty) \to M$ analítica se dice que* oscila en P *si P es un punto $\omega-$límite de γ y existe una función analítica f definida en un entorno de P tal que el conjunto $(f = 0) \cap (\gamma(0,\infty))$ es infinito y $\gamma(0,\infty) \not\subset (f = 0)$.*

El resultado que vamos a probar es el siguiente

TEOREMA 145. *Sea X un campo de vectores analítico en una variedad analítica M de dimensión n. Sea $\mathcal{M}$ el cuerpo de fracciones del anillo de gérmenes de funciones analíticas en M cerca de un punto P. Supongamos que γ es una trayectoria de X cuyo conjunto $\omega-$límite es P. Entonces γ no oscila si y sólo si para cualquier $f \in \mathcal{M}$, existe (es decir, es un número real ó $\pm\infty$) el siguiente límite:*

$$\lim_{t\to\infty} f(\gamma(t)).$$

Si esto ocurre, entonces este límite define un lugar *en $\mathcal{M}$ cuya valoración asociada es débilmente de L'Hôpital para la derivación X.*

Demostración. Probamos primero la equivalencia de las dos afirmaciones y después abordamos la propiedad de L'Hôpital.

Para ver el recíproco tomemos $f \in \mathcal{O}_P$. Por hipótesis, existe $\text{lím}(f(\gamma(t)))$ y es $f(P)$ (pues $\text{lím}_{t\to\infty}(\gamma(t)) = P$). Si $f(\gamma(t))$ tiene ceros acumulándose en $t = \infty$ y γ no está incluida en f, entonces $h(\gamma(t)) = (f(\gamma(t)))' = X(f)(\gamma(t))$ cambia de signo infinitas veces cerca de $t = \infty$ y por tanto, la función $1/h(\gamma(t))$, no tiene límite en $t = \infty$.

Para probar el directo basta comprobar que lím a lo largo de γ es un lugar: es decir, que es aditivo en los objetos cuya imagen es un número real y que ∞ es "absorbente": $\infty + \infty = \infty$, $a\infty = \infty$ para $a \neq 0$. Por las propiedades del límite de funciones de una variable real, basta con que demostremos que existe para toda $f \in \mathcal{M}$. Sea $f = g/h$ una función meromorfa en un entorno de P. Si $h(P) \neq 0$, entonces el límite existe y es igual a $g(0)/h(0)$. Cuando $h(0) = 0$, sabemos que, como γ no oscila, $h(\gamma(t))$ tiene signo constante y es no nula para $t >> 0$. Si $g(0) \neq 0$, entonces el límite existe y es $\pm\infty$. El único caso que resta por estudiar es $g(0) = h(0) = 0$. Si g es la función nula, entonces el límite existe y es 0. Si no, entonces $g(\gamma(t))/h(\gamma(t))$ es una función real de una variable real, de signo constante. Si su derivada tiene signo constante, entonces existe el límite. Pero al ser γ una trayectoria de X, se tiene que

$$\left(\frac{g(\gamma(t))}{h(\gamma(t))}\right)' = \frac{[hX(g)](\gamma(t)) - [gX(h)](\gamma(t))}{h^2(\gamma(t))} = \\ = \frac{[hX(g) - gX(h)](\gamma(t))}{h^2(\gamma(t))},$$

que es el cociente de dos funciones analíticas en P. Por ser γ no oscilante, ambas tienen signo constante y no se anulan para $t >> 0$, lo cual termina la prueba del directo.

En el caso no oscilante, la propiedad débil de L'Hôpital de la valoración asociada al lugar es consecuencia de la propiedad clásica para las funciones analíticas de una variable real. $\square$

Bibliografía

1. J. M. Aroca, H. Hironaka, and J. L. Vicente, *Desingularization theorems*, Memorias Matemáticas del Instituto Jorge Juan, vol. 30, C.S.I.C., Madrid, 1977.
2. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts, 1969.
3. R. Cabrero, *Diferenciales de Kähler separadas y anillos formalmente jacobianos*, 1992, Trabajo de licenciatura.
4. C. Camacho, *Quadratic forms and holomorphic foliations on singular surfaces*, Math. Ann. (1988), no. 282, 177–184.
5. C. Camacho and P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. **115** (1982), 579–595.
6. A. Campillo, *Algebroid curves in positive characteristic*, LNM, no. 813, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
7. F. Cano, R. Moussu, and F. Sanz, *Oscillation, spiralement, tourbillonnement*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), no. 2, 284–318. MR 1 774 707
8. Felipe Cano, *Final forms for a three-dimensional vector field under blowing-up*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 2, 151–193. MR 88j:58105
9. J. Cano, *An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solutions of pfaffian forms*, Ann. de L'Institut Fourier (1993), no. 43, 125–142.
10. ———, *Construction of invariant curves for singular holomorphic vector fields*, Proc. of the AMS **125** (1997), no. 9, 2649–2650.
11. Felipe Cano Torres, *Desingularization strategies for three-dimensional vector fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 90i:32020a
12. M. Carnicer, *The Poincaré Problem in the non-dicritical case*, Ann. of Math. **140** (1994), 289–294.
13. R. Chalkley, *Algebraic differential equations of the first order and the second degree*, Jour. Diff. Eq. **19** (1975), 70–79.
14. ———, *A first-order algebraic differential equation*, Journ. Diff. Eq. **26** (1977), 458–466.
15. ———, *Explicit solutions of an algebraic differential equation*, Jour. Diff. Eq. **35** (1980), 275–290.
16. C. Chevalley, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Mathematical Surveys, vol. VI, AMS, Providence, RI, 1951.
17. V. Cossart, *Desingularization of embedded excellent surfaces*, Tohoku Math. Jour. **33** (1981), no. 1, 25–33.
18. ———, *Uniformisation et désingularisation des surfaces d'après zariski*, Notes for the Scientific Reunion “Mountains and Singularities”, Obergurgl 1997, June 1998.
19. L. Dara, *Singularites generiques des equations differentielles multiformes*, Bol. Soc. Bras. Mat. **6** (1975), 95–128.

20. J. M. Farto, *Estudio de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria por medio del polígono de Newton*, Ph.D. thesis, Univ. de Valladolid, 1994.
21. C. Galindo, *Desarrollos de Hamburger-Noether y equivalencia discreta de valoraciones*, Ph.D. thesis, Univ. de Valladolid, 1991.
22. X. Gómez-Mont, *Foliations by curves in complex analytic spaces. the Lefschetz Centennial Conference. part iii. diff. equations*, vol. 58, Contemp. Math, no. 3, pp. 127–139, Springer-Verlag, New York, 1986.
23. X. Gómez-Mont and I. Luengo, *Germs of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without a separatrix*, Inven. Math. **109** (1992), no. 2, 211–219.
24. R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
25. E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.
26. E. R. Kolchin, *Rational approximation to solutions of algebraic differential equations*, Pro. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 238–244.
27. H. Kurke, G. Pfister, and M. Roczen, *Henselche ringe und algebraische Geometrie*, VEB, Berlin, 1975.
28. J. Liouville, *(?)*, J. Math. Pures Appl **16** (1851), 133–142.
29. B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Inst. of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 3, Oxford University Press, London, 1966.
30. M. Matsuda, *First order algebraic differential equations*, LNM, vol. 804, Springer-Verlag, New York, 1980.
31. H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.
32. ______, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advance Mathematics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
33. J. F. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), no. 4, 469–523.
34. S. D. Morrison, *Continuous derivations*, Jour. Alg. (1987), no. 110, 468–479.
35. C. Moura, *Non-holonomie des systèmes de champs de vecteurs analytiques*, Ph.D. thesis, Univ. Paul-Sabatier, Toulouse, December 1998.
36. T. Nagano, *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), no. 2.
37. M. Nagata, *Local rings*, R. E. Krieger Publ. Comp., New York, 1975, Reprint of the ed. published by Interscience Publ., New York 1962.
38. E. Picard, *Traité d'analyse*, vol. III, Ed. Jaques Gabay. (Facsimil Troisième Ed. Gauthier-Villars), Paris, 1991 (3ème ed. 1928).
39. H. Poincaré, *Sur un théorème de m. Fuchs*, Acta Math. (1885), no. 7, 1–32.
40. J. F. Ritt, *Differential equations from the algebraic standpoint*, AMS Colloquium Publications, vol. 14, AMS, New York, 1932.
41. M. Rosenlicht, *On the explicit solvability of certain transcendental equations*, Inst. Haute Études Sci. Publ. Math. **36** (1969), 15–22.
42. H. Rossi, *Vector fields on analytic spaces*, Ann. of Math. **78** (1963), no. 3, 455–467.
43. C. Rotthaus, *On the approximation theory of excellent rings*, Inv. Math. (1987), no. 88, 39–63.
44. B. Scárdua, *Transversely affine and transversely projective foliations on complex projective spaces*, Ann. S. Ec. Norm. Sup. **4** (1997), no. 30, 169–204.

45. A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation* $ady = bdx$, Amer. J. Math. (1968), 248–269.
46. ______, *Contributions to algebra (eds. Bass, Cassidy, Kovacic)*, ch. Derivations and valuation rings, pp. 343–347, Academic Press, New York, 1977.
47. M. Spivakovsky, *Sandwiched singularities and the Nash resolution problem*, Adv. Studies in Pure Math, Complex Analytic Singularities (Kinokuniya, ed.), Tokio, vol. 8, 1986, pp. 583–598.
48. M. Spivakovsky, *Valuations in function fields of surfaces*, Amer. J. Math. **112** (1990), no. 1, 107–156.
49. ______, *Resolution of singularities*, Preprint Grenoble-Valladolid-Toronro, 1994.
50. B. Teissier, *Valuative sorites*, Preprint LMENS, June 1995.
51. R. Thom, *Sur les équations differentielles multiformes et leurs intégrales singulières*, Colloque E. Cartan (Paris), 1971.
52. M. Vaquié, *Resolution of singularities (H. Hauser et al. eds.*, ch. Valuations, pp. 541–590, Birkhäuser, 2000.
53. O. Zariski, *The reduction of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. **40** (1939), 639–689.
54. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra, vols. I, II*, GTM, Springer-Verlag, New York, 1970.
55. M. A. Zurro, *Series y funciones Gevrey en varias variables*, 1994, Tesis de doctorado.

Índice alfabético