


Apuntes [esbozo] de Ampliación de Cálculo

Pedro Fortuny Ayuso
septiembre-diciembre 2012
fortunypedro@uniovi.es

17 de septiembre de 2012

 Copyright © 2011–2012 Pedro Fortuny Ayuso

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Índice general

Índice general	3
1 Integración en Varias Variables	4
1.1. Introducción	4
1.2. Bases de la integración, el teorema de Fubini	5
1.3. El teorema del cambio de variable	14
1.4. Cambios de variable notables	20
1.5. Simetrías del conjunto, paridad de la función	25
1.6. Medias, momentos, volúmenes...	28
1.7. Problemas y ejemplos	30
2 Campos Vectoriales, curvas, superficies...	31
2.1. Curvas	31
2.2. Superficies	33
2.3. Campos de vectores y su integración	35
2.4. Anexo topológico	38
2.5. El teorema de Stokes	40
2.6. Consecuencias y otras propiedades	42
3 Ecuaciones diferenciales	44
3.1. Introducción por medio de ejemplos	45
3.2. Definiciones y resultados esenciales	57
3.3. Los teoremas fundamentales	60
Bibliografía	63

Capítulo 1

Integración en Varias Variables

1.1. Introducción

La integración en varias variables se puede imaginar de la manera clásica, que es muy visual, pensando que se están calculando “volúmenes” de figuras delimitadas por una función o de otra manera, también clásica, menos visual (puesto que no es “tan obvia”) pero más real desde el punto de vista físico, que es pensar que se están calculando masas de conjuntos a partir de densidades.

En el segundo caso, los enunciados a veces pueden parecer más naturales, especialmente el teorema del cambio de variables, para el que ya no hace falta representarse un volumen en dos sitios distintos, sino pensar en una “deformación de una masa” por contracción y dilatación en todas las direcciones.

De todos modos, la integración en más de una variable está siempre sujeta a dos principios elementales, que son la base de todos los resultados que se manejan (y, de hecho, son los que *dirigen* la teoría: se trata de “poder integrar” en varias variables sabiendo que hay restricciones):

1. Solo conocemos con seguridad el volumen de un paralelepípedo.
2. Solo sabemos calcular primitivas de funciones de una variable (el hecho es que *no hay* primitivas de funciones de varias variables).

Estos dos “principios” o “condicionantes” son los que hacen que tanto el

teorema de Fubini (cómo se integra en un cuadrado y en general en cualquier paralelepípedo) y el teorema del cambio de variable (que, precisamente, permite saber cómo calcular la integral una vez que se “transforma” el dominio de integración en un paralelepípedo o en algo contenido en él) sean relevantes. Quizás el teorema del cambio de variable sea importante también porque permite “simplificar” integrales, pero esto es más cierto en una que en varias variables.

Se explicará la integración en 2 y 3 variables a la vez (en realidad, en \mathbb{R}^n) y los cambios de coordenadas útiles se irán haciendo según convenga. Nos abstendremos de enunciar los resultados en total generalidad, pues al fin y al cabo, el estudiante se va a encontrar siempre con funciones que son continuas salvo en conjuntos de medida cero, por no decir *infinitamente diferenciables*.

Finalmente, vamos a hacer un estudio de la integración *en conjuntos acotados*, es decir, el problema de las integrales impropias no lo vamos a tocar, ni el de los conjuntos medibles pero no acotados.

1.2. Bases de la integración, el teorema de Fubini

Para calcular volúmenes, área, masas, temperaturas medias, etc... *en general*, es imprescindible saber cómo se calcula el caso más particular de todos, el del paralelepípedo (es decir, un cuerpo delimitado por “planos” paralelos). En lugar de hablar de paralelepípedos, utilizaremos el término *cubo*, abusando generosamente de la nomenclatura. Un cubo en \mathbb{R}^n (es casi la única vez que vamos a hablar tan en general) viene dado, por tanto, por una familia de n vectores (que son los vectores de “una esquina”, el resto del cuerpo se calcula repitiendo estos vectores en cada extremo). Para imponer un poco de rigor, se define

Definición 1. Un cubo en \mathbb{R}^n es el producto cartesiano de n intervalos semiabiertos por la derecha:

$$Axs = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

donde se sobreentiende que $b_i > a_i$ (los intervalos tienen los extremos bien colocados).

Así que es natural definir,

Definición 2. El volumen de un cubo $A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ es

$$\text{vol}(C) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

En lo sucesivo vamos a necesitar hablar de conjuntos *irrelevantes*. En teoría de la integración, estos conjuntos son los *de contenido 0* y los *de medida nula*.

Definición 3. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es *de contenido 0* ó *de contenido nulo* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección A_1, \dots, A_n finita de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ y } \sum_{i=1}^n \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Esos conjuntos son *muy pequeños*, pero existe otra familia más interesante y general de conjuntos que también son muy pequeños:

Definición 4. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n se dice *de medida nula* ó *de medida 0* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia *numerable* de cubos tal que

$$C \subset A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } A_i < \varepsilon$$

Como se ve, todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero no al revés (por ejemplo, un conjunto no acotado no tiene contenido cero nunca, pero puede ser de medida cero).

Teorema 1. Si f es una función racional en las coordenadas x_1, \dots, x_n , las funciones $\exp()$, $\log()$ y las trigonométricas, entonces el conjunto $f = 0$ (los ceros de dicha función) es de medida nula.

Esto significa que “cualquier” conjunto definido razonablemente como los ceros de una función es de medida nula (y esto servirá para poder integrar en un conjunto grande salvo en “su borde”).

Integrales en cubos

Trabajamos ahora en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , da igual. Fijemos un cubo $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ (ó $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ si en \mathbb{R}^2). Está claro que si $f(x) = c$ es constante en C , su integral ha de ser (si se pretende que la integral generalice el concepto de *masa*)

Definición 5. La *integral de una función constante en un cubo* C es el producto del valor de la función por el volumen del cubo.

$$\int_P f = c \cdot \text{vol } P = c \text{ vol}(C) = c(b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

que no es más que la idea de “la masa es el volumen por la densidad” trasladada a un modelo matemático concreto.

Ahora bien, si alguna propiedad tiene que cumplir la integral es que la integral en un conjunto ha de dar lo mismo que la suma de las integrales en una partición. En concreto, si el cubo C se puede dividir en cubos C_1, \dots, C_r y f es una función sobre P , ha de ser

$$\int_P f = \int_{C_1} f + \dots + \int_{C_r} f$$

(la masa no cambia si se corta el cuerpo). Esta propiedad es elemental de probar para funciones constantes sobre cubos si la subdivisión se hace en cubos.

Pero para hablar con precisión, necesitamos la definición de *partición*:

Definición 6. Dado un conjunto C , una *partición de C* es una familia finita de conjuntos C_1, \dots, C_n tal que

- Llenan todo el conjunto C :

$$C_1 \cup \dots \cup C_n$$

- No se cortan entre sí: para cualquier par i, j , se tiene que

$$C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Esta definición corresponde exactamente con la idea de “trocear” un conjunto en partes más pequeñas.

La definición de función integrable en general sobre un cubo no puede ser más sencilla, igual que en una variable. Se consideran subdivisiones del cubo en conjuntos cada vez más pequeños, se aproxima en cada uno de esos conjuntos por una constante “superior” e “inferior” y si tomando supremos e ínfimos da lo mismo, la función es integrable. Se supone que P es un cubo:

Definición 7. Sea C un cubo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función de valores no negativos y acotada. Sea $\mathcal{P} = C_1, \dots, C_n$ una partición de C en cubos, y para cada i , sea $f_i = \inf_{x \in C_i}(f(x))$ y $f^i = \sup_{x \in C_i}(f(x))$. Se llaman *suma inferior* y *suma superior* a

$$I_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \text{vol } C_i, \quad S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^n f^i \cdot \text{vol } C_i$$

las sumas de las integrales en cada pequeño cubo. Se dice que f es *integrable en C* si

$$I^-(f) := \sup_{\mathcal{P}}(I_{\mathcal{P}}(f)) = \inf_{\mathcal{P}}(S_{\mathcal{P}}(f)) =: I^+(f)$$

Donde el supremo y el ínfimo se toman en el “conjunto de particiones de P en cubos”. Los nombres I^+ e I^- vienen de “integral superior” (por arriba) e “integral inferior” (por abajo).

Igual, *exactamente igual* que en \mathbb{R} . Lo único que uno ha de utilizar particiones en conjuntos más complicados que segmentos (cubos).

La definición que se acaba de dar es solo para funciones positivas, pero toda función f es diferencia de dos funciones positivas $f = f_+ - f_-$, donde

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0)$$

(esto es un artificio que simplifica las definiciones, nada más, no hay que preocuparse por ello).

Definición 8. Si C es un cubo en \mathbb{R}^n , decimos que una función acotada $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es *integrable* en C si tanto f_+ como f_- son integrables en C . Se define la *integral de f en C* como

$$\int_C f = \int_C f_+ - \int_C f_-$$

(es decir, *el área total es el área por encima del eje menos el área por debajo*, como se diría en una variable). Si estuviéramos calculando temperaturas en una lámina, diríamos que las temperaturas por encima de 0 suman y las por debajo de 0 restan.

En este punto se plantean dos cuestiones:

- ¿Qué pasa si el conjunto de integración no es un cubo?
- ¿Cómo se *calcula* la integral?

La primera pregunta es relativamente fácil de responder, la respuesta a la segunda pregunta se llama *Teorema de Fubini*.

Conjuntos que no son cubos

Todo conjunto *acotado* está incluido en un (y en muchos) cubo. Supongamos que se nos da un conjunto A acotado de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 y una función en A $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Es lógico preguntarse qué significado “formal” puede tener la “integral de f en A ”. Al fin y al cabo, la forma de una lámina no tiene por qué ser rectangular, o podemos tener que saber calcular la masa de una esfera conociendo las densidades, por ejemplo. Lo más sencillo desde el punto de vista teórico es definir las “funciones indicador”.

Definición 9. Dado un conjunto cualquiera A de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 , la *función indicador* (o *función característica*) de A es la función que vale 0 fuera de A y 1 en A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Supongamos ahora un conjunto acotado A y un cubo C que lo incluye. Diremos que A es *medible* si la función indicador χ_A es integrable en C (está claro que esta definición no depende de C). En realidad, esta noción es demasiado teórica para nosotros, pues vamos a trabajar siempre con conjuntos delimitados por ecuaciones algebraicas o a lo sumo analíticas, que son siempre medibles. Ahora la definición de integral en A es sencilla:

Definición 10. Dado un conjunto acotado y medible A y una función acotada $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es *integrable en A* si para cualquier cubo C que incluya a A , la función

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ f(x) & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es integrable. En ese caso, se define

$$\int_A f = \int_C \tilde{f}$$

Esta definición no depende del cubo C que incluya a A . Se define, en concreto, el *volumen* de A como la integral de la función constante 1 sobre A :

$$\text{vol}(A) = \int_A 1. \quad (1.1)$$

Lo que se ha hecho es “desplazar el problema”. Para definir la integral en un conjunto arbitrario, se ha generado una función que solo sirve de herramienta técnica, pero que permite dar una definición coherente con las herramientas que se poseían. Ahora que sabemos *qué es una integral en un conjunto arbitrario* (acotado y medible, eso sí), nos falta saber *cómo se calcula*.

Como mera nota, pues nuestro curso solo tratará conjuntos “más bien regulares”, enunciamos el resultado siguiente:

Teorema 2. *Un conjunto acotado A es medible si y solo si su borde es de medida nula.*

Donde el *borde de A* es el conjunto de puntos para los que cualquier cualquier bola centrada en ellos tiene puntos de A y puntos que no son de A .

Propiedades elementales

Antes de seguir con el teorema de Fubini, conviene enunciar las propiedades más elementales de la integración, que se usan sin explicación ubicuamente. Primero, la linealidad:

Teorema 3. Si f y g son funciones integrables en un conjunto acotado medible A , y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$$

$$\int_A \lambda f = \lambda \int_A f$$

La integración “conserva el orden” (si la gráfica de una función está por encima de otra, entonces la integral de la primera es mayor que la de la segunda): si un cuerpo tiene menor densidad en cada punto que otro de la misma forma, entonces la masa del primero es menor que la del segundo:

Teorema 4. Si f y g son funciones integrables en el conjunto acotado medible A y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$, entonces

$$\int_A g \leq \int_A f$$

Como consecuencia,

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

La integral es *aditiva* respecto del conjunto de integración:

Teorema 5. Si A y B son conjuntos disjuntos medibles (con lo que $A \cup B$ es medible) y $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Finalmente, los conjuntos de contenido cero no cambian el valor de la integral, así que uno puede siempre obviar los conjuntos de contenido cero que aparezcan en sus problemas:

Teorema 6. Si A es un conjunto acotado medible, f es una función integrable en A y $B \subset A$ es un conjunto de contenido cero, entonces

$$\int_A f = \int_{A \setminus B} f$$

o, lo que es lo mismo, si B es un conjunto de contenido cero cualquiera y f es cualquier función integrable,

$$\int_B f = 0$$

Por cierto, la teoría de la integración que estamos presentando es la que hace Spivak en su libro de “Cálculo en Variedades”, muy simplificada para exponerla sin demasiado aparataje. Sus *rectángulos* son nuestros *cubos*. *

Falta hablar de integrales salvo conjuntos nulos...

Cálculo de integrales. El teorema de Fubini

Como dijimos arriba y todo el mundo sabe, las únicas integrales que sabemos calcular de verdad “en general” son las de una variable (pues es el único lugar en que tiene sentido la noción de “primitiva de una función”). El teorema de Fubini es la herramienta que nos permite reducir el problema de cálculo de integrales en dimensiones superiores a dimensión 1.

La imagen mental del teorema de Fubini se corresponde con la idea de *integrar variable a variable*, o dicho de otro modo, *dimensión a dimensión* ^{*}.

Dibujo clásico de Fubini

En general, no integraremos funciones *sobre cubos*, pero tal y como hemos definido la integral de una función sobre un conjunto acotado medible (definición 10), nos es suficiente enunciar el teorema de Fubini en cubos y *trasladarlo* a conjuntos acotados arbitrarios utilizando la función característica.

Lo enunciamos en dos, tres y n variables para tranquilidad del lector.

El teorema de Fubini en dos variables

Teorema 1 (Teorema de Fubini, 2 variables). Sea $P = [a, b] \times [c, d]$ un cubo (rectángulo) en \mathbb{R}^2 , donde las variables son (x, y) y sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $x \in [a, b]$, sea $g_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$g_x(y) = f(x, y).$$

Definimos $I^+(x) = I^+(g_x)$ e $I^-(x) = I^-(g_x)$ (la integral superior e inferior de g_x). Entonces las funciones $I^+(x)$ e $I^-(x)$ son integrables y

$$\int_P f = \int_{[a,b]} I^+(x) = \int_{[a,b]} I^-(x)$$

es decir, la integral existe y es igual a la iteración de las integrales superiores ó inferiores.

El teorema de Fubini es lo que permite que escribamos¹

$$\int_P f = \int_a^b \left(\int_c^d g(x, y) dy \right) dx.$$

¹Aunque *no es esto exactamente* lo que hemos demostrado. La escritura como integral iterada tiene sentido porque las funciones tienen sentido *salvo en un conjunto de contenido cero* y estos son irrelevantes a la hora de integrar. Pero puesto que en este curso las funciones serán todas continuas (y de hecho diferenciables) salvo en conjuntos de contenido cero, abusaremos de ahora en adelante de la notación.

Por la misma regla de tres, se tiene que

$$\int_P f = \int_c^d \left(\int_a^b g(x, y) dx \right) dy$$

Para conjuntos medibles en general, no hay más que, como arriba, considerar un rectángulo suficientemente grande que los incluya y hacer la integral de la función característica por la función inicial. De todos modos, si el conjunto es lo suficientemente cómodo, se pueden escribir las cosas más clásicamente.

Regiones planas “bien” delimitadas

Diremos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$ está “bien delimitado” verticalmente si existe un intervalo $[a, b)$ y funciones $m(x), M(x)$ continuas² tales que el punto (x, y) pertenece a A si y solo si $a \leq x < b$ y $m(x) \leq y < M(x)$. Las funciones $m(x)$ y $M(x)$ se llamarán “borde inferior” y “borde superior” de A^* .

Ejemplo

Diremos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^2$ está “bien delimitado” horizontalmente si pasa lo mismo pero respecto de la segunda coordenada: existe un intervalo $[c, d)$ y funciones $m(y), M(y)$ continuas³ tales que el punto (x, y) pertenece a A si y solo si $c \leq y < d$ y $m(y) \leq x < M(y)$. Las funciones $m(y)$ y $M(y)$ se llamarán, por razones obvias, “borde izquierdo” y “borde derecho” de A^* .

Ejemplo

Está claro que puede haber conjuntos “bien delimitados” vertical y horizontalmente a la vez. Por ejemplo, un disco, un ortoedro... Cualquier conjunto convexo⁴ está bien delimitado horizontal y verticalmente*.

Falta definición

En el libro de referencia, estos conjuntos se llaman “de tipo I” y “de tipo II”, pero prefiero una nomenclatura más castellana.

En estos conjuntos se puede integrar una función poniendo límites de integración variables.

Teorema 7. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado medible tal que $A \subset [a, b) \times [c, d)$. Si A está bien delimitado verticalmente y $m(x)$ y $M(x)$ son sus bordes inferior y superior y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en A , entonces

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{m(x)}^{M(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

²Salvo en un conjunto de contenido cero, pero esto es irrelevante.

³Mismo comentario que antes

⁴Aunque no hemos definido conjunto convexo, claro

Lo análogo ocurre en regiones bien delimitadas horizontalmente, cambiando el orden de integración:

Teorema 8. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible tal que $A \subset [a, b) \times [c, d)$. Si A está bien delimitado horizontalmente y $m(y)$ y $M(y)$ son sus bordes izquierdo y derecho y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en A , entonces

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{m(y)}^{M(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

El teorema de Fubini en tres variables

En \mathbb{R}^3 nos limitamos a dar enunciar el resultado para el orden de integración z, y, x , remarcando que en todas las aplicaciones de este curso *el orden en que se integra es irrelevante*.

Teorema 9. Sea $A \subset [a, b) \times [c, d) \times [e, f)$ un conjunto acotado medible y $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable. Supongamos que existen funciones $m(x), n(x)$ y $u(x, y), v(x, y)$ tales que $(x, y, z) \in A$ si y solo si $a \leq x < b$, $m(x) \leq y < n(x)$ y $u(x, y) \leq z < v(x, y)$. Entonces⁵

$$\int_A g = \int_a^b \left(\int_{m(x)}^{n(x)} \left(\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} g(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Nótese que, aunque lo que “primero se vea” sea dx , lo que primero se integra es la variable z , luego la y y luego la x en el enunciado del teorema.

Un conjunto A que cumpla las condiciones del teorema lo llamaremos *bien delimitado*. Si un conjunto no cumple esas condiciones, lo más probable es que se pueda poner como unión disjunta de conjuntos bien delimitados. Si no se puede, entonces hay que echar cuentas detalladamente.

Ejemplo 1. La esfera, los cubos, los cilindros, los elipsoides, todos ellos están bien delimitados.

El teorema de Fubini en general

El resultado general conocido como Teorema de Fubini no es tan claro de enunciar. Nos limitamos a hacerlo para cubos:

⁵Estamos una vez más abusando de la notación, pero este enunciado es el que utilizaremos.

Teorema 10. Sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable de \mathbb{R}^n definida en un cubo $C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Se tiene que para cada $d = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$, la función $f(d, x)$ es integrable en $[a_n, b_n]$ y además⁶:

$$\int_C f = \int_D \left(\int_{a_n}^{b_n} f(d_1, \dots, d_{n-1}, x_n) dx_n \right),$$

donde D es el cubo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$, que es de dimensión $n - 1$.

1.3. El teorema del cambio de variable

Haber reducido el problema de integración en varias variables a la integración iterada en una variable es mucho, pero no es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. En una variable se puede facilitar la integración con una reparametrización (el método de cambio de variable), hasta el punto de que hay integrales que solo se pueden calcular por este método. En varias variables ocurre exactamente igual. El enunciado del teorema equivalente es bastante más complejo que en una variable, pero el resultado es *moralmente* el mismo, si se entiende bien lo que se hace tanto en una como en varias variables.

Aplicaciones diferenciables 1 – 1

El concepto clave en este contexto es el de aplicación 1 – 1 diferenciable. Para hablar de cambios de variable es necesario también el concepto de *conjunto abierto*, definido supuestamente en la asignatura de Cálculo.

Definición 11. Diremos que una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ entre dos abiertos de \mathbb{R}^n es una *aplicación 1 – 1 diferenciable* si es una biyección (es inyectiva y sobreyectiva) y tiene derivadas parciales en todos los puntos, *salvo quizá en un conjunto de contenido cero*.

Prácticamente todas las aplicaciones que conocemos tienen derivadas parciales en todos los puntos donde están definidas. Además, si una aplicación entre dos abiertos de \mathbb{R}^2 es 1 – 1 y tiene derivadas parciales, entonces su jacobiano solo puede ser nulo en un conjunto de medida nula (esto pasa en \mathbb{R}^3 y en cualquier dimensión, se llama *Teorema de Sard*). Esta propiedad es importante como luego se verá.

⁶Esto significa también que todo la función que aparece a la izquierda en el integrando es también integrable en D pero no se dan los detalles.

Es decir, lo difícil en la definición, a la hora de trabajar, es conseguir que la aplicación sea 1 – 1 (inyectiva y sobreyectiva).

Una manera visual de imaginar una aplicación 1 – 1 diferenciable es pensar el abierto A como un sólido (en el plano, una lámina) y el abierto B como una deformación *suave* de dicho sólido: estirar, doblar, comprimir, pero no romper. El que sea diferenciable *salvo en un conjunto de contenido cero* quiere decir que se permite que la deformación genere *esquinas*, pero “no demasiadas”. En realidad, como el jacobiano es distinto de cero casi siempre, habrá pocas esquinas en todos los casos que nos encontremos.

Esta imagen visual es buena porque nos da incluso una idea del resultado.

Idea

En una variable, el teorema del cambio de variable dice que si $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es diferenciable y $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Supongamos por un momento que g tiene signo constante positivo (es decir, consiste en *estirar* ó *encoger*, pero no cambiar de orientación ni ir hacia atrás).

Entendamos $h(x)$ como una *densidad* sobre una varilla de extremos c y d . La integral de la izquierda es la masa de la varilla (visualmente, se calcula la masa de un “elemento muy pequeño”, calculando densidad por longitud, $h(x)dx$ y se suman todas estas masas, que es lo que hace la operación \int_c^d).

La aplicación g es una transformación que convierte la varilla $[a, b]$ en la $[c, d]$. La imagen mental correcta es que la varilla $[a, b]$ se estira por unos sitios y se encoge por otros. El hecho de que g tenga signo constante solo significa que “no se dobla hacia atrás”. La varilla se estira o se encoge en cada punto según indica la derivada de g (si la derivada es mayor que 1, se “estira”, si es menor que 1, se encoge).

Ahora nos gustaría calcular la masa de la varilla $[a, b]$, que es la misma masa que la de $[c, d]$, pero con otra distribución de densidades, que proviene de esa operación de estirado/encogido.

Tomemos un trozo muy pequeño de la varilla inicial, cerca del punto $x_0 \in [c, d]$. Este pequeño segmento, que tiene longitud dx , tiene masa es $h(x_0) dx$. El punto x_0 corresponderá a uno de la varilla deformada $t_0 \in [a, b]$ (es decir, $g(t_0) = x_0$).

Ahora bien, la longitud *pequeña* dx corresponde a una longitud $g'(t_0)dt$, pues un segmento pequeño se transforma, por una aplicación, en un seg-

mento dilatado tanto como indique la derivada. Por tanto, en el punto t_0 , la masa total que hay acumulada es el producto de “la densidad retrotraída” $h(g(t_0))$ por la longitud equivalente a dx , que es $g'(t_0)dt$ (pues, si se tiene que $x = g(t)$, entonces $dx = g'(t)dt$), así pues, la “masa” en t_0 es $h(g(t_0))g'(t_0) dt$.

Como la unidad diferencial de longitud en $[a, b]$ es dt , resulta que la densidad en t_0 es $h(g(t_0))g'(t_0)$. Si ahora calculamos la masa en la varilla $[a, b]$ según la fórmula “suma de las densidades por longitudes diferenciales”, queda

$$\int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

y como la masa no se crea ni se destruye por una dilatación, ha de ser igual a la masa de la varilla $[c, d]$:

$$\int_c^d h(x) dx = \int_a^b h(g(t))g'(t) dt$$

Cambiamos de dimensión por un momento.

Tomemos una lámina plana, que llamamos L , de tamaño 1×1 , cuya densidad se desconoce. Se le somete a una deformación térmica lineal φ , que la convierte en otra lámina plana pero ya no cuadrada, sino que forma un paralelogramo delimitado por los vectores $B = (x_1, y_1)$ y $D = (x_2, y_2)$, como en la figura 1.1. Por un procedimiento extraño, se puede calcular la densidad de esta nueva lámina y se sabe que es ρ' . ¿Cuál es la densidad original de la lámina unidad, si se sabe que es constante, ρ ? ¿Está claro que la densidad no es la misma? ¿por qué?

No hay más que calcular la masa de la lámina deformada. Un sencillo razonamiento geométrico muestra que, si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$, entonces el área es

$$\text{área} = |x_1y_2 - x_2y_1|. = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

El valor absoluto se toma porque estamos calculando áreas (que no son negativas).

Esto puede parecer misterioso (el determinante es una operación demasiado complicada y sin raíces cuadradas como para que la altura ó el ángulo aparezcan a partir de él), pero es sencillo (y sería bueno que cada uno hiciera el ejercicio) comprobar que es cierto para dimensiones 2 y 3.

Si $D = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, el área del paralelogramo $ABCD$ de la figura 1.1 es el área del paralelogramo $ABC'D'$ menos el área del $A'B'C'D'$ (como se ve, los triángulos con rayado amarillo son iguales). Con argumentos

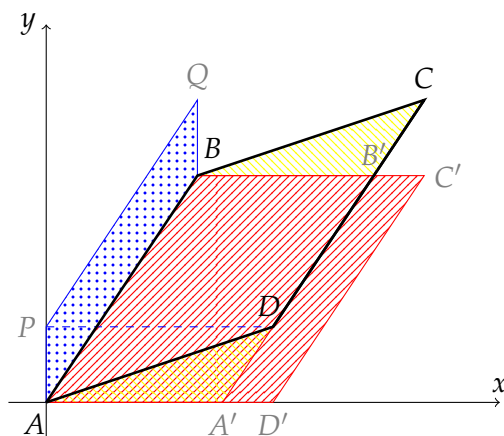


Figura 1.1: Área de un paralelogramo

de semejanza de triángulos (hay muchas líneas paralelas y muchos ángulos iguales en el dibujo) se comprueba que el área de $A'B'C'D'$ es la misma que la de $APQB$, que es (fácil) x_2y_1 . Así que, el área de $ABCD$ es $x_1y_2 - x_2y_1$.

Así pues, la masa de la lámina es

$$M = \rho' |x_1y_2 - x_2y_1| = \int_{L'} \rho \, dx \, dy$$

Esa masa es, claro, la misma que la de la lámina sin deformar:

$$M = \int_L \rho \, du \, dv$$

y, como el cuadrado unidad tiene área 1, resulta que la densidad original ha de ser

$$\rho = \rho' |x_1y_2 - x_2y_1|$$

sustituyendo en la fórmula de la masa, nos queda (nótese el cambio de conjunto de integración y de variables):

$$M = \int_{L'} \rho' \, dx \, dy = \int_L \rho' |x_1y_2 - x_2y_1| \, du \, dv$$

pero la expresión del valor absoluto es

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que tenemos

$$\int_{L'} \rho' dx dy = \int_L \rho' |\det(\text{Jac}(\varphi))| du dv$$

La única diferencia entre esta fórmula y la de dimensión 1 que expresamos arriba es que en dimensión 1 no hace falta el valor absoluto *porque ya incluimos el signo al cambiar los extremos de la integral* (una integral entre x e y es opuesta a una integral entre y y x).

El razonamiento en cualquier dimensión es el mismo. Lo único que hay que saber es que el volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de los vectores que lo forman.

Teorema 11. *Dado un paralelepípedo V delimitado por los vectores v_1, \dots, v_n en \mathbb{R}^n , el volumen de V es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores expresados en la base estándar.*

Si en vez de una aplicación lineal se tiene una deformación cualquiera, $(x, y) = \varphi(u, v)$, lo que se hace es recurrir a la idea de integral como “suma de masas de elementos diferenciales”.

Supongamos que $\varphi : A \rightarrow B$ es una aplicación 1 – 1 diferenciable entre dos abiertos de \mathbb{R}^2 , cuyo jacobiano tiene determinante de signo constante (y se anula como mucho en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable (una *densidad* ó una *densidad de carga*, por ejemplo).

Por pura física, puesto que el cuerpo es el mismo salvo que sometido a un cambio “mecánico”, ni la masa ni la carga total cambian. Así que

$$\int_B h(x, y) dx dy = \int_A \tilde{h}(u, v) du dv$$

donde $\tilde{h}(u, v)$ es la *densidad* ó *densidad de carga* original, en A .

Mirando infinitesimalmente en un punto (u_0, v_0) de A , tenemos una situación análoga a la de la deformación lineal (esa es la definición de la matriz jacobiana, la aplicación lineal que mejor aproxima a la función):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \end{aligned}$$

que significa que “un paralelogramo de dimensiones (du, dv) se transforma en uno de dimensiones $\text{Jac}(\varphi) \cdot (du, dv)$ ”. Por tanto, la *densidad* $\tilde{h}(u, v)$ en un paralelogramo de dimensiones (du, dv) es

$$\tilde{h}(u, v) = h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

con lo que la igualdad de integrales (de *masas o cargas*) queda

$$\int_B h(x, y) \, dx \, dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi))| \, du \, dv$$

que es exactamente la fórmula del teorema de cambio de variable.

Enunciado y ejemplos

El enunciado preciso del teorema de cambio de variable es, dados dos abiertos acotados A y B de \mathbb{R}^n ,

Teorema 12. *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene*

$$\int_B h = \int_A (h \circ \varphi) \cdot |\det(\text{Jac}(\varphi))|$$

Expresado en coordenadas:

Teorema 13. *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación en \mathbb{R}^2 dada en coordenadas por $(x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene*

$$\int_B h(x, y) \, dx \, dy = \int_A h(\varphi(u, v)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v))| \, du \, dv$$

Y en \mathbb{R}^3 (etc.)

Teorema 14. *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ una aplicación en \mathbb{R}^3 dada en coordenadas por $(x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$, que es 1 – 1 diferenciable (salvo en un conjunto de contenido cero) y cuyo determinante jacobiano tiene signo constante (salvo en un conjunto de contenido cero). Sea $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada integrable en B . Entonces $h \circ \varphi$ es integrable en A y se tiene*

$$\int_B h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_A h(\varphi(u, v, w)) |\det(\text{Jac}(\varphi)(u, v, w))| \, du \, dv \, dw$$

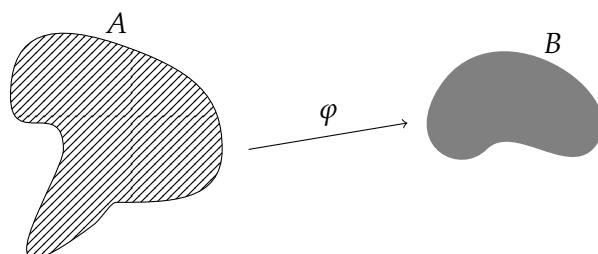


Figura 1.2: Cambio de variables

Atención 1. El teorema del cambio de variable se utiliza siempre para llevar las cosas de B a A . Se supone que en A la expresión de la integral es más sencilla, es conocida, o algo similar. No se ha de pensar que “se lleva la función acotada de A a B ” sino al revés. En caso de duda, un dibujo siempre aclara las cosas.

Este y el teorema de Fubini son los resultados más útiles para calcular integrales definidas en dimensión superior a 1. Lo difícil, en general, es encontrar un cambio de variables que simplifique el problema.

1.4. Cambios de variable notables

Existen cambios que se utilizan con mucha frecuencia, sobre todo por su naturaleza geométrica. En dimensión 2 el más importante es el cambio “a polares”, que se corresponde con la idea de *observar un conjunto desde el origen*, en vez de observarlo “desde los ejes”. La misma idea se puede trasladar a dimensión 3 de dos maneras distintas: una considerando el eje z como una “altura”, de donde se obtiene el cambio a *cilíndricas*, otra considerando el espacio como recubierto por esferas de radios sucesivamente mayores, el cambio a *esféricas*.

Cuando en lugar de considerar circunferencias o esferas se consideran elipses o elipsoides, se obtienen las versiones *generalizadas* de todos esos cambios.

El cambio a polares

Del mismo modo que cualquier punto del plano se puede determinar por un par de coordenadas (x, y) , donde x e y son números reales, cualquier punto se puede determinar por un radio ρ y un ángulo θ , donde el radio es un número real positivo (los radios son distancias) y el ángulo es un número real entre 0 y 2π .

La aplicación está descrita gráficamente en la figura 1.2. Formalmente, es una aplicación φ del rectángulo $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ en el plano \mathbb{R}^2 dada por las ecuaciones

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (1.2)$$

Es claramente 1 – 1 diferenciable entre esos dos conjuntos (y no es sobreyectiva pero la imagen es todo el plano real salvo el semieje positivo de las x , con lo que para calcular integrales en el plano da igual). El jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es (claramente):

$$\det(\text{Jac}(\varphi)) = \rho$$

que, en el dominio en que está definida la aplicación, es siempre positivo, así que no hay por qué tomar su valor absoluto.

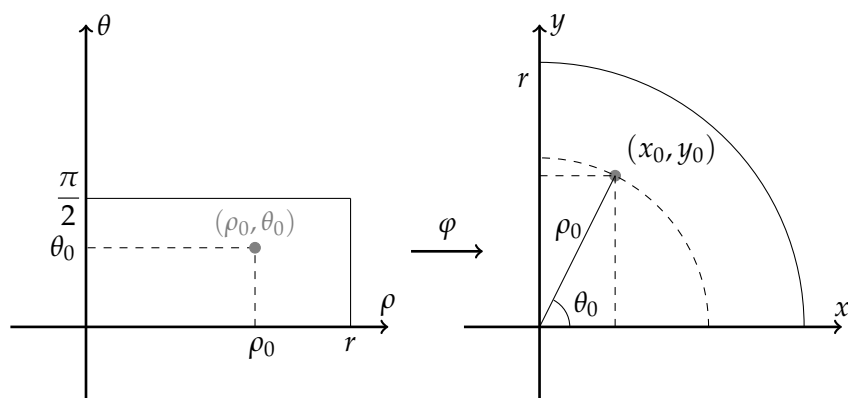


Figura 1.3: Cambio a coordenadas polares

Polares generalizadas

El cambio a polares sin más puede modificarse algo para obtener, en lugar de circunferencias concéntricas, elipses. Basta una homotecia en cada coordenada. Fijados dos números reales positivos a, b , el cambio a coordenadas polares generalizadas de parámetros a y b viene dado por las ecuaciones

$$\varphi(\rho, \theta) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta)$$

y tiene por matriz jacobiana

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\det \text{Jac}(\varphi) = ab\rho.$$

que es no negativo (salvo cuando ρ es 0, que es un conjunto de contenido cero).

Está claro que a es el “radio horizontal” de la elipse y b el “radio vertical”. El dominio de definición es el mismo que el de las polares normales, $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ y el recorrido es, igualmente, todo el plano salvo el semieje horizontal derecho y es una aplicación 1 – 1.

Polares hiperbólicas

Utilizando una hiérbola en lugar de una circunferencia, se obtiene el cambio a coordenadas hiperbólicas (lo que nos permite introducir las funciones hiperbólicas). La figura 1.4 muestra gráficamente la definición de las funciones hiperbólicas *.

y dibujar el cambio?

Como se ve, dada un área θ (que corresponde a la noción de ángulo en el caso del círculo) en la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, se pueden definir dos cantidades, el *coseno hiperbólico* $\cosh \theta$ y el *seno hiperbólico* $\sinh \theta$. Si en lugar de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se utiliza $x^2 - y^2 = \rho^2$, se obtienen $\rho \cosh \theta$ y $\rho \sinh \theta$, respectivamente. Las ecuaciones del cambio de variables son:

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cosh \theta, \rho \sinh \theta).$$

La aplicación envía el semiplano (ρ, θ) (para $\rho \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, \infty)$ en el “aspa” $x^2 - y^2 > 0$. El “aspa” vertical $x^2 - y^2 < 0$ se obtendría con la aplicación

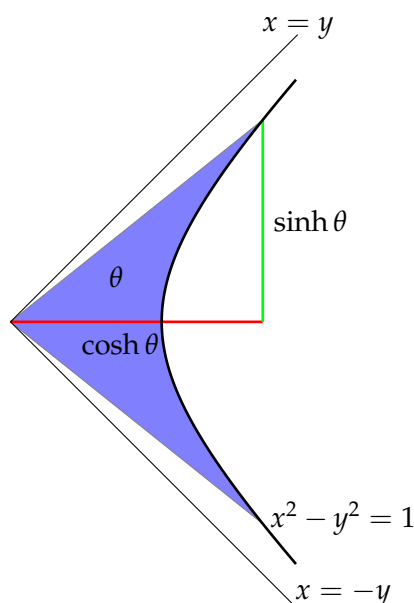


Figura 1.4: Coordenadas hiperbólicas

$(\rho \sinh \theta, \rho \cosh \theta)$. La aplicación es 1 – 1 diferenciable y biyectiva entre dichos conjuntos y su jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \rho \sinh \theta \\ \sinh \theta & \rho \cosh \theta \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es, en el conjunto $\rho > 0$, positivo e igual a ρ .

Homotecia eje a eje

El cambio de variables más simple, tanto en 2 como en 3 variables es una homotecia en cada coordenadas:

$$\varphi(u, v, w) = (au, bv, cw)$$

cuyos matriz jacobiana y jacobiano son:

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad |\text{Jac}(\varphi)| = \rho$$

que tiene como determinante abc . Este cambio puede parecer *tonto*, pero es la base de muchas simplificaciones. Por ejemplo, para calcular el volumen de un tetraedro recto de lados a, b, c .

Coordenadas cilíndricas

La primera versión de las coordenadas polares en dimensión 3 es una “traslación directa” de las coordenadas polares planas, utilizando el tercer eje como “altura” (es decir, dejándolo quieto). Así se obtiene el cambio

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z), \quad |\text{Jac}(\varphi)| = ab\rho \quad (1.3)$$

cuyo jacobiano es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante distinto de cero (en concreto, ρ) en todo el dominio de definición $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ (salvo en un conjunto de medida nula). Es fácil comprobar que es una aplicación 1 – 1 en el dominio y que recubre todo \mathbb{R}^3 salvo un conjunto de medida nula, así que es utilizable como cambio de coordenadas para la integración en cualquier conjunto de \mathbb{R}^3 medible.

Cilíndricas generalizadas

La misma generalización que para las coordenadas polares se puede aplicar en las cilíndricas y se obtiene el cambio

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta, z) \quad (1.4)$$

donde a y b son dos números reales positivos. El determinante del jacobiano es $ab\rho$ y el dominio de definición, etc. el mismo que en las cilíndricas. Este cambio es útil cuando en lugar de un cilindro circular hay que parametrizar uno elipsoidal.

Coordenadas esféricas

La generalización “total” de las coordenadas polares al espacio tridimensional son las llamadas coordenadas *esféricas*. Hay muchas maneras de parametrizar el espacio utilizando el radio y dos ángulos. Aquí escribimos una,

pero (aparte de las obvias rotaciones y giros posibles), hay otras que no son necesariamente equivalentes.

Las coordenadas esféricas envían una “banda” infinita (en un sentido) de anchura 2π y altura π con coordenadas (ρ, θ, ϕ) sobre * todo el espacio \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, z) mediante las ecuaciones

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \quad (1.5)$$

como se ha dicho, los límites de variación de las variables (ρ, θ, ϕ) son

$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi.$$

La matriz jacobiana de esta aplicación es

$$\text{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix}$$

cuyo determinante tiene signo negativo siempre y es

$$|\text{Jac}(\varphi)| = -\rho^2 \sin \phi$$

en el conjunto en que está definido (que es $0 < \rho, 0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \phi < \pi$). Así que para este cambio es preciso tomar el valor absoluto del determinante jacobiano a la hora de hacer el cambio de variables en la integral.

Esféricas generalizadas

Como en los casos anteriores, se puede generalizar el cambio a esféricas utilizando un elipsoide de radios a, b, c :

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \phi) = (a\rho \cos \theta \sin \phi, b\rho \sin \theta \sin \phi, c\rho \cos \phi)$$

que tiene por jacobiano

$$\det(\text{Jac}(\varphi(\rho, \theta, \phi))) = -abc\rho^2 \sin \phi$$

1.5. Simetrías del conjunto, paridad de la función

Hay unas cuantas simplificaciones útiles a veces para calcular integrales que se derivan de las posibles simetrías del conjunto de integración y de la paridad de la función (*de ambas cosas a la vez, no basta con que haya una*). Las enumeramos someramente pero han de tenerse en cuenta, pues puede perfectamente haber funciones “muy difíciles de integrar” cuya integral sea trivial si se dan estos casos.

Dimensión 2

Simetrías respecto de los ejes

En el plano \mathbb{R}^2 , dependiendo de las simetrías del conjunto de integración respecto de los ejes coordenados, puede ocurrir:

Funciones pares Si $f(x, y)$ es par en una de las dos variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la intersección del conjunto Ω con el semiplano positivo correspondiente al eje de simetría.

Funciones impares Si $f(x, y)$ es impar en una de las dos variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del eje correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

Simetría respecto del origen

Por otro lado, si el recinto de integración Ω es simétrico respecto de los dos ejes coordenados y $f(x, y)$ es par en x y en y , entonces

$$\int_{\Omega} f = 4 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la intersección de Ω con cualquiera de los cuadrantes (se suele utilizar el positivo, positivo, por comodidad).

Dimensión 3

Simetrías respecto de planos

Las siguientes propiedades se dan para funciones en \mathbb{R}^3 :

Funciones pares Si la función $f(x, y, z)$ es par en una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 2 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la mitad del recinto que corresponde al semiespacio positivo en esa variable.

Funciones impares Si la función $f(x, y, z)$ es impar en una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto del plano correspondiente, entonces

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

Simetrías respecto del origen

Si una función $f(x, y, z)$ es *par* en cada una de las variables y el recinto de integración Ω es simétrico respecto de todos los planos coordenados, entonces

$$\int_{\Omega} f = 8 \int_{\Omega'} f$$

donde Ω' es la parte del recinto situada en el octante positivo (en cualquiera de los octantes).

Cuerpos de revolución

Si P es un cuerpo de revolución, hay varias posibilidades para calcular su volumen ^{*}.

Dibujos aquí

Como un disco Si el cuerpo se puede expresar como la rotación *alrededor del eje de OX* del área encerrada entre las funciones $g(x)$ y $f(x)$ en el plano (x, y) , entonces

$$vol(P) = \pi \int_a^b |f(x)^2 - g(x)^2| dx$$

suponiendo que $0 \leq g(x) < f(x)$. Si $g(x) = 0$, entonces queda

$$vol(P) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los discos (anillos)” de radio menor $g(x)$ y radio mayor $f(x)$ entre a y b .

Como un cilindro Si el cuerpo es la rotación del mismo área girando alrededor del eje OY , entonces

$$vol(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x) - g(x)| dx,$$

que, si $g(x) = 0$ queda

$$vol(P) = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx.$$

Este cálculo corresponde a la idea de “sumar las áreas de los cilindros verticales” de radio x y altura $|f(x) - g(x)|$, entre a y b , que valen $2\pi x|f(x) - g(x)|$.

1.6. Medias, momentos, volúmenes...

Hay varias cantidades relevantes en problemas físicos y estadísticos que se definen utilizando integrales (porque *son* nociones que se refieren a datos acumulados). Las enumeramos y damos sus definiciones. Comenzamos por una lista de los que son comunes en todas las dimensiones. En todas estas definiciones, se habla del conjunto C , pero se ha de sobreentender que es C *dotado* de la densidad correspondiente.

Media integral Si f es una función integrable en un conjunto C acotado medible de \mathbb{R}^n , se define la *media integral* (o simplemente *media*) de f en C como:

$$m(f) = \frac{1}{\text{vol}(C)} \int_C f \quad (1.6)$$

donde $\text{vol}(C)$ es el volumen de C , como en la página 9.

Masa Cuando f es una función integrable *no negativa* en un conjunto acotado medible $C \subset \mathbb{R}^n$, se puede decir que f es una densidad, en cuyo caso, la *masa de C* es:

$$m(C) = \int_C f. \quad (1.7)$$

Carga total Cuando f es una función integrable en un conjunto acotado medible C , se puede pensar también como una *densidad de carga* (eléctrica) sobre C , en cuyo caso la *carga total* de C es:

$$q(C) = \int_C f. \quad (1.8)$$

La diferencia con el caso anterior es que la densidad de *masa* es siempre positiva (no hay masas negativas), mientras que para la carga, puede tener cualquier signo.

Densidad media Dada f integrable en un conjunto acotado medible C , entendida como una densidad de carga ó de masa, la *densidad media* (de carga ó de masa) es:

$$\frac{m(C)}{\text{vol}(C)} \text{ ó } \frac{q(C)}{\text{vol}(C)} \quad (1.9)$$

donde $\text{vol}(C)$ es el volumen de C , como en la página 9.

Centro de masas Dada una densidad $f(x) \geq 0$ integrable en un conjunto acotado medible $C \subset \mathbb{R}^3$, se define el *centro de masas* de C como el punto (x_0, y_0, z_0) de coordenadas:

$$x_0 = \frac{\int_C xf}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{\int_C yf}{m(C)}, \quad z_0 = \frac{\int_C zf}{m(C)}, \quad (1.10)$$

donde $m(C)$ es la masa de C , como en (1.7). Si el cuerpo fuera plano, se definiría igual, pero con dos coordenadas solamente.

Los momentos se enuncian de manera distinta en dos y tres dimensiones, así que subdividimos la sección en estos dos casos.

Momentos en dimensión 2

Dado un conjunto acotado medible C en \mathbb{R}^2 y una función $f(x)$ no negativa, se definen los *momentos estáticos del cuerpo C con densidad $f(x)$* ⁷ con respecto a los ejes coordenados como

$$M_x = \int_C yf(x, y) dx dy, \quad M_y = \int_C xf(x, y) dx dy. \quad (1.11)$$

Está claro, de las definiciones anteriores que, si (x_0, y_0) es el centro de masas del cuerpo, entonces

$$x_0 = \frac{M_y}{m(C)}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m(C)}$$

donde $m(C)$ es la masa de C .

Momentos en dimensión 3

Dado un conjunto acotado medible C en dimensión 3, y una función $f(x)$ integrable y no negativa en C , se define:

Momentos estáticos los momentos estáticos de C respecto de los planos xy , xz e yz son, respectivamente:

$$M_{xy} = \int_C zf, \quad M_{xz} = \int_C yf, \quad M_{yz} = \int_C xf. \quad (1.12)$$

Momentos de inercia respecto a ejes los momentos de inercia de C respecto de los ejes x , y y z se definen, respectivamente como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)f, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)f, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2)f. \quad (1.13)$$

⁷Se dirá "momento de C ", sobreentendiendo que se le dota a C de la densidad $f(x)$.

Momento de inercia respecto al origen el momento de inercia respecto del origen se define como

$$I_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) f \quad (1.14)$$

Momentos respecto a planos los momentos de inercia respecto de los planos coordenados son, respectivamente

$$I_{xy} = \int_C z^2 f, \quad I_{xz} = \int_C y^2 f, \quad I_{yz} = \int_C x^2 f. \quad (1.15)$$

Áreas y volúmenes

Las integrales que hemos definido nos deben servir, como es obvio, para calcular áreas y volúmenes, también. La integral doble se puede utilizar para calcular áreas de figuras planas (esta es la definición de *volumen* de un conjunto acotado medible), pero también para calcular volúmenes de figuras delimitadas por el grafo de una función definida en un conjunto acotado medible de \mathbb{R}^2 . En concreto

Nota 1. Si C es un conjunto acotado medible de \mathbb{R}^2 y $f(x, y)$ es una función integrable en C , el volumen encerrado entre el plano (x, y) y la gráfica de la función es

$$\int_C f(x, y) dx dy$$

igual que el área encerrada entre el eje OX y la gráfica de una función de una variable $f(x)$.

Para calcular el área de un conjunto acotado medible C de \mathbb{R}^2 , no hay más que (como se definió en la página 9) calcular la integral sobre C de la función constante 1:

$$\text{area}(C) = \int_C dx dy.$$

Para calcular el volumen de un sólido en \mathbb{R}^3 (es decir, de un conjunto acotado medible C), se realiza la misma operación en dimensión 3:

$$\text{vol}(C) = \int_C dx dy dz.$$

1.7. Problemas y ejemplos

Capítulo 2

Campos Vectoriales, curvas, superficies...

En este capítulo se introduce muy sucintamente la teoría de campos de vectores en el plano y en el espacio, con el objetivo de enunciar el Teorema de Stokes (página 41), que es quizá la aplicación más importante, junto con sus consecuencias (el Teorema de Gauss, principalmente). La integración de campos en curvas y superficies es el contexto en el que el teorema de Stokes se encuadra, pero también posee interés en sí misma, como aplicación de las integrales múltiples al cálculo de masas (y, por ende, de longitudes y áreas) y momentos.

En todos los enunciados habrá probablemente imprecisiones teóricas (aunque procuraremos evitarlas), pero ha de tenerse en cuenta que el objetivo del curso es más práctico que teórico y que posiblemente ninguna de esas imprecisiones ocurra en los ejemplos que el alumno pueda encontrarse en el futuro (p.ej. todas las consideraciones podrían hacerse para campos de tipo C^2 , pero vamos a hacerlas para campos C^∞ y vamos a suponer que todas las fronteras de los conjuntos son *mínimamente normales*, es decir, *analíticas a trozos*, por no decir *semialgebraicas*).

2.1. Curvas

Comenzamos con el estudio de las curvas.

Definición 12. Una *curva* en \mathbb{R}^3 (ó \mathbb{R}^2 , pero de aquí en adelante utilizaremos siempre \mathbb{R}^3 e identificaremos \mathbb{R}^2 con el plano $z = 0$) es una aplicación de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Se denota γ , $\gamma(t)$ o bien $(x(t), y(t), z(t))$. Se supondrá de aquí en adelante que las “ecuaciones” de las coordenadas son funciones con derivadas de todos los órdenes.

Una curva tiene asociada una colección de objetos que pasamos a enumerar:

Definición 13. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cuyas ecuaciones vienen dadas por las coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$, se define:

- La *trayectoria* de γ es el conjunto Γ dado por el recorrido de la aplicación γ ; es decir, $\Gamma = \gamma([a, b])$.
- El *vector tangente* a γ en un punto $(x(t), y(t), z(t))$ es $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ donde

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

En general, el vector tangente a una curva se denota siempre $d\bar{s}$ y se puede llamar también *elemento de longitud* de una curva.

- La *velocidad* de una curva γ en un punto $(x(t), y(t), z(t))$ es la norma (longitud) del vector tangente:

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

que es la *longitud recorrida en un tiempo diferencial*, si se supone que t es “el tiempo”.

Vamos a utilizar las siguientes nociones en el futuro:

Definición 14. Una curva γ se dice *simple* si es *inyectiva* (es decir, si no pasa dos veces por el mismo punto).

Definición 15. Una curva γ es *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$, es decir si el punto inicial y el final coinciden. Una curva cerrada también se puede denominar *ciclo*.

Definición 16. Una curva γ se dice que es *cerrada simple* si es una curva cerrada y γ es inyectiva en $[a, b)$.

Con estos conceptos se puede ya comenzar a hacer algunos cálculos interesantes. Supongamos que $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que toma valores en la trayectoria de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La *integral de línea* corresponde a la idea de integrar a lo largo de la trayectoria de γ , no solo de intervalos en \mathbb{R} :

Definición 17. La *integral de línea* de f a lo largo de γ se define como la integral en $[a, b]$ de la función “retrotraída” al intervalo ponderada por la velocidad:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) ds = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

Si γ es una curva cerrada (un ciclo), se suele denotar la integral de línea como

$$\oint_{\gamma} f$$

Como es obvio, la integral de línea de una función constante corresponde a la idea de *masa* de la curva suponiendo que la densidad lineal es dicha constante. Como la masa es la curva coincide con su longitud si la densidad es uno, se puede definir

Definición 18. La *longitud* de una curva es la integral de línea de la función constante 1 sobre la curva:

$$\text{long}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Y, por otro lado

Definición 19. Dada una función $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *masa* de la curva γ (o, equivalentemente de Γ) de densidad f como la integral de f a lo largo de γ :

$$\text{masa}(\gamma) = \int_{\gamma} f ds,$$

que no es más que la “suma de todas las densidades por unidad de longitud”.

2.2. Superficies

La noción de superficie se corresponde con la de aplicación de un *abierto* de \mathbb{R}^2 en el espacio.

Definición 20. Una superficie es una aplicación $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$ a \mathbb{R}^3 cuyas ecuaciones

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

son diferenciables un número infinito de veces. El recorrido de la superficie (es decir, el conjunto $T(D)$ imagen del abierto D en \mathbb{R}^3 , la *superficie* "en sí") se denotará $|T|$ o bien con la letra S .

Igual que las curvas, las superficies tienen asociado un vector, que en este caso es *normal* (no tangente):

Definición 21. Dada una superficie $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, el *vector normal* a T en cada punto $T(u, v)$ es el vector

$$d\bar{S} = \bar{T}_u \times \bar{T}_v \, du \, dv$$

donde \bar{T}_u y \bar{T}_v son, respectivamente, el "vector tangente en la dirección u " y el "vector tangente en la dirección v ":

$$\bar{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \bar{T}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

y \times representa el producto vectorial.

Así que el vector normal, en coordenadas, se escribe en cada punto $T(u, v)$ como

$$d\bar{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Su norma (es decir, la raíz cuadrada de su módulo al cuadrado) se denota siempre dS .

Con este concepto se puede ya definir la integral de una función sobre una superficie:

Definición 22. Dada una superficie $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de recorrido S y una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *integral de superficie* de f sobre T (o sobre S) como la integral de f "retrotraída a D " según T :

$$\begin{aligned} \iint_S f &= \int_D f(T(u, v)) \, dS = \\ &= \int_D f(T(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

donde la última integral es una integral doble en D .

Si $f(x, y, z)$ se entiende como una *densidad*, entonces la definición que acabamos de dar es

Definición 23. La *masa* de la superficie S con densidad f es la integral de superficie de f en S .

Y, puesto que el área coincide con la masa cuando la densidad es 1:

Definición 24. El *área* de S es la integral de superficie de la función 1 en S :

$$\text{area}(S) = \iint_S dS = \int_D \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

A veces, al vector normal $\|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\|$ se le denota por \bar{n} .

2.3. Campos de vectores y su integración

Comenzamos el estudio sistemático de los *campos de vectores*, para lo cual primero los definimos

Definición 25. Un *campo de vectores* en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos a asumir en todo momento que los campos de vectores tienen coordenadas diferenciables un número arbitrario de veces salvo quizá en un subconjunto *pequeño*.

Ha de entenderse un campo de vectores como una *flecha* que, por lo general, indicará una *fuerza* ó una *velocidad* en cada punto del espacio (la fuerza ejercida por el campo gravitatorio sobre una unidad de masa o la velocidad de una partícula que se mueve en un lugar del espacio. . .). El que las coordenadas de la aplicación \bar{F} sean diferenciables no es más que un requerimiento técnico para facilitar todo el estudio (si no fuera así, la técnica sería mucho más compleja).

El primer concepto *integral* relativo a un campo es el de *integral* a lo largo de una trayectoria, que puede entenderse (es quizá la noción más natural) como el *trabajo* ejercido por un campo \bar{F} al moverse una partícula siguiendo una curva. Dado un campo \bar{F} en \mathbb{R}^3 (lo mismo vale para \mathbb{R}^2) y una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, si escribimos el campo $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$, se define

Definición 26. La *integral de línea* de \bar{F} a lo largo de γ es la integral en $[a, b]$ del producto escalar de \bar{F} con el vector velocidad:

$$\int_{\gamma} \bar{F} = \int_a^b \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

(recuérdese que $d\vec{s}$ denota el vector velocidad de γ) que, en coordenadas se escribe (en \mathbb{R}^3):

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b F_1 dx + \int_a^b F_2 dy + \int_a^b F_3 dz$$

que, a su vez, no es más que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt + \\ &+ \int_a^b F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt + \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt \end{aligned}$$

Como se ve, si la curva γ es perpendicular a \vec{F} en todos los puntos, el campo no realiza ningún trabajo, mientras que si γ tiene la misma dirección que \vec{F} , el trabajo es máximo ó mínimo, dependiendo del sentido. Nótese que es el trabajo realizado por el campo. Finalmente, es un buen ejercicio comprobar que el trabajo realizado no depende de la velocidad: si $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra parametrización simple de la misma curva Γ , y $d\tilde{s}$ es su elemento de velocidad, entonces

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} d\tilde{s} = \int_{\gamma} \vec{F} ds$$

suponiendo que γ también era simple (este resultado no es más que un cambio de variable).

Ejemplo 2. Si \vec{F} es el campo de velocidades de un fluido y γ es un ciclo (una curva cerrada), se denomina *circulación* de \vec{F} a la integral

$$\oint_{\gamma} \vec{F} ds$$

Ejemplo 3. La intersección de una esfera con un cilindro de radio mitad y que pasa por el centro de la esfera se denomina *bóveda de Viviani* *.

La bóveda de Viviani

La otra noción clave es la que relaciona un campo de vectores con una superficie: el *flujo*. Supongamos que \vec{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 y S es una superficie (es decir, S es la imagen de $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde D es un abierto de \mathbb{R}^2). Entonces

Definición 27. El *flujo* de \vec{F} en S es la integral del producto escalar de \vec{F} por el vector normal \vec{n} a S :

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iint_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_D \vec{F} \cdot \|T_u \times T_v\| du dv$$

Si el campo tiene la misma dirección que el vector normal, el flujo es *positivo*, mientras que si tiene dirección opuesta, el flujo es *negativo*. Este es uno de los lugares en que la *orientación* del vector normal es importante.

El operador Nabla

Por lo general, los campos de vectores que se encuentran en Física no son cualesquiera, y los problemas de campos de vectores relacionan unos con otros. Existe un "operador" que se utiliza mucho (aunque no sea más que un artificio de notación) para construir campos a partir de otros campos o de funciones escalares, el *operador Nabla* (con la notación i, j, k para los vectores coordenados):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Definición 28. Supongamos que f es una función en \mathbb{R}^3 y que \vec{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 . Se definen:

- El *gradiente* de f es el campo de vectores dado por

$$\nabla f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- El *rotacional* del campo \vec{F} es el producto vectorial de ∇ por \vec{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

- Y, finalmente, la *divergencia* de un campo de vectores \vec{F} es un campo escalar (es decir, una función), producto escalar del operador nabla con \vec{F} :

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Cada uno de los campos definidos arriba representa, hasta cierto punto, un concepto físico:

El gradiente indica la dirección (e intensidad) de la máxima pendiente de las superficies de nivel de una función. La dirección del gradiente es normal (perpendicular) a dichas superficies de nivel.

El rotacional indica la *tendencia* al giro de un campo de vectores cuando este se interpreta como la velocidad en cada punto de un fluido. Si en un punto se ubicara una esfera “muy pequeña”, esta giraría (o no) según la forma del campo de vectores. El eje de giro viene indicado por el rotacional y la velocidad angular es la mitad del módulo.

La divergencia indica la *tendencia a expandirse o comprimirse* de un campo de vectores, cuando este se interpreta como un campo de velocidades de un fluido. Cuanto más positiva es la divergencia, más tiende el fluido a “expandirse” (salir) del punto, cuanto más negativa, más tiende el fluido a “comprimirse” (entrar) en el punto. Otra manera de visualizarlo es como el cambio (con el signo opuesto) de densidad (si un fluido se comprime, la densidad aumenta, si un fluido se expande, la densidad disminuye). Los fluidos incompresibles se mueven según trayectorias sin divergencia.

Un campo de vectores cuyo rotacional es cero se denomina *irrotacional* y uno cuya divergencia es cero se denomina *incompresible* ó *solenoidal*.

Hay dos igualdades fundamentales:

Teorema 2. *Los campos gradientes no giran y los campos rotacionales son incompresibles:*

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0\end{aligned}$$

2.4. Anexo topológico

Antes de continuar necesitamos algunas nociones muy básicas de *topología*, solo para poder enunciar los resultados con precisión, sin pretender que estos conceptos sean importantes, pues al final el alumno siempre va a trabajar con conjuntos “bien delimitados”, o por conjuntos delimitados por curvas muy sencillas. En cualquier caso, pensamos que el esfuerzo por entender estos conceptos merece la pena.

Quizás la noción más importante de todas es la de *conjunto abierto*, que corresponde a la idea intuitiva de conjunto cuyos puntos están “bien contenidos”:

Definición 29. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *abierto* si cualquier punto $x \in A$ tiene una “bola” alrededor totalmente contenida en A . Es decir, si para cualquier $x \in A$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

está contenido en A :

$$B_\varepsilon(x) \subset A.$$

Es fácil comprender un poco mejor la noción de conjunto abierto si se tiene en cuenta lo siguiente:

Nota 2. Cualquier conjunto definido por *desigualdades estrictas* de funciones continuas es un abierto.

Ejemplo 4. Por tanto, los siguientes conjuntos son abiertos:

- Los semiespacios $ax + by + cz + d > 0$, para cualesquiera a, b, c y d .
- Los “cubos” abiertos: $(a, b) \times (c, d) \times (e, f)$.
- Las esferas: $B_r(x)$ definidas como arriba.

Además, se tiene que

Teorema 3. *Cualquier unión de abiertos es un abierto y las intersecciones finitas de abiertos son abiertas.*

La segunda noción importante es la de *frontera*: los puntos que están “cerca” de un conjunto y de su complementario.

Definición 30. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la *frontera* de A , denotada ∂A es el conjunto de puntos tales que cualquier bola centrada en ellos contiene a un punto de A y uno que no es de A (del complementario de A , que se denota A^c).

Por lo general, si A es un abierto definido por una desigualdad, la frontera de A se corresponde con el conjunto definido por “la igualdad”:

Ejemplo 5. Se tiene:

- La frontera de una bola es la esfera “externa”: si A es la bola $B_\varepsilon(x)$, entonces $\partial A = S_\varepsilon(x)$, donde

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| = \varepsilon\}.$$

- La frontera de un semiespacio es un plano: si A es el semiespacio $ax + by + cz + d > 0$, entonces ∂A es el plano $ax + by + cz + d = 0$.

Aunque la siguiente noción se suele utilizar en otros contextos, pensamos que es óptima para enunciar con precisión los teoremas siguientes.

Definición 31. Diremos que un abierto A está *bien contenido* en otro abierto B si B incluye a A y a la frontera de A . Es decir, si cualquier punto “muy cercano” a A está en B . Si A está bien contenido en B , se escribirá $A \sqsubset B$.

La noción anterior es útil para lo siguiente, que no es más que la definición correcta de “función diferenciable en un abierto y en su frontera”:

Definición 32. Sea A un abierto de \mathbb{R}^n . Diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable un número k de veces con continuidad está *definida fuertemente en A* si existen un abierto B tal que $A \sqsubset B$ y una función $\tilde{f} : B \rightarrow \mathbb{R}$ de un abierto B a \mathbb{R} que es diferenciable un número k de veces con continuidad, que coincide con f en A .

Un campo de vectores $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ está *definido fuertemente en A* si cada componente F_i lo está. Lo mismo una aplicación $T : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Finalmente,

Definición 33. Un *dominio de Stokes* es un abierto A de \mathbb{R}^2 tal que su frontera ∂A es una *unión finita* de curvas cerradas simples.

2.5. El teorema de Stokes

Todas las definiciones y propiedades anteriores se orientan al que posiblemente sea el resultado más profundo de todo este curso, el Teorema de Stokes, que relaciona el flujo del rotacional de un campo de vectores a través de una superficie con el trabajo realizado por el campo en el borde de la superficie. Comenzamos por un lema algo más simple: el Teorema de Green, pero previamente necesitamos hablar algo de *bordes* de superficies, aunque lo haremos solo en el contexto en que trabajaremos siempre.

A partir de ahora, si D es un dominio de Stokes y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una de las curvas del borde, diremos que γ *está bien orientada* si D queda a la izquierda del vector tangente a γ . Si no se especifica lo contrario, cada vez que se tome una curva del borde de un dominio de Stokes, se supondrá que *está bien orientada*. En cualquier caso, si C es la imagen de γ , se denotará C^+ a la curva *bien orientada* y C^- a la curva orientada negativamente.

Enunciamos el resultado primero que se conoció, aunque es el menos informativo:

Teorema 15 (de Green). *Sea D un dominio de Stokes cuyo borde se supone que es la imagen de una sola curva cerrada simple (llamémoslo C al borde). Sean P y Q dos funciones de \mathbb{R}^2 diferenciables. Entonces*

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

(Nótese que la primera integral es sobre una curva y la segunda sobre un dominio entero, i.e. una superficie).

En realidad, este resultado no es más que una sencilla consecuencia del siguiente, que es el realmente importante para superficies:

Teorema 16 (de Stokes). *Sea D un dominio de Stokes y C_1, \dots, C_n las curvas cerradas que determinan su borde. Sea $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie definida fuertemente en D tal que su borde es la imagen de $C_1 \cup \dots \cup C_n$ por una extensión de T . Supongamos que \bar{F} es un campo de vectores en \mathbb{R}^3 . Entonces*

$$\iint_S \nabla \times \bar{F} \, d\bar{S} = \int_{\partial S} \bar{F} \, d\bar{s}$$

donde S es la superficie definida por T y $d\bar{s}$ denota el elemento de longitud en cada componente del borde de S , ∂S .

En definitiva, para conocer el flujo de un rotacional, basta calcular el trabajo del campo original en el borde.

Para volúmenes, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 17 (de Gauss o de la Divergencia). *Supongamos que Ω es un abierto de \mathbb{R}^3 y que $\partial\Omega$ es una superficie orientada que es unión finita de las imágenes de superficies $T_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sea \bar{F} un campo vectorial infinitamente diferenciable fuertemente definido en Ω . Entonces*

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \bar{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \bar{F} \, d\bar{S}$$

o dicho de otra forma,

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \bar{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial\Omega} \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS$$

donde \bar{n} es el vector normal a $\partial\Omega$.

Lo que quiere decir la igualdad anterior es que para calcular la “divergencia total” de un campo en un volumen, basta calcular el flujo del campo por el borde (la cantidad total de entrada y salida de un campo en un volumen se sabe en el borde y es precisamente el flujo).

La *orientación* que se toma para la superficie respecto del volumen es la que deja el vector normal “hacia el exterior” del volumen.

2.6. Consecuencias y otras propiedades

Quizás la consecuencia física más clara del Teorema de Stokes es la propiedad de los gradientes de ser conservativos.

Definición 34. Un campo de vectores \bar{F} , fuertemente definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice *conservativo* si el trabajo realizado por el campo no depende de la trayectoria. Es decir, si γ_1 y γ_2 son dos curvas que unen los puntos P y Q , entonces

$$\int_{\gamma_1} \bar{F} d\bar{s}_1 = \int_{\gamma_2} \bar{F} d\bar{s}_2$$

donde $d\bar{s}_1$ y $d\bar{s}_2$ son los elementos de longitud (vectores tangentes ó velocidades) correspondientes a γ_1 y γ_2 respectivamente.

Es sencillo probar que si A es un abierto tal que dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante una curva, entonces

Teorema 18. Si $\bar{F} = \nabla f$ es el gradiente de f en A , entonces \bar{F} es conservativo.

Pero no solo ocurre esto, sino también que

Teorema 19. Supongamos que \bar{F} está fuertemente definido en un abierto conexo $A \subset \mathbb{R}^n$ y es conservativo. Entonces existe una función (que se denomina potencial) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{F} = \nabla f$.

Ahora bien, la propiedad “irrotacional” de los campos de vectores gradientes es *casi* suficiente, pero no del todo. . .

Ejemplo 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el “tubo” $1 < x^2 + y^2 < 2$ y sea \bar{F} el campo de vectores fuertemente definido en S por las ecuaciones

$$\bar{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Este campo tiene rotacional 0 pero *no es conservativo* (y por tanto no es el gradiente de una función), pues la integral en cualquier camino cerrado que “rodee” al borde interior es 2π .

El problema del ejemplo anterior es que el tubo es un conjunto abierto que *no es simplemente conexo*: hay curvas cerradas simples que no se pueden “deformar” dentro del conjunto hasta convertirlos en un punto.

El caso es que eso no ocurre en \mathbb{R}^3 cuando se le quitan unos pocos puntos:

Teorema 20. Si \bar{F} es un campo de vectores definido en \mathbb{R}^3 salvo quizá en un número finito de puntos, entonces son equivalentes:

- \bar{F} es conservativo.
- Para cualquier curva cerrada simple γ , se tiene

$$\oint_{\gamma} \bar{F} = 0$$

- Existe una función f definida en \mathbb{R}^3 salvo quizá un número finito de puntos tal que $\bar{F} = \nabla f$.
- \bar{F} es irrotacional: $\text{rot } \bar{F} = 0$.

Este resultado *no es cierto en \mathbb{R}^2* , pues si al plano se le quita una cantidad finita de puntos, resulta un conjunto que *no es simplemente conexo* (hay curvas cerradas simples que no se pueden contraer a “puntos”). El resultado para el plano es el siguiente

Teorema 21. *Sea \bar{F} un campo vectorial definido en \mathbb{R}^2 salvo en un número finito de puntos. Entonces*

1. *Para cualquier curva γ cerrada simple se tiene*

$$\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{s} = 0$$

si y solo si el campo es conservativo.

2. *Si se tiene la igualdad anterior para cualquier curva cerrada simple, entonces \bar{F} es el gradiente de alguna función f , es decir $\bar{F} = \nabla f$ definida en todo \mathbb{R}^2 menos quizás en los puntos en que \bar{F} no lo está.*

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales

La Ingeniería es, primariamente, la aplicación de la Física a los procesos (sobre todo a los de producción y construcción). La Física es la *ciencia de lo sujeto a cambio* (esto incluye la Estática, pues en esta se estudia lo sujeto a cambio cuando no cambia).

La formalización del cambio en el nivel infinitesimal, como se estudia en el Cálculo, se basa en el concepto de *derivada*: una de las interpretaciones naturales de la derivada $f'(x)$ es justamente la *razón de variación* de la función f con respecto a la variable en el punto x (es decir, la comparación como cociente del incremento de la función f cerca del punto x y el incremento “infinitesimal” de la variable x), por eso se escribe también

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

para indicar precisamente el cociente (“la razón”) de los incrementos.

La Física, en general, no se dedica a calcular valores de cosas sino a problemas más generales (o más interesantes), que pueden expresarse como una pregunta del tipo “¿cómo se *comporta* algo en determinadas circunstancias?” Es decir, la Física busca describir un “comportamiento”, la relación entre varios parámetros a lo largo de un periodo o en toda una parte del espacio. Para resolver este tipo de problemas, se ha de tener en cuenta que:

- El *comportamiento* de algo (digamos f) respecto de otra cosa (digamos x) se mide con la gráfica de f respecto de x .

- Las relaciones que da la Física, por lo general, entre cantidades, vienen descritas por derivadas (primeras, segundas o más allá).

Es decir, los problemas que plantea la Física son problemas en los que se busca conocer los valores que toma una cantidad dependiendo de otra. El ejemplo más simple es el tiro parabólico: ¿cuál es la trayectoria de un objeto lanzado en la superficie de la tierra? Se busca conocer la posición de una piedra (esto sería f) en función del tiempo (esto sería x). La relación es...

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\vec{g}$$

donde g es la aceleración gravitatoria. Está claro que f es en realidad una colección de coordenadas x, y, z que dependen del tiempo $x(t), y(t), z(t)$ y $\vec{g} = (0, 0, -g)$ (la gravedad solo afecta a la coordenada *vertical*). Si expresamos estas ecuaciones por separado (escribiendo \ddot{v} en lugar de la derivada segunda, como hacen los físicos), queda

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$\ddot{y}(t) = 0$$

$$\ddot{z}(t) = -g$$

que, en castellano, significa: la piedra no está sujeta a ninguna aceleración salvo la de la gravedad, que actúa en vertical exclusivamente. Es muy sencillo describir el movimiento a partir de estas ecuaciones, pero no es el lugar.

Por experiencia uno sabe que la trayectoria de una piedra está determinada con dos datos: el lugar desde el que se lanza y el momento inicial (o la velocidad inicial, son equivalentes): para que una piedra “vuele” hay que lanzarla... Esta obviedad se llama “condición inicial” (si no se lanza, no vuela).

3.1. Introducción por medio de ejemplos

La única manera razonable de motivar el estudio de las ecuaciones diferenciales es introducir algunos ejemplos para mostrar que, de hecho, son la manera precisa de expresar los problemas físicos.

Ejemplo 7 (Enfriamiento de una taza). Newton postuló (tras realizar experimentos sucesivos, *se supone*) que la manera de enfriarse un objeto en contacto con el medio ambiente se puede describir así: si A es la temperatura ambiente (que puede considerarse constante) y T es la temperatura del cuerpo (digamos temperatura “media”), entonces en cada instante, T disminuye de

manera directamente proporcional a la diferencia $T - A$. Lo que se quiere conocer es $T(t)$, la temperatura en cada instante, así que la ley que Newton enunció es:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - A), \quad (3.1)$$

donde k es una constante positiva que depende del cuerpo en cuestión.

Esta ecuación diferencial se puede resolver como sigue: llamemos $y(t) = T(t) - A$. Es obvio que $y'(t) = T'(t)$, así que la ecuación queda

$$y'(t) = -ky(t),$$

si suponemos que $y(t) \neq 0$ (es decir, el cuerpo no está a la misma temperatura que el ambiente, en cuyo caso no hay transferencia de calor), podemos llevar $y(t)$ al denominador del primer miembro y queda

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -k$$

pero el primer miembro es la derivada de $\log(y(t))$, así que se tiene que

$$(\log(y(t)))' = -k$$

de donde (integrando ambos miembros)

$$\log(y(t)) = -kt + c$$

donde c es una constante arbitraria así que $y(t) = e^{-kt}e^c$: una función exponencial. En este momento se ha de deshacer el cambio $y(t) = T(t) - A$ y queda

$$T(t) = A + e^{-kt}e^c.$$

Téngase en cuenta que $k > 0$ (porque suponemos que el cuerpo está más caliente que el medio ambiente).

La descripción $T(t) = A + e^{-kt}e^c$ es correcta pero... ¿qué es c ? Es la constante que se ha de calcular una vez se conoce la *condición inicial*: la temperatura a la que está el cuerpo *al principio*. Cuando $t = 0$, el cuerpo tendrá una cierta temperatura T_0 . Entonces $T_0 = A + e^c$, así que $c = \log(T_0 - A)$ (véase cómo T_0 tiene que ser mayor que A para que esto tenga sentido): dada una condición inicial (la temperatura del cuerpo), solo hay una manera de que se enfríe y viene dada por una relación exponencial negativa.

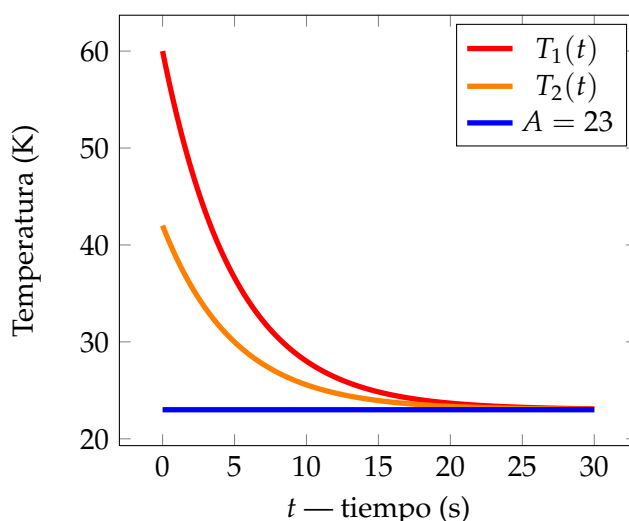


Figura 3.1: Dos ejemplos de enfriamiento (para el mismo cuerpo): temperatura ambiente (constante, en rojo): 23° , $k = 0.2$. La temperatura inicial es de $60K$ para la gráfica roja y $42K$ para la naranja. Téngase en cuenta que, en realidad, las tres gráficas nunca se cortan.

Ejemplo 8 (Desintegración radiactiva). Cada elemento de la Tabla Periódica posee una propiedad intrínseca relacionada con su estructura atómica: la velocidad a la que el núcleo se desintegra dando lugar a átomos de menor peso. Esta propiedad se resume en el dato “periodo de semidesintegración”, que es el tiempo necesario para que una masa M de cierto elemento se haya transformado en una masa $M/2$ de ese mismo elemento y otros elementos. Aunque la desintegración radiactiva es un proceso aleatorio (de naturaleza cuántica), de manera estadística puede comprobarse que *la velocidad a la que una masa M se desintegra es inversamente proporcional a M* . Como se ve, se relaciona el cambio temporal de masa con la propia masa. Así que M es en realidad una función del tiempo $M(t)$ y la ley de desintegración puede escribirse

$$\dot{M}(t) = -kM(t) \tag{3.2}$$

donde k es una constante positiva (de manera que el signo negativo indica que la masa *disminuye*, claro está).

El lector puede comprobar que esta ecuación es de la misma naturaleza que la (3.1), del enfriamiento de Newton (es la misma sin la temperatura ambiente). La solución de esta ecuación es aun más sencilla utilizando también

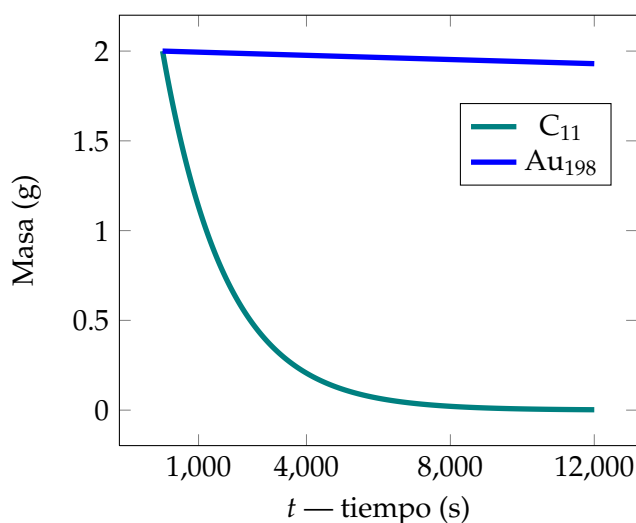


Figura 3.2: Dos ejemplos de desintegración radioactiva (bastante rápida). El C_{11} tiene periodo de semidesintegración de 1200s mientras que el Au_{198} lo tiene de 2.696 días.

la derivada logarítmica y queda

$$M(t) = e^c e^{-kt},$$

donde e^c designa la masa inicial. Se puede escribir, por tanto,

$$M(t) = M(0)e^{-kt}.$$

Queda claro que k es la constante de desintegración, que puede calcularse a partir del periodo de semidesintegración¹. Es obvio que en lugar de utilizar la masa, puede utilizarse el número de átomos: la gráfica solo variará en escala. Es obvio que, para conocer el desarrollo temporal de una masa de un elemento, hace falta (aparte del dato específico del periodo de semidesintegración), conocer *la masa inicial*. Si no hay masa inicial, no hay “evolución temporal de la masa”: para tener una gráfica temporal hace falta especificar una condición inicial (en este caso, cuánta masa hay al inicio).

Ejemplo 9 (Caída libre sin rozamiento). Es este un ejemplo que está al alcance de la mano de todos y que motivó gran parte de las investigaciones de

¹Sería interesante que el alumno realizara este sencillo cálculo.

Galileo: describir el movimiento de un cuerpo al caer desde una altura h . En esta primera aproximación se supondrá que el aire no afecta al movimiento en cuestión. Galileo descubrió experimentalmente que el espacio recorrido varía con el cuadrado del tiempo (es este uno de los descubrimientos más importantes de la historia). Sin embargo, en estos apuntes haremos la aproximación teórica, desde la Física de Newton.

La Segunda Ley de Newton asevera que la aceleración de un cuerpo está en proporción directa a la fuerza a la que está sujeto. Por otro lado, la Ley de la Gravitación Universal dice, en el caso de la Tierra y un cuerpo cercano a ella, que la fuerza atractiva que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es (aproximadamente) directamente proporcional a la masa del cuerpo y se sabe que la constante de proporcionalidad es (aprox.) $-9.8m/s^2$. Es decir,

$$F = ma, F = -9.8m$$

donde a indica la aceleración y m la masa. El signo negativo es porque suponemos que la coordenada y "crece" hacia arriba. Igualando ambas fuerzas y, suponiendo que el movimiento es exclusivamente en vertical (llamemos a la altura en cada instante t , $y(t)$), se obtiene

$$\ddot{y}(t) = -9.8,$$

que es una ecuación (se busca calcular $y(t)$) en la que la función incógnita aparece derivada (dos veces, en este caso).

Lo primero que se puede hacer es, en lugar de tratar de calcular $y(t)$, plantear un problema indirecto más sencillo. Llámese $v(t)$ a la velocidad $v(t) = \dot{y}(t)$. La ecuación anterior es obviamente equivalente a

$$\dot{v}(t) = -9.8,$$

que es resoluble de manera obvia, $v(t) = -9.8t + K$. Como se ve, hace falta dar una constante K que *determine de manera unívoca la evolución de la velocidad*. Por ejemplo, si se conoce la velocidad inicial $v(0)$, entonces $K = v(0)$. Es decir: *la velocidad de una partícula en movimiento vertical es la velocidad inicial más una constante por el tiempo*.

Ahora que se conoce la velocidad en función del tiempo, se puede escribir la ecuación de partida como

$$\dot{y}(t) = v(t) = -9.8t + v(0),$$

que es igualmente sencilla de resolver: $y(t) = -4.9t^2 + v(0)t + L$, donde L es otra constante. Si se conoce $y(0)$ (la altura inicial), entonces $L = y(0)$.

Es decir, si $y(t)$ es la altura a que está la partícula, $y(0)$ es la altura inicial y $v(0)$ es la velocidad inicial, entonces $y(t)$ viene descrita por $4.9t^2 + v(0)t + y(0)$, o lo que es lo mismo, $y(t) = 4.9t^2 + \dot{y}(0)t + y(0)$.

Nótese que la ecuación original era de segundo orden (derivada segunda) y han hecho falta dos constantes (la posición inicial y la velocidad inicial) para determinar de manera única la solución. Esto es general, como se verá.

Ejemplo 10 (Caída libre con rozamiento). El modelo del ejemplo anterior es irreal y poco preciso salvo para caídas de cuerpos densos desde poca altura y sin demasiado viento (“en el vacío una pluma y una piedra caen a la misma velocidad” es un adagio bien conocido pero que no refleja la realidad no vacía). Para dar un modelo más preciso, hace falta tener en cuenta el rozamiento del aire. Hay varias maneras de aproximar este efecto. En estos apuntes se utilizará la siguiente: la fuerza de rozamiento ejercida por el aire sobre un cuerpo se supondrá directamente proporcional a la velocidad del cuerpo. La constante de proporcionalidad dependerá, se supone, por ejemplo, de la masa del cuerpo, de su forma (no es lo mismo una plancha de acero que una bala), pero será constante a lo largo del movimiento.

Para simplificar el problema, supondremos que el cuerpo *ya está cayendo* (es decir, la velocidad inicial es negativa).

La Segunda Ley de Newton, por tanto, estipula que el producto masa por aceleración $m\ddot{y}(t)$ es igual a la suma de las fuerzas, la gravedad $-mg$, que va en el mismo sentido que la aceleración y , en este caso, la del rozamiento, que va en sentido contrario al movimiento, $r\dot{y}(t)$, donde r es un positivo y constante. Así pues,

$$m\ddot{y}(t) = -mg - r\dot{y}(t). \quad (3.3)$$

Téngase en cuenta que, como $\dot{y}(t)$ es negativo (el cuerpo cae), el signo de la fuerza de rozamiento ha de ser positivo (en contra del movimiento).

Como antes, es preferible estudiar el comportamiento de las velocidades. Si $v(t) = \dot{y}(t)$, entonces la ecuación (3.3) queda

$$m\dot{v}(t) = -mg - rv(t),$$

que es la misma ecuación del enfriamiento (3.1) pero con el signo cambiado. Llamando $K = r/m$, se obtiene

$$\dot{v}(t) = -g - Kv(t)$$

(recuérdese que se supone que $v(t) < 0$). Así pues, operando igual que para el ejemplo del enfriamiento, se tiene

$$\frac{\dot{v}(t) + g}{v(t)} = -K$$

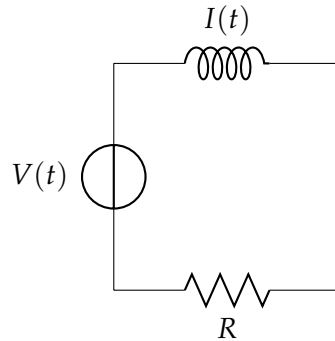


Figura 3.3: Ejemplo de circuito simple con una inductancia.

por lo que $(\log(v(t) + g))' = -K$, de donde

$$\log(v(t) + g) = -Kt + U$$

(donde U es la constante de integración) y, finalmente,

$$v(t) = e^{-Kt}e^{U} - g.$$

Si $v(0)$ es la velocidad inicial, entonces $U = \log(v(0) + g)$. Así que, $v(t) = (v(0) + g)e^{-Kt} - g$.

extraño: Courant	comparar	con
---------------------	----------	-----

Ejemplo 11 (Inductancias). Los circuitos eléctricos elementales (con solo resistencias) son muy sencillos de “resolver”. Los problemas aparecen cuando entre los componentes hay inductancias o condensadores (en general, cualquier componente que esté relacionado con un campo magnético, por las leyes de Maxwell). En la figura 11 se puede ver un circuito simple compuesto por una fuente de potencia (de voltaje), una bobina (inductancia) y una resistencia (estos circuitos se denominan RL por las letras utilizadas para designar la resistencia y la impedancia. Es conocido que la relación entre diferencia de potencial e intensidad en una resistencia (ley de Ohm) es $V_R = I_R R$. En este circuito, la diferencia de potencial se tomará como “variable en el tiempo” (corriente alterna), así que la fórmula será para cada instante $V_R(t) = R I_R(t)$ —suponemos una resistencia constante. Por otro lado, las leyes de Maxwell (en resumen, el hecho de que una corriente en una bobina *modifique* un campo magnético) describen la “inercia” que tiene una bobina —lo que cuesta generar corriente a lo largo de ella— como sigue:

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} \tag{3.4}$$

donde L es la impedancia de la bobina (relacionada directamente con su número de espiras). Por tanto, la diferencia de potencial total (la generada por la fuente) es (ley del voltaje de Kirchoff)

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) = RI_R(t) + L \frac{dI_L(t)}{dt}.$$

Pero la intensidad de corriente, por las leyes de la corriente de Kirchoff, es la misma en todos los puntos de este circuito, por lo que $I_L(t) = I_R(t)$ y queda

$$V(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t) + LI'(t),$$

que es una ecuación diferencial para la intensidad si se conoce el voltaje.

Supóngase que el voltaje es constante $V(t) = V$ (así que la corriente no es alterna). Entonces la ecuación es

$$V = RI(t) + LI'(t)$$

que ya se ha encontrado muchas veces... (es la misma que el enfriamiento con signos cambiados). La solución general es

$$I(t) = \frac{V}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

donde K es una constante de integración *que depende de la intensidad inicial*. Si se supone que $I_0 = 0$ (lo "normal"), entonces $K = -V/R$, así que es negativa y la gráfica de la intensidad tiene la forma de la figura 11

Ejemplo 12 (Un ejemplo multivariable: modelos de predador-presa). Un modelo de ecosistema muy sencillo puede consistir en dos especies, una de las cuales depreda a la otra (se denomina a este modelo "predador-presa"). Supóngase un territorio con un área fija y que la variable x denota la densidad de población de la especie *presa* mientras que y denota la de la especie *predador*.

Una manera muy simplificada de relacionar ambas especies es suponer lo siguiente:

- La especie *presa* se multiplica "espontáneamente" con una probabilidad α . Es decir, en cada instante de tiempo, el crecimiento de la densidad de la presa por su propia reproducción es αx .
- La especie *predador* tiende a morir "espontáneamente" con una probabilidad β . Es decir, en cada instante de tiempo, la densidad de los predadores por su propia naturaleza *desciende* βy .

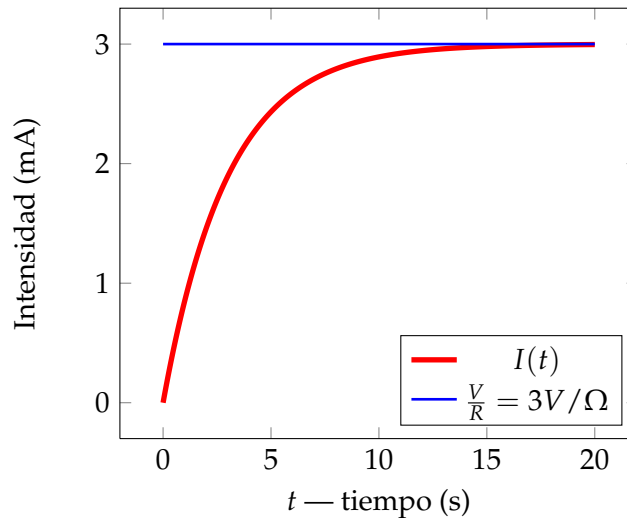


Figura 3.4: Intensidad en la bobina del circuito 3.3 para ciertos valores de la resistencia y la inductancia. El comportamiento es similar al enfriamiento pero con tendencia opuesta: hay una intensidad máxima a la que se tiende y que se alcanza “en el infinito”.

- Cada vez que un predador y una presa “coinciden”, el predador se alimenta y la presa muere. Esto significa que x disminuye a una velocidad proporcional a la densidad conjunta xy . Llamemos a este factor de proporcionalidad δ .
- La alimentación de los predadores favorece su reproducción. Así que y aumenta a una velocidad proporcional a la densidad conjunta xy . Llamemos a este factor ϵ .

Con estas condiciones, es fácil escribir las ecuaciones diferenciales que relacionan x e y (ambas son dependientes del tiempo):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \delta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \epsilon xy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

que es una ecuación diferencial *de dos variables* (i.e. un sistema de ecuaciones diferenciales). Como las derivadas son ambas respecto a una sola variable independiente (ya se ha dicho que x e y son funciones de t), el sistema es de ecuaciones diferenciales *ordinarias*. Si utilizáramos la notación física, podría

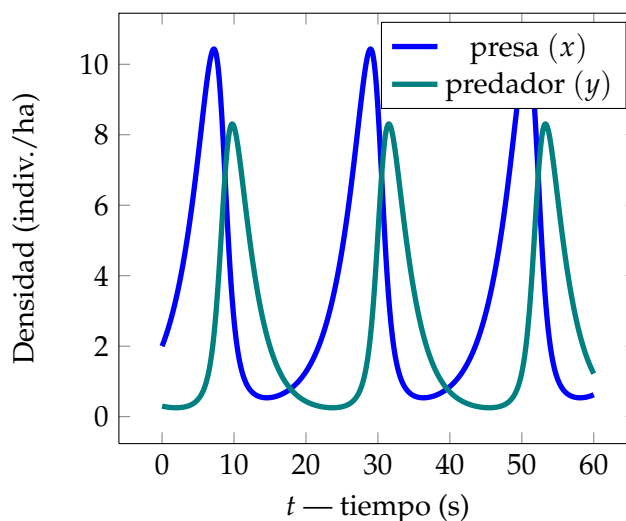


Figura 3.5: Modelo simplificado de ecosistema con depredador y presa. Los parámetros son $\alpha = .3$, $\beta = .4$, $\delta = .13$ y $\epsilon = .12$.

escribirse así

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \delta xy \\ \dot{y} &= -\beta y + \epsilon xy \end{aligned}$$

y está claro que, para dar una descripción completa del comportamiento del sistema hace falta conocer las densidades *iniciales*.

Esta ecuación no es tan sencilla de resolver como las anteriores (de hecho las soluciones en función del tiempo no pueden calcularse en términos de funciones elementales), pero es sencillo comprobar que las soluciones son periódicas (es decir, el ecosistema tiene un comportamiento repetitivo a lo largo del tiempo). Esto hace ver que el modelo es irreal (ningún ecosistema es exactamente cíclico) pero cercano a la realidad (las poblaciones tienen un comportamiento de ese estilo).

Uno de los mayores problemas de este modelo hipersimplificado es que con frecuencia sus soluciones llegan a valores de 10^{-6} individuos por hectárea o menos en algún momento y el modelo es absurdo. Esto es conocido como el problema del “atto-zorro” (atto es el prefijo del Sistema Internacional para indicar 10^{-18}).

Ejemplo 13 (Un fluido “plano” en estado estacionario). El *estado estacionario* de un sistema es aquel estado que no varía en el tiempo. Esto no significa

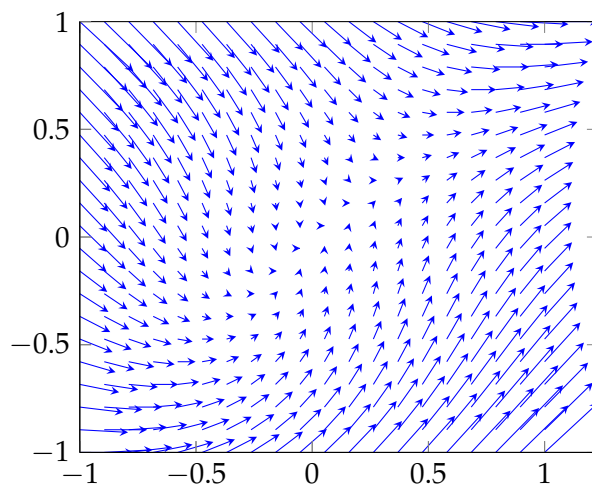


Figura 3.6: Un ejemplo de campo de vectores en el plano.

que los elementos del sistema estén quietos sino que su comportamiento solo depende de su posición en el sistema, no del tiempo.

Por ejemplo, un fluido está en estado estacionario cuando partículas que inician su movimiento en el mismo punto describen trayectorias iguales. Se puede entender un sistema así como un sistema en el que las velocidades de las partículas *en cada lugar* son constantes: un fluido en estado estacionario se describe, por tanto, como una familia de vectores *velocidad* en cada punto del plano.

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo: $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$. Dar una velocidad en cada punto no es más que asignar un valor a \dot{x} y a \dot{y} en cada punto del plano, es decir, un sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, y) \\ \dot{y} &= Y(x, y)\end{aligned}$$

para cualquier (x, y) del plano. Igual que en el Ejemplo 12, este sistema describe una ecuación diferencial ordinaria.

Está claro que una manera de representar dicha ecuación consiste en “dibujar” en cada punto (x, y) del plano una flecha que indique la dirección y la magnitud del vector $(X(x, y), Y(x, y))$. Esta representación es por lo general muy útil para —sin resolver la ecuación diferencial— hacerse *una idea* del movimiento de las partículas del fluido.

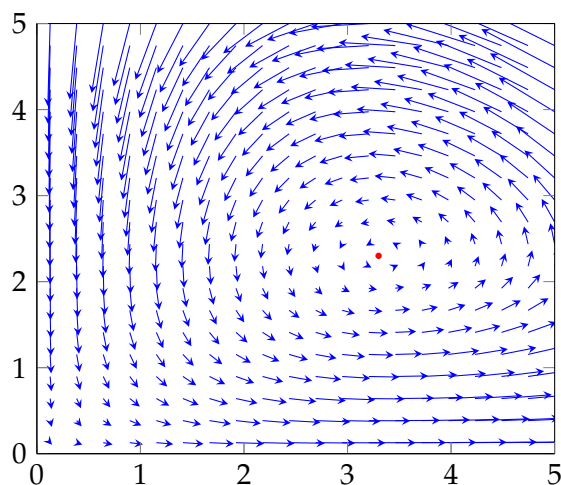


Figura 3.7: El sistema predador-presa de la figura 3.5 como campo de vectores. La periodicidad de las soluciones (las trayectorias *tangentes* a las flechas) debe ser visible y también la existencia de un punto de equilibrio (en rojo) cerca de $(3, 2)$.

Un punto (x, y) del sistema en el que tanto $X(x, y) = 0$ como $Y(x, y) = 0$ —es decir, un punto en el que la *velocidad* es nula— se llama punto de equilibrio. Es un lugar en el que, si se *soltara una partícula*, quedaría quieta. Un ejemplo es el centro de un vórtice. Otro no tan obvio es un par de densidades (x, y) que hacen que la ecuación del sistema predador-presa defina un sistema “quieto” (en el que no varía ninguna de las dos densidades). Puede apreciarse esto en la figura 3.7.

Ejemplo 14 (Ecuación de difusión en una dimensión). Este es uno de los pocos ejemplos que se tratarán de ecuaciones en derivadas parciales, pero quizás el más importante de todos desde el punto de vista físico: la ecuación de difusión (que coincide con la ecuación del calor y otras muchas).

Supóngase un fluido unidimensional (o, por dar una idea más gráfica, un fluido en un tubo homogéneo) en el que se ha introducido una cierta cantidad de soluto (y este no está totalmente disuelto). Se estipula (para simplificar) que la distribución de moléculas en el tubo depende solo de la coordenada longitudinal.

La *Primera Ley de Fick de la difusión* postula que el flujo de la concentración (es decir, el cambio de concentración en el tiempo) va de regiones de más concentración a regiones de menos concentración y que es proporcional al

gradiente de la concentración. Es decir, si $\phi(x, t)$ es la concentración de soluto en la coordenada x en el instante t y $J(x, t)$ es el flujo, entonces

$$J(x, t) = -D \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.6)$$

(todo con las magnitudes adecuadas). El flujo se mide, por ejemplo, en $\frac{\text{mo}}{\text{m}^2\text{s}}$. D es una constante positiva (coeficiente de difusión, que depende del fluido, temperatura, soluto...).

La *Segunda Ley de Fick* se deduce de la primera utilizando el principio de conservación de la masa (no se va a explicar aquí), calculando el cambio total de masa en cualquier segmento en un instante. Se llega a la conclusión de que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Esta ecuación determina la evolución de una cierta concentración de soluto en un fluido.

Como es obvio, para estipular una condición *de comienzo* del problema, no basta con dar un número. Hace falta (como en la realidad) fijar un valor de la concentración $\phi(x, 0)$ en el primer instante para cada punto del tubo. Por ejemplo: no se desarrolla de la misma manera la disolución de una gota de tinta si se deja caer en un vaso que si esa misma cantidad de tinta se distribuye como un “hilo fino transversal” o como un “anillo”.

3.2. Definiciones y resultados esenciales

La definición más importante es la siguiente:

Definición 35. Una *ecuación diferencial* es una ecuación en la que la incógnita es una función y aparece derivada.

Hay dos tipos esenciales de ecuaciones diferenciales: aquellas en que la función que se busca depende de una sola variable y aquellas en que depende de varias:

Definición 36. Una *ecuación diferencial ordinaria* es aquella en que la función incógnita (o las incógnitas) depende (dependen) de una sola variable.

Una *ecuación en derivadas parciales* es aquella en que la incógnita (o las incógnitas) depende (dependen) de varias variables.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son todos los de la Sección 3.1 salvo el (3.7) —la ecuación de difusión, que es en derivadas parciales.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Este curso solo se dedica a estudiar en detalle las ecuaciones diferenciales ordinarias (a partir de ahora EDO), (las EDP solo se introducen). En esta sección, las definiciones y resultados son exclusivos para EDO.

Nota 3. A partir de ahora distinguiremos la siguiente notación

- Una ecuación diferencial ordinaria será una ecuación diferencial de la forma $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, en la que solo hay una incógnita (la y) que depende de x .
- Un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* será una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(u) &= \frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2(u) &= \frac{dx_2}{du} = f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(u) &= \frac{dx_n}{du} = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde u es la variable independiente (que puede ser una de las x_i , cuidado).

Veremos cómo muchas EDO pueden escribirse como sistemas (y de hecho así pueden entenderse mejor, a veces).

Dada una EDO, su *orden* es el mayor orden de derivación de la función incógnita que aparece en la ecuación.

Definición 37. Dada una EDO de orden n con variable independiente x , se llama *problema de condiciones iniciales* para dicha ecuación a la ecuación junto con una especificación de valores para $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 38. Dado un sistema de EDO como (3.8), un *problema de condiciones iniciales* para dicho sistema dicha ecuación junto con la especificación de n valores $x_1(u_0), x_2(u_0), \dots, x_n(u_0)$ —un punto de \mathbb{R}^n — para cierto valor $u = u_0$.

Definición 39. Una *solución particular* de un problema de condición inicial de una EDO es una función $y(x)$ que cumple la condición inicial y que resuelve la ecuación al sustituir y por $y(x)$.

Una *solución particular* de un problema de condición inicial de un sistema de EDO es una colección de n funciones $x_1(u), \dots, x_n(u)$ que verifican las

condiciones iniciales y tales que al derivarlas con respecto a u , satisfacen el sistema.

En el caso de una EDO, la solución particular describe una gráfica que pasa por el punto de la condición inicial y cuyas derivadas satisfacen en cada punto la ecuación.

En el caso de un sistema de EDO, la solución es una colección de funciones que dependen de *un parámetro*: es decir, es una *curva* en \mathbb{R}^n cuyo *vector tangente* es, en cada punto, igual a los valores de las funciones f_i en él. Así, puede pensarse (correctamente) que un sistema de EDO es un “problema de calcular curvas conocidos los vectores tangentes”.

Nótese que también se puede hablar de *solución particular* de una EDO o un sistema sin hacer mención de las condiciones iniciales. En este caso se entiende implícitamente que las condiciones iniciales son los valores que toman y y sus derivadas (o las x_i) en uno de los puntos del dominio de la variable independiente.

En general, siempre se busca resolver un *problema de condiciones iniciales*, casi nunca se intenta “resolver una ecuación diferencial en general”. Sin embargo, conviene conocer lo que es una “solución general” de una EDO y de un sistema.

Definición 40. Dada una EDO de orden n , una *solución general* es una función $\bar{y}(x, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ que depende de x y de n parámetros tal que:

- Si a_0, \dots, a_{n-1} se sustituyen por números, entonces se obtiene una solución particular.
- Si $y(x)$ es una solución particular, entonces existen ciertos valores de las constantes a_0, \dots, a_{n-1} tales que $y(x) = \bar{y}(x, a_0, \dots, a_{n-1})$.

Es decir, una solución general es una “expresión” de todas las soluciones de todos los problemas de condiciones iniciales².

Definición 41. Dado un sistema de EDO de n incógnitas, una *solución general* es una colección de funciones $x_1(u, a_1, \dots, a_n), \dots, x_n(u, a_1, \dots, a_n)$, que dependen de n parámetros, tales que:

- Si a_1, \dots, a_n se sustituyen por números, entonces se obtiene una solución particular.
- Cualquier solución particular se obtiene a partir de ciertos parámetros a_1, \dots, a_n .

²Se está haciendo un abuso de lenguaje notable porque se está obviando el problema de las soluciones singulares, de los puntos críticos, etc... No es el lugar de entrar a estas florituras.

3.3. Los teoremas fundamentales

Las ecuaciones diferenciales se han utilizado desde el principio de la Física moderna (y desde su invención) para describir procesos físicos y elementos geométricos con variación respecto de parámetros (digamos “elementos en movimiento”). Hay dos principios claves de la Física clásica (que hacen, entre otras cosas, que la ciencia física tenga sentido como ciencia determinista) que pueden enunciarse como sigue (esta nomenclatura es nuestra):

Identidad: El resultado de un experimento físico solo debe depender de las condiciones iniciales. Una vez estipuladas estas, debe haber un único comportamiento del sistema.

Regularidad: El resultado *a corto plazo* de dos realizaciones del mismo experimento físico llevadas a cabo en condiciones *similares* (no iguales) debe ser *similar*. Nótese el “a corto plazo”.

La primera propiedad es esencial: si un experimento físico no da los mismos resultados bajo las mismas condiciones es que *no se conocen todas las condiciones de dicho experimento*³. La segunda es la que permite “realizar experimentos parecidos” y obtener resultados parecidos: uno espera, por ejemplo, que los cálculos de g , la constante gravitatoria, realizados en un laboratorio “malo” den entre 8 y 10 m/s², no 300 ni -4 .

Estas dos propiedades son satisfechas por las soluciones de las ecuaciones diferenciales: una vez impuestas las condiciones iniciales, una ecuación diferencial “normal” tiene una única solución. Por otro lado, si las condiciones iniciales varían poco, la nueva solución se parece (al menos “durante un rato”) a la anterior.

El primer resultado, enunciado para EDO es el siguiente:

Teorema 22 (De existencia y unicidad de Cauchy). *Sea*

$$y^n + f_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = h(x) \quad (\text{E})$$

una ecuación diferencial ordinaria de orden n y grado ⁴ 1. Se supone que las funciones $f_1(x), \dots, f_n(x)$ y $h(x)$ son derivables en un abierto $D \in \mathbb{R}$. Si $y(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$ son una colección de n condiciones iniciales en el punto $x = x_0 \in D$ entonces existe una y solo una solución particular $y(x)$ de la ecuación (E) que satisface dichas condiciones iniciales, definida en todo D . Esta función es derivable n veces.

Es decir, toda ecuación diferencial ordinaria que se escriba como (E) tiene una única solución una vez que se especifican condiciones iniciales para y y sus derivadas hasta orden $n - 1$.

³Cuidado: no se habla en este curso de experimentos cuánticos sino clásicos.

⁴El *grado* es el mayor exponente a que aparece y o una de sus derivadas elevada.

Para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene un resultado análogo:

Teorema 23 (De existencia y unicidad de Cauchy). *Sea*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(u) &= \frac{dx_1}{du} = f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2(u) &= \frac{dx_2}{du} = f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(u) &= \frac{dx_n}{du} = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \tag{S}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las f_i son funciones definidas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ diferenciables con continuidad. Si $(a_1, \dots, a_n, u_0) \in D$ es un punto de D entonces existe una y solo una curva (donde $r > 0$ es un número real)

$$\gamma : [u_0, u_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por $\gamma(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u))$, derivable, que cumple la condición $\gamma(u_0) = (a_1, \dots, a_n)$ y que resuelve el sistema (S).

La interpretación geométrica de este resultado es clara: dado un sistema como (S), que no es más que una colección de vectores en cada punto de D , una vez que se estipula uno de los puntos a de D , existe una *única curva* que pasa por a y cuyo vector tangente en cada punto viene es el que determinan las f_i (el “dibujado” por el sistema).

En el enunciado del Teorema 23 no se impone ninguna condición sobre las funciones f_1, \dots, f_n . Sin embargo, si se presta atención a la Figura 3.8, se observa que el punto “rojo” (el punto en el que el vector descrito por las funciones del sistema es $(0, 0)$) es *especial*. Si uno intenta trazar una curva cuyo vector tangente sea $(0, 0)$ resulta que lo que sale es un “punto fijo”. De hecho, esto es lo que ocurre cuando se aplica el mencionado teorema: si (a_1, \dots, a_n, u_0) es tal que $f_i(a_1, \dots, a_n, u_0) = 0$ para todo i , entonces la curva solución por ese punto es $\gamma(u) = (a_1, \dots, a_n)$ —una curva que “no se mueve”. Un punto así se denomina *punto crítico* del sistema de ecuaciones y son justamente los *puntos extraños* de un campo de vectores (en la ecuación de Lotka-Volterra, un punto de equilibrio, en un sistema que describa el campo gravitatorio, un punto de masa, etc.).

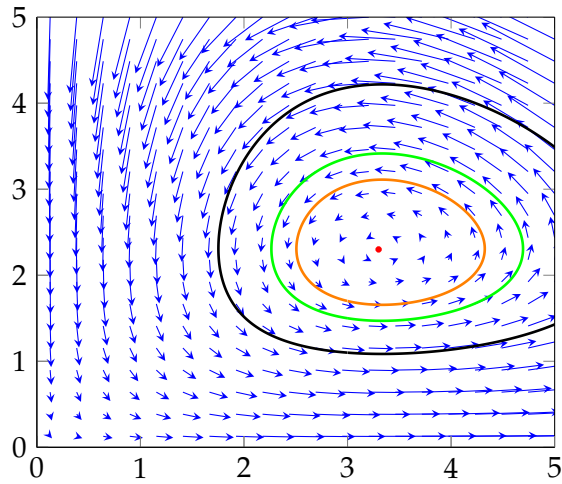


Figura 3.8: El sistema predador-presa de la figura 3.5 con varios vectores y tres *curvas solución* o *trayectorias* (que se ve son cíclicas). El punto crítico (en rojo) da lugar a una solución *constante*.

Bibliografía

[1] M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, 1988.